F 2557

1

TOMUL 32

1973

(93)

1973 AUG 3 0

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacție

Acad. E. CARAFOLI, *redactor responsabil*,
Acad. D. DUMITRESCU, *redactor responsabil adjunct*,
Prof. I. ANTON, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. CONSTANTIN AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. ȘTEFAN BĂLAN,
Prof. GH. MANEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. RADU VOINEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. RADU C. BOGDAN,
Conf. DAN PAVELESCU,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacție*.

În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Revistele se pot procura (direct sau prin poștă) și prin PUNCTUL DE DESFACERE din cadrul EDITURII ACADEMIEI. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la Întreprinderea Rompresfilatelia, căsuța poștală 2001, București, România, sau la reprezentanții săi din străinătate.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice corespondență, se trimit pe adresa Comitetului de redacție al revistei, Str. Const. Mille nr. 15, tel. 13.83.26

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
str. Gutenberg nr. 3 bis, sectorul 6, București.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 32 1/1973

SUMAR

STUDII

Pag.

E. CARAFOLI şi C. BERBENTE, Mişcarea supersonică-hipersonică în jurul conului permeabil fără incidenţă 3

N. N. PATRAULEA, Noi contribuţii la metoda iterativă pentru calculul aerodinamic al aripii în regim subsonic 15

E. CARAFOLI şi ŞT. STAICU, Citeva aspecte interesante ale mişcărilor conice . . . 31

E. RĂZVAN, Difuzia unui jet vertical într-un mediu fluid de densitate oarecare . . 55

GH. MANEA, D. HÎNCU, V. SIMIONESCU, M. DUMBRAVĂ şi D. ANASTASESCU, Aspecte teoretice caracteristice şi metodă de calcul pentru lagărele radiale hidrostatice fără canale longitudinale, unse cu lichide 81

T. MĂDĂRĂŞAN, Contribuţii asupra calculului lagărelor de alunecare cu răcire naturală. 105

N. GRĂDINARU, R. IOVĂNESCU, Calculul frecvenţelor proprii pentru sistemul arbore-lagăre cu ajutorul matricelor de transfer 123

MAGDALENA POSEA, Influenţa variaţiei de temperatură asupra îmbinărilor prin flanşe. 131

CHIRIAC VASILIU, Frecarea superficială dintre pneul de automobil şi calea nedeformabilă 147

C. DUCA şi I. SIMIONESCU, Un principiu general de formare a mecanismelor . . . 155

N. POSEA, Calculul structurilor prin iteraţii cu suprarelaxări asupra momentelor . . . 173

M. DIACONU, O metodă practică pentru rezolvarea problemei contactului în cazul grinzilor de lungime medie şi a grinzilor pereţi rezemate pe mediul liniar deformabil 195

M. RADEŞ, Vibraţiile verticale axial-simetrice ale unui corp rigid rezemat pe o fundaţie inerţială de tip Pasternak 231

RECENZII 255

1989

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
F
2557
FOLYÓIRAT OSZTÁLY

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
KÖNYVTÁR
1848

MIŞCAREA SUPERSONICĂ-HIPERSONICĂ ÎN JURUL CONULUI PERMEABIL FĂRĂ INCIDENŢĂ

de E. CARAFOLI şi C. BERBENTE
Institutul politehnic Bucureşti

Se prezintă o metodă de rezolvare a mişcării în jurul conului permeabil, bazată pe o soluţie analitică aproximativă obţinută anterior de autori pentru conul solid [3], fără a face ipoteza micilor perturbaţii faţă de curentul incident.
Problema se rezolvă prin două metode şi anume: metoda conului echivalent şi o metodă directă, găsindu-se în final expresia coeficientului de presiune pe conul permeabil.
Se dau exemple de aplicaţii şi se fac observaţii finale arătîndu-se aplicabilitatea metodei pentru un larg interval de deviaţii şi numere Mach.

Problema mişcării supersonice în jurul unui con permeabil poate avea aplicaţii multiple de importanţă deosebită, printre care şi o reducere sensibilă a rezistenţei la înaintare prin modificarea intensităţii undelor de şoc produse de mişcarea corpului. O soluţie aproximativă este bazată pe metoda micilor perturbaţii [1] iar o soluţie mai exactă, pe care o vom trata mai jos, se bazează pe rezultatele pe care le-am obţinut anterior în problema conului solid, fără să facem ipoteza micilor perturbaţii [3] . În cele ce urmează, ne propunem, deci, să dăm o soluţie care să fie valabilă pe un larg interval de regim supersonic-hipersonic moderat, atît ca număr Mach, cît şi ca valoare a semi-unghiului de la vîrful conului.

Să considerăm o mişcare supersonică în jurul unui con circular, permeabil, fără incidenţă, de semiunghi la vîrf θ_p. Vom presupune unda de şoc ataşată la vîrful ascuţit al corpului, astfel încît mişcarea este conică. Deoarece intensitatea undei de şoc nu variază, scurgerea între undă şi corp este isentropică şi admite un potenţial al vitezelor Φ pe care îl vom scrie sub forma

$$\Phi = RV(\theta), \quad v_R = \frac{\partial \Phi}{\partial R} = V(\theta), \tag{1}$$

unde R, θ sînt coordonatele sferice ale punctului curent P (fig. 1). Viteza

după raza vectoare este o funcţie numai de θ, aşa cum se vede, de altfel, şi din a doua ecuaţie (1).

În condiţiile mişcării conice, ecuaţia potenţialului se reduce la forma simplă următoare [2]:

$$V'' + V' \operatorname{ctg} \theta + 2V = \frac{V'^2}{a^2}(V'' + V), \quad \left(V' = \frac{dV}{d\theta}, \quad V'' = \frac{d^2V}{d\theta^2}\right). \tag{2}$$

Am notat cu V' şi V'' derivatele de ordinul 1, respectiv 2, în raport cu θ ale funcţiei $V(\theta)$ şi cu a viteza sunetului dată de relaţia cunoscută

$$a^2 = \frac{1}{M_\infty^2} + \frac{\gamma - 1}{2}(1 - V^2 - V'^2) \qquad (U_\infty = 1). \tag{3}$$

În relaţia (3) M_∞ este numărul Mach al curentului neperturbat de viteză $U_\infty (U_\infty = 1)$, iar γ raportul căldurilor specifice.

În cele ce urmează, vom presupune suprafaţa conului permeabilă, ceea ce revine la a considera că pentru $\theta = \theta_p$ componenta v_θ a curentului are o valoare diferită de zero.

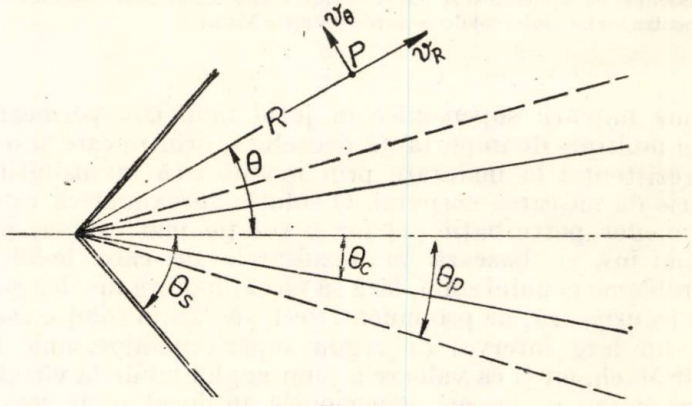


Fig. 1

Prin urmare, ecuaţia (2) trebuie rezolvată pentru următoarele condiţii la limită pe corpul conic permeabil şi pe unda de şoc:

$$\theta = \theta_p, \quad v_\theta = V' = V'_p, \tag{4}$$

$$\theta = \theta_s, \quad v_R = V = \cos \theta_s, \tag{5}$$

$$\theta = \theta_s, \quad v_\theta = V' = -\left(k + \frac{1 - k}{K_s^2}\right) \sin \theta_s \qquad (K_s = M_\infty \sin \theta_s). \tag{6}$$

Ultimele două relaţii se obţin utilizînd teoremele de conservare a masei, impulsului şi energiei la traversarea undei de şoc, după unele transformări curente. Pentru rezolvarea problemei vom da două metode.

1. METODA CONULUI ECHIVALENT

Într-o lucrare anterioară [3] am dat o soluţie analitică foarte apropiată de cea exactă, pentru cazul conului nepermeabil cu semiunghiul $\theta_c (V_c' = 0)$. Într-adevăr, observînd că membrul drept din ecuaţia (2) este neglijabil, fiind chiar nul pe con, am dedus, în primă aproximaţie, expresia vitezei radiale:

$$V = C_0\left(1 + \cos\theta \ln \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right) + D_0 \cos\theta, \tag{7}$$

unde constantele C_0 şi D_0 au expresiile

$$C_0 = \frac{\sin^2\theta_c}{\cos\theta_c + \left(\sec\theta_s + \ln\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\theta_s}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\theta_c}{2}}\right)\sin^2\theta_c}, \tag{8a}$$

$$D_0 = C_0\left(\frac{\cos\theta_c}{\sin^2\theta_c} - \ln\operatorname{tg}\frac{\theta_c}{2}\right), \tag{8b}$$

iar semiunghiul undei de şoc θ_s este dat de relaţia

$$\sin\theta_s = \sqrt{\left(1 + \frac{M_\infty^2 C_0 \sec\theta_s - K_c^2}{1 - k + K_c^2}\right)\left(\frac{1}{M_\infty^2} + \frac{\sin^2\theta_c}{1-k}\right)} \approx$$
$$\approx \sqrt{\frac{1}{M_\infty^2} + \frac{\sin^2\theta_c}{1-k}} \qquad (K_c = M_\infty \sin\theta_c). \tag{9}$$

În a doua aproximaţie am obţinut respectiv:

$$V = [C + H(\theta)]\left(1 + \cos\theta \ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right) + [D - L(\theta)]\cos\theta, \tag{10a}$$

$$2H(\theta) = -\int_{\theta_c}^{\theta} F(\tau)\sin 2\tau \,\mathrm{d}\tau;$$
$$2L(\theta) = -\int_{\theta_c}^{\theta} F(\tau)\left(\sec\tau + \ln\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}\right)\sin 2\tau \,\mathrm{d}\tau, \tag{10b}$$

τ fiind o variabilă de integrare, iar $F(\theta)$ reprezintă membrul drept din ecuația (2), calculat cu ajutorul primei aproximații :

$$F(\theta) = \frac{C_0^3}{a^2}\left(\frac{\cos\theta_c}{\sin^2\theta_c} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta_c}{2}}\right)^2 \approx$$

$$\approx V_c^3\frac{\sin^2\theta_c}{a_s^2}\left[\cos\theta_c - \left(\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} - \ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta_c}{2}}\right)\sin^2\theta_c\right]^2; \tag{11}$$

Viteza sunetului la $\theta = \theta_s$, notată cu a_s, se calculează cu ajutorul relației (3), iar constantele C și D au expresiile :

$$C = \frac{\left[1 + L(\theta_s) - \left(\sec\theta_s + \ln\operatorname{tg}\frac{\theta_s}{2}\right)H(\theta_s)\right]\sin^2\theta_c}{\cos\theta_c + \left(\sec\theta_s + \ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta_s}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta_c}{2}}\right)\sin^2\theta_c}, \tag{12a}$$

$$D = C\left(\frac{\cos\theta_c}{\sin^2\theta_c} - \ln\operatorname{tg}\frac{\theta_c}{2}\right); \tag{12b}$$

Remarcăm că pentru θ_s avem și în a doua aproximație o relație de forma (9) :

$$\sin\theta_s \approx \sqrt{\frac{1}{M_\infty^2} + \frac{\sin^2\theta_c}{1-k}}. \tag{13}$$

Se constată că [3] soluția în a doua aproximație introduce, în general, corecții mici, astfel încît, pentru calculele care urmează, vom considera soluția (7).

Să revenim acum la problema conului poros. Viteza normală pe con V_p', pe care o vom nota, în general, cu V_n, poate fi dedusă din relația

$$p_i - p_p = \mu\frac{\rho_p}{2}U_\infty^2\frac{V_n}{U_\infty} = \mu\frac{\rho_p}{2}U_\infty V_p', \tag{14}$$

unde p_p și p_i sînt presiunile de pe suprafața conului și, respectiv, din interiorul conului, ρ_p densitatea fluidului pe con, μ un coeficient care depinde de permeabilitatea peretelui [1]. Nu ne vom ocupa de procesul

fizic al acestei filtrații, însă am vrut să arătăm tocmai mecanismul de producere a vitezei normale V_n.

Mișcarea în jurul conului permeabil de semiunghi θ_p este aceeași (pentru $\theta \geqslant \theta_p$) cu mișcarea din jurul unui con solid echivalent de semiunghi θ_c, cu condiția să avem :

$$V'_p = [C + H(\theta_p)]\left(\operatorname{ctg}\theta_p - \sin\theta_p \ln \operatorname{tg}\frac{\theta_p}{2}\right) - [D - L(\theta_p)]\sin\theta_p \approx$$

$$\approx C_0\left(\operatorname{ctg}\theta_p - \sin\theta_p \ln \operatorname{tg}\frac{\theta_p}{2}\right) - D_0 \sin\theta_p. \tag{15}$$

Să remarcăm că constantele C_0 și D_0 (respectiv D și C) conțin unghiul θ_c al conului solid echivalent. Ca urmare, din ecuația (15) scoatem θ_c în funcție de θ_p și V'_p, care sînt date. Cunoscînd θ_c, mișcarea în jurul conului poros este dată de relația (7) sau (9). *Remarcă.* Analogia cu conul solid echivalent este valabilă atîta timp cît valorile unghiului θ_c dedus din (15) sînt pozitive. Pentru succiuni puternice, este posibil ca această condiție să nu mai fie satisfăcută.

2. METODA DIRECTĂ

Să considerăm din nou ecuația (2) cu condițiile la limită (4), (5). Ca și în cazul precedent, pentru un larg interval de aplicații, există un con solid echivalent, astfel încît, la $\theta = \theta_c > 0$ avem $V' = 0$. Aceasta sugerează că membrul drept din ecuația (2) rămîne, în continuare, mic, fiind chiar nul la $\theta = \theta_c$ și, prin urmare, și în cazul conului poros este valabilă, în primă aproximație, o soluție de forma (7) :

$$V = C_1\left(1 + \cos\theta \ln \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right) + D_1 \cos\theta. \tag{16}$$

Pentru determinarea constantelor C_1 și D_1, precum și a unghiului θ_s, vom utiliza direct condițiile (4), (5). În acest fel rezultă, după unele operații,

$$C_1 = \frac{(1+\nu)\sin^2\theta_p}{\cos\theta_p + \left(\sec\theta_s + \ln\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\theta_s}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\theta_p}{2}}\right)\sin^2\theta_p}, \tag{17a}$$

$$D_1 = C_1\left(\frac{\cos\theta_p}{\sin^2\theta_p} - \ln \operatorname{tg}\frac{\theta_p}{2}\right) - \nu\,; \quad (\nu = V'_p/\sin\theta_p), \tag{17b}$$

$$\sin\theta_s = \sqrt{\left(\frac{1}{M_\infty^2} + \frac{1+\nu}{1-k}\sin\theta_p\right)(1+2\delta)} \approx \sqrt{\frac{1}{M_\infty^2} + \frac{1+\nu}{1-k}\sin^2\theta_p}, \tag{17c}$$

unde am introdus parametrul ν definit de a doua relație (17b).

În relația (17c) am neglijat cantitatea

$$2\delta = \frac{M_\infty^2 C_1 \sec\theta_s - (1+\nu)K_p^2}{1-k+(1+\nu)K_p^2}, \tag{18}$$

care este mică în raport cu unitatea.
Utilizînd rezultatele primei aproximații, putem calcula termenii neglijați, ub forma

$$F_1(\theta) = -\frac{V'^2}{a_2}(V''+V) = \frac{C_1}{a^2}\left[\nu - C_1\left(\frac{\cos\theta_p}{\sin^2\theta_p} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta_p}{2}}\right)\right]^2 \tag{19}$$

și trece la un calcul în a doua aproximație. În acest fel se obține soluția

$$V = [C_2 + H_2(\theta)]\left(1+\cos\theta\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right) + [D_2 - L_2(\theta)]\cos\theta, \tag{20}$$

unde am notat, în mod analog cu (10b),

$$2H_2(\theta) = -\int_{\theta_p}^{\theta} F_1(\tau)\sin 2\tau\,d\tau,$$

$$2L_2(\theta) = -\int_{\theta_p}^{\theta} F_1(\tau)\left(\sec\tau + \ln\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}\right)\sin 2\tau\,d\tau. \tag{21}$$

Utilizînd condițiile la limită se obțin constantele C_2 și D_2 și unghiul θ_s în a doua aproximație:

$$C_2 = \frac{\left[1+\nu+L_2(\theta_s) - \left(\sec\theta_s + \ln\operatorname{tg}\frac{\theta_s}{2}\right)H_2(\theta_s)\right]\sin^2\theta_p}{\cos\theta_p + \left(\sec\theta_s + \ln\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\theta_s}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta_p}{2}}\right)\sin^2\theta_p}, \tag{22a}$$

$$D_2 = C_2\left(\frac{\cos\theta_p}{\sin^2\theta_p} - \ln\operatorname{tg}\frac{\theta_p}{2}\right) - \nu, \tag{22b}$$

$$\sin\theta_s = \sqrt{\left(\frac{1}{M_\infty^2} + \frac{1+\nu}{1-k}\sin^2\theta_p\right)\left(1 + \frac{M_\infty^2(C_2+H_2(\theta_s))\sec\theta_s - (1+\nu)K_p^2}{1-k+(1+\nu)K_p^2}\right)} \approx$$

$$\approx \sqrt{\frac{1}{M_\infty^2} + \frac{1+\nu}{1-k}\sin^2\theta_p}. \tag{22c}$$

Din cele de mai sus se observă apariția unui parametru legat de permeabilitate $\nu = V'_p/\sin\theta_p$. Pentru $\nu = 0$ se vede din expresiile de mai sus, observînd și faptul că $F_1(\theta)$ este zero (19), deci și $H_2(\theta)$ și $L_2(\theta)$ sînt, de asemenea, nule (21), că vom avea

$$C_1 = C_2 = 0,\ D_1 = D_2 = 1;\ \sin\theta_s = \frac{1}{M_\infty}, \tag{23}$$

ceea ce corespunde unei soluții exacte a ecuației (2):

$$v_R = V = \cos\theta,\ v_\theta = V' = -\sin\theta, \tag{24}$$

identică cu mișcarea curentului neperturbat. Așa cum era de așteptat, datorită succiunii, rezistența opusă de corp s-a anulat. Unda de șoc s-a redus la o undă Mach de mică intensitate, mai departe avînd loc eventual o expansiune. Prin urmare, pentru $\nu = -1$ semiunghiul conului echivalent este nul, iar soluțiile date mai sus sînt corecte pentru $\nu \geqslant -1$. Marginea superioară a parametrului ν este dată de condiția ca unda să rămînă atașată. Cazul expansiunii ($\nu < -1$) îl vom studia într-o altă lucrare.

3. CALCULUL PRESIUNILOR

Din ecuația energiei (sau presiunii) se obține

$$\frac{1}{2}\left(V^2 + V'^2\right) + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{1}{2}W^2, \tag{25}$$

unde W este viteza maximă iar p_0, ρ_0 presiunea și densitatea în punctele de viteză nulă, după unda de șoc.
Notînd cu p_s presiunea imediat după unda de șoc, avem [4]

$$\frac{p_s}{p_\infty} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}M_\infty^2\sin^2\theta_s - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = (1+k)K_s^2 - k = \lambda, \tag{26}$$

raport pe care l-am introdus pentru simplificarea scrierii în cele ce urmează.

Deoarece după unda de șoc transformările sînt isentropice, raportul dintre presiunea p la unghiul curent θ și presiunea p_∞ se poate scrie ca

$$\frac{p}{p_\infty} = \frac{p}{p_0}\frac{p_0}{p_s}\frac{p_s}{p_\infty} = \lambda\left(\frac{W^2 - V^2 - V'^2}{W^2 - V_s^2 - V_s'^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \tag{27}$$

Din condițiile la limită (5a) și (5b) se obține

$$W^2 - V_s^2 - V_s'^2 = \frac{1-k}{kM_\infty^2}\left(k + \frac{1-k}{K_s^2}\right)\lambda, \tag{28}$$

iar din expresia (20) a lui V deducem

$$V^2+V'^2=\frac{[C_2+H_2(\theta)]^2}{\sin^2\theta}+\left\{[C_2+H_2(\theta)]\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+D_2-L_2(\theta)\right\}^2. \quad (29)$$

Pe suprafața conului ($\theta=\theta_p$) $V=V_p$, $V'=V'_p$ expresia de mai sus devine

$$V_p^2+V_p'^2=\frac{C_2^2}{\sin^2\theta_p}+\left(C_2\frac{\cos\theta_p}{\sin^2\theta_p}-\nu\right)^2, \quad (30)$$

constanta C_2 fiind dată de relația (22a).
Acum, ținînd seama și de (28), formula (27) ne dă

$$\frac{p_p}{p_\infty}=\lambda\left[\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2(1-V_p^2-V_p'^2)}{\lambda\left(k+\frac{1-k}{K_s^2}\right)}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (31)$$

Pentru a determina presiunea p_i din interiorul conului avem nevoie și de raportul densităților:

$$\frac{\rho_p}{\rho_\infty}=\lambda_\rho\left[\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2(1-V_c^2-V_c'^2)}{\lambda\left(k+\frac{1-k}{K_s^2}\right)}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (32)$$

unde am notat cu λ_ρ raportul densităților la traversarea undei de șoc [4]:

$$\lambda_\rho=\frac{\rho_s}{\rho_\infty}=\frac{\gamma+1}{\gamma-1+\frac{2}{K_s^2}}. \quad (33)$$

Utilizînd relația (14) se poate calcula acum presiunea p_i.

4. EXEMPLE DE APLICAȚII ȘI OBSERVAȚII FINALE

În figura 2 am reprezentat raportul sinusurilor semiunghiurilor conului echivalent și penetrabil. Se observă că semiunghiul conului echivalent θ_c este bine aproximat de formula

$$\sin\theta_c=\sqrt{1+\nu}\sin\theta_p, \quad (34)$$

rezultat care se poate obține din ecuația (15) după unele transformări sau mai direct din relația (17c), observînd că semiunghiul undei de șoc θ_s este același pentru cele două conuri. Abaterile de la formula (34) scad

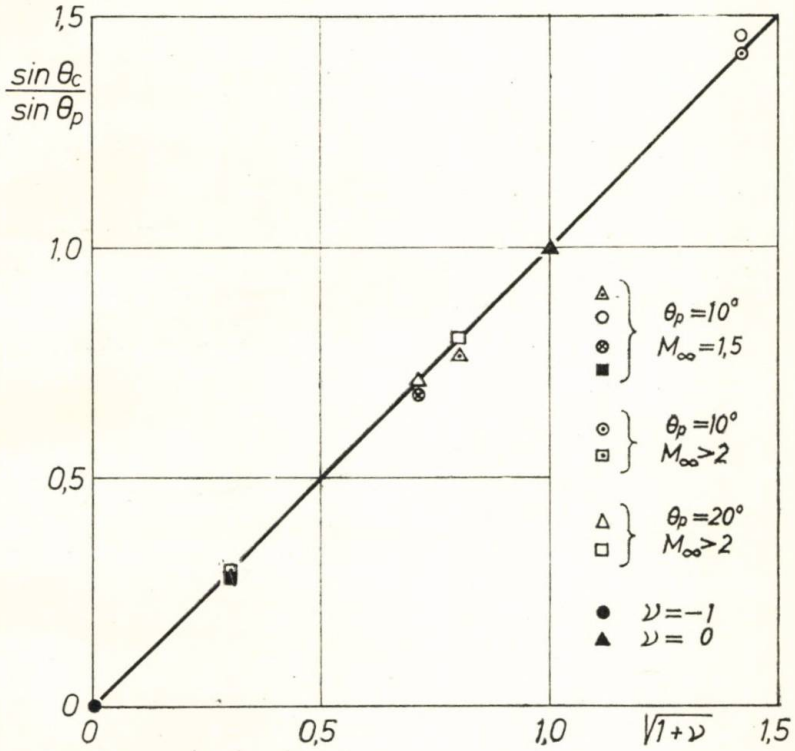


Fig. 2

cînd numărul Mach crește. Pentru o mai mare exactitate, ori de cîte ori este necesar, se poate corecta expresia (34) sub forma

$$\sin \theta_c = \sqrt{(1 + \nu) \sin^2 \theta_p + (C_1 - C_0) \sec \theta_s}, \tag{35}$$

unde θ_s se calculează cu formula (17c), iar C_0 cu relația (8a), utilizînd pentru θ_c valoarea dată de (34).

În figura 3 au fost reprezentate curbele coeficientului de presiune C_p pe corp, dat de relația

$$C_p = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{p_p}{p_\infty} - 1 \right) \tag{36}$$

pentru semiunghiul $\theta_p = 20°$ și valori ale parametrului $\nu = -1$; $-0{,}5$; $-0{,}36$; 0; $0{,}21$; $0{,}50$. Se observă o scădere destul de rapidă a coeficien-

tului C_p față de conul impermeabil, pentru cazul succiunii ($\nu < 0$) *). În cazul $\nu > 0$ coeficientul C_p crește substanțial în cazul numerelor Mach moderate ($M < 2{,}5$).

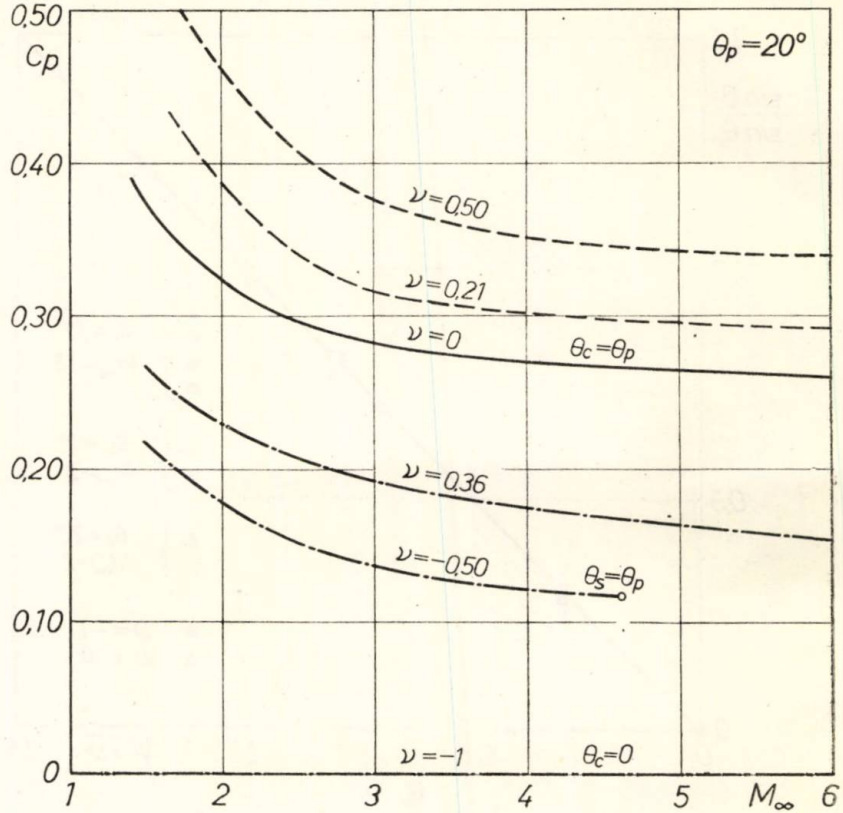


Fig. 3

OBSERVAȚII FINALE

1. Ca și în cazul conului impermeabil convergența metodei este rapidă cînd regimul de mișcare după unda de șoc rămîne supersonic. În figura 4 sînt date valorile limită ale unghiului conului echivalent pentru care această condiție este satisfăcută.

2. Deoarece presiunea are un maxim la $\theta = \theta_c (V_c' = 0)$ în cazul $\nu > 0$, are loc o destindere între $\theta = \theta_c$ și $\theta = \theta_p$. Pentru acestea trebuie verificată relația

$$\frac{V_p'^2}{a_p^2} \ll 1 \tag{37}$$

pentru a vedea dacă nu este necesară și a doua aproximație.

*) Desigur pentru a produce succiune se cheltuiește energie.

3. În cazul $\nu < 0$ există un număr Mach la care unda de şoc se lipeşte de corp ($\theta_s = \theta_p$), dat de relaţia (17c):

$$M_\infty^2 = \frac{1-k}{(-\nu-k)\sin^2\theta_p}. \tag{38}$$

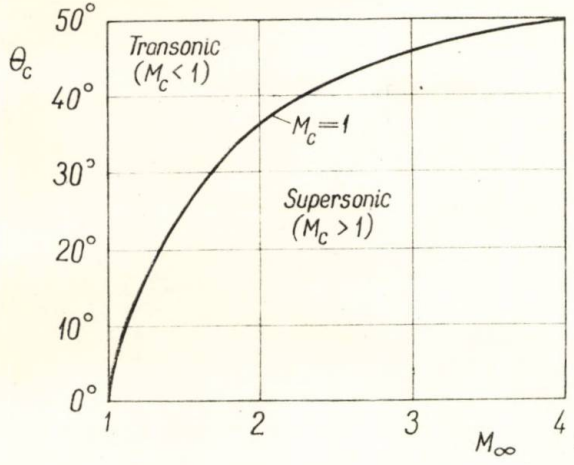


Fig. 4

Pentru $\nu = -k$ din (38) se obţine $M_\infty \to \infty$. Spre deosebire de regimul Newtonian, în cazul conului permeabil putem avea $k \neq 0$ ($\gamma \neq 1$). Într-adevăr, datorită succiunii, raportul densităţilor înainte şi după unda de şoc, lipită de corp la $M_\infty \to \infty$, rămîne finit.

Utilizînd (38) se obţine expresia pentru coeficientul de presiune:

$$C_p = 2(1+\nu)\sin^2\theta_p \qquad (\theta_s = \theta_p). \tag{39}$$

Pentru $M_\infty \to \infty$ relaţia (39) capătă forma

$$C_p = 2(1-k)\sin^2\theta_p \qquad (M_\infty \to \infty). \tag{40}$$

Formula lui Newton se obţine din (40) făcînd $k = 0$.

Dacă $\nu > 0$ unda de şoc nu se poate alipi de corp; în acest caz avem $\theta_s \geqslant \theta_c > \theta_p$.

Primită la redacţie la 1 martie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. E. M. Kalinin, *Aerodinamica conului permeabil* (în limba rusă), MJG *1* (1966).
2. G. I. Taylor, J. W., Maccoll, Proc. Roy. Soc., 1933, vol. A 139, pag. 278.
3. E. Carafoli, C. Berbente, *Considerations on the Supersonic and Hypersonic Motion past the Circular Cone at angle of Attack''*, Zeitschrift für Flugwissenschaften, 18 (1970), Heft 2–3.
4. E. Carafoli, *High-speed Aerodynamics*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1956.

NOI CONTRIBUȚII LA METODA ITERATIVĂ PENTRU CALCULUL AERODINAMIC AL ARIPII ÎN REGIM SUBSONIC

de N. N. PATRAULEA
I.M.F.C.A.

Scopul principal al acestei lucrări este de a aplica metoda expusă în [1] la calculul aerodinamic al aripii de avion în regim subsonic și de a compara rezultatele cu rezultatele teoretice obținute de alți autori sau cu rezultatele experimentale cunoscute în literatura de specialitate.
În prealabil, s-au adus unele perfecționări ale metodei date în [1], în special pentru grăbirea procesului iterativ.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

1.1. ECUAȚIILE DE BAZĂ

În lucrarea [1] s-a dat o metodă iterativă pentru determinarea circulațiilor pe aripă. Aripa este împărțită într-un număr suficient de mare de „ochiuri" turbionare așa cum se arată în figura 1.1. Concret, noi am împărțit semianvergura într-un număr suficient de mare de intervale și fiecare bandă astfel determinată este divizată mai departe, în sensul corzilor, formîndu-se astfel o rețea de ochiuri dreptunghiulare. Fiecărei diviziuni i se atașează 2 indici : un indice I crește în sensul axei Ox (luată cu sensul pozitiv înspre aval), iar indicele J în sensul axei OY (luată ca de obicei în sensul anvergurii cu semnul pozitiv înspre extremitatea aripii).

Fără a restrînge generalitatea, presupunem fluidul incompresibil, caz în care ne putem situa întotdeauna printr-o transformare Glauert; ecuațiile de bază pentru determinarea circulațiilor Γ se vor putea scrie sub forma

$$P_0 \cdot \Gamma(x,\ y) + \Big\{ - \Gamma(x, y) \cdot P_0 + \sum_{x_1} \sum_{y_1} [\Gamma\ (x_1,\ y_1 - $$

$$- \Gamma(x_1', y_1)] \cdot Q(x - x_1,\ \ y - y_1) \Big\}^{1)} = W(x, y), \qquad (1.1)$$

unde prin P_0 s-a notat viteza indusă de ochiul turbionar de intensitate unitară în centrul său (x, y); $W(x,y)$ este viteza normală pe aripă, în centrul ochiului (x,y). Matricea $W(x,y)$ reprezintă condițiile la limită pe aripă. Prin x_1' s-a notat în (1.1) abscisa centrului ochiului anterior ochiului (x_1, y). Este indicat ca numărul de diviziuni în coardă să fie independent de secțiunea (J).

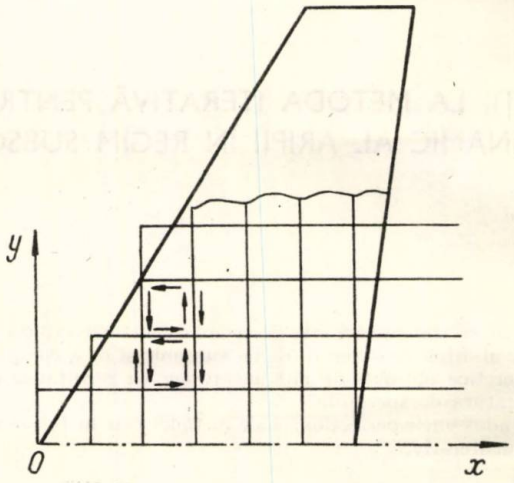


Fig. 1.1.

Nucleul Q, după cum se vede, depinde numai de diferențele dintre coordonate: $x - x_1$, respectiv $y - y_1$, ceea ce constituie un avantaj însemnat. Nucleul Q $(x - x_1, y - y_1)$ reprezintă viteza indusă în (x, y) de către o potcoavă turbionară semiinfinită de intensitate unitară și a cărei latură anterioară coincide cu latura anterioară a ochiului dreptunghiular (x_1, y_1)[1].

Procedeul iterativ a fost expus în [1] și anume: în prima iterație se presupune că termenii închiși în acoladă în partea stîngă a ecuației (1.1) sînt nuli și se determină circulațiile din ecuațiile cu termenii rămași, adică

$$\Gamma^{(1)}(x, y) = \frac{W(x, y)}{P_0}, \tag{1.2}$$

valorile $\Gamma^{(1)}$ astfel obținute se introduc în termenii respectivi cuprinși în acolada menționată și se calculează Γ în a doua aproximație

$$\Gamma^{(2)}(x, y) = \frac{W(x, y)}{P_0} - \left\{ \quad \right\}^{(1)} \tag{1.3}$$

și a.m.d.

---

[1]). Pentru probleme simetrice sau antisimetrice domeniul aripii se înlocuiește cu domeniul unei semiaripi, cu modificări evidente ale definiției nucleului Q.

1.2. NUCLEUL Q (1,5)

Nu este indicat ca pentru calculul nucleelor $Q(x,y)$ să se aplice, de cîte ori este nevoie, pe tot parcursul calculului iterativ, formulele Biot-Savart. Aceasta ar lungi foarte mult durata calculelor. De aceea noi am indicat înregistrarea valorilor nucleului $Q(M, N)$ pentru suficient de multe valori ale indicilor M, N.

Corespondența între indicii M, N și coordonate este următoarea (fig. 1.2):

$$\eta = N - 1,$$

$$\xi = M - 1/2. \tag{1.4}$$

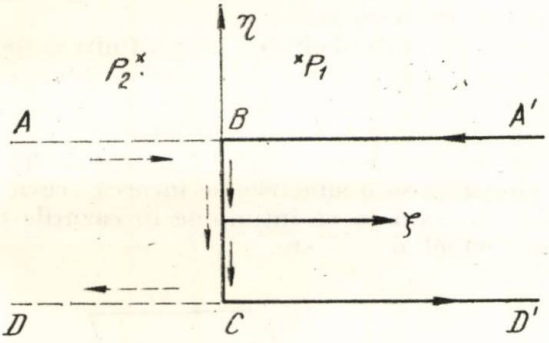


Fig. 1.2.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM 1948

Din motive de simetrie, se observă că înregistrarea în memoria calculatorului nu trebuie făcută decît în semiplanul $\eta > 0$. Mai mult, vom arăta că de fapt ajunge numai cadranul $\xi > 0$, $\eta > 0$. Într-adevăr, viteza indusă de o potcoavă în punctul P_2 (ξ_2, η_2) se poate calcula în funcție de viteza indusă în punctul P_1 din primul cadran, simetricul punctului P_2 față de axa $O\eta$ $(\xi_2 = -\xi_1, \eta_1 = \eta_2 = \eta)$ și anume,

$$Q(\xi_2, \eta) = P(\eta) - Q(\xi_1, \eta), \tag{1.5}$$

unde prin $P(\eta)$ s-a însemnat viteza indusă de vîrtejurile AA', DD', infinite în ambele sensuri. Singura complicație, de altfel neînsemnată pentru memoria calculatorului, este înregistrarea și a vectorului $P(N)$, în afară de matricea $Q(M, N)$.

Valorile maxime ale indicilor M și N se vor lua suficient de mari, corespunzătoare valorilor maxime ale diferențelor coordonatelor care intervin pe aripă (ecuația 1.1.), luate în valoare absolută.

În urma aplicațiilor făcute s-a observat că este util în general ca abscisele x, x_1, ξ să fie măsurate cu un etalon E convenabil, diferit de cel folosit pe axa y.

Spre a evita încărcarea inutilă a memoriei calculatorului, în special în cazul alegerii unui etalon mic, pe x, nu se vor înregistra valorile nucleului din etalon în etalon, ci, la distanţe mari de latura finită a potcoavei turbionare, se vor da valori mai rare ale nucleului, de exemplu din 3 în 3 etaloane, din 5 în 5 etc. La distanţe intermediare se va lua valoarea înregistrată cea mai apropiată. Avînd în vedere că acţiunea potcoavei turbionare scade rapid cu distanţa, erorile care se introduc prin această „rotunjire" sînt neglijabile.

1.3. POTCOAVE TURBIONARE OBLICE

După cum s-a remarcat în [2], numărul de diviziuni în anvergura se poate micşora dacă în cazul aripilor în săgeată se consideră potcoave turbionare ale căror laturi finite nu sînt paralele cu axa y ci au direcţii variabile, convergînd cu direcţiile de efilare ale aripii către extremităţi. Prin aceasta, autorul lucrării citate renunţă la avantajul nucleului funcţie numai de diferenţe ale coordonatelor.

Noi am observat însă că oblicitatea laturii finite a potcoavei turbionare nu are importanţă decît la bordul de atac şi de aceea se pot considera toate potcoavele egale, avînd laturile lor finite paralele cu bordul de atac, diferind între ele numai printr-o translaţie (fig. 1.3). În consecinţă, nucleul respectiv rămîne mai departe funcţie numai de diferenţa coordonatelor. Evident, pierzîndu-se o simetrie, se încarcă ceva mai mult memoria calculatorului dar fără să se întîmpine în cazurile practice nici o dificultate din acest punct de vedere.

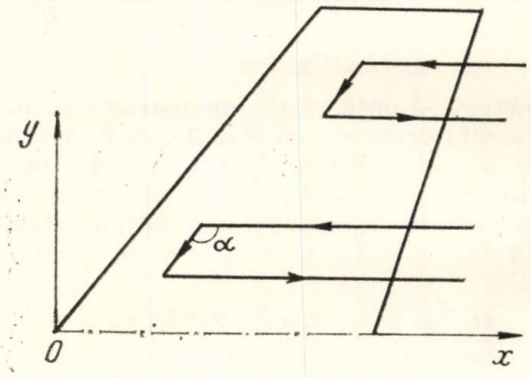


Fig. 1.3.

Dealtfel, considerarea potcoavelor turbionare drepte, produce în general abateri mici şi acestea, numai aproape de extremităţile aripii.

În cazul aripilor cu bord de atac curb, şi dacă se folosesc potcoave oblice, se va lua pentru laturile finite, o direcţie convenabilă, de preferinţă paralelă cu direcţia bordului de atac, din vecinătatea extremităţii aripii. Oricum, nu există serioase dificultăţi de programare nici în cazul folosirii a două sau trei familii de nuclee cu direcţii convenabile ale laturilor finite. Cîştigul în precizie este însă nesemnificativ.

1.4. STRUCTURA NUCLEULUI. AȘEZAREA POTCOAVELOR TURBIONARE PE ARIPĂ

Pentru calculul nucleului se folosește formula lui Biot-Savart, aplicată la fire turbionare. Astfel, inducția unui segment de vîrtej $\overrightarrow{AB}$ de intensitate Γ într-un punct P va fi dată într-o formă convenabilă de expresia

$$V_P = \frac{\Gamma}{4\pi}\left[\frac{X_2 + Y_2 \operatorname{tg}\alpha}{R_2(X_2 \operatorname{tg}\alpha - Y_2)} - \frac{X_1 + Y_1 \operatorname{tg}\alpha_0}{R_1(X_1 \operatorname{tg}\alpha - Y_1)}\right], \tag{1.6}$$

unde

$$\begin{aligned} X_1 &= X_A - X_P, & X_2 &= X_B - X_P, \\ Y_1 &= Y_A - Y_P, & Y_2 &= Y_B - Y_P, \\ R_1 &= \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}, & R_2 &= \sqrt{X_2^2 + Y_2^2}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Segmentul de vîrtej AB este presupus în planul XOY, iar α_0 este unghiul pe care-l face vîrtejul cu axa OX cu sensul de rotație direct XOY:

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}.$$

Viteza $\overline{V}_P$ este normală pe planul XOY, sensul pozitiv fiind cel corespunzător unui triedru drept $OXYZ$.

Formula de mai sus va trebui să fie aplicată succesiv la cele două fire turbionare semiinfinite, paralele cu axa OX și la segmentul turbionar de lungime finită, și apoi să se însumeze rezultatele.

Notînd cu X, Y diferențele dintre coordonatele punctului P și cele ale mijlocului segmentului turbionar de lungine finită ale potcoavei se obține pentru o potcoavă standard, de intensitate turbionară unitară și o distanță unitară între ramurele infinite,

$$N(x, y) = -\frac{E_1}{(R_1+1)\cdot Q} + \frac{E_2}{(R_2+1)\cdot R} + \frac{E_2 \operatorname{tg}\alpha + R}{R_2(E_2 - R\operatorname{tg}\alpha)} + \frac{E_1 \operatorname{tg}\alpha + Q}{R_1(-E_1 + Q \operatorname{tg}\alpha)}, \tag{1.8}$$

unde

$$\begin{aligned} E_1 &= X - 0{,}5 \operatorname{tg}\alpha, & Q &= Y - 0{,}5, \\ E_2 &= X + 0{,}5 \operatorname{tg}\alpha, & R &= Y + 0{,}5, \\ R_1 &= \sqrt{E_1^2 + Q^2}, & R_2 &= \sqrt{E_2^2 + R^2}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Cu α s-a notat înclinarea laturii finite a potcoavei turbionare față de axa OX.

O atenție deosebită trebuie să se dea situării potcoavelor turbionare pe aripă astfel ca nici un punct de control (în care se va cere verificarea ecuațiilor liniare de bază) să nu fie coliniar cu una din laturile finite ale potcoavelor. În caz contrar valoarea nucleului ar deveni infinită, conform formulelor Biot-Savart. În acest scop, în programarea noastră, am afectat absciselor centrelor laturilor finite ale potcoavelor paralele numai numere întregi, multiple de etalonul ales pe OX. În schimb, abscisele punctelor de control diferă de un număr întreg, cu 0,5. În cazul potcoavelor turbionare oblice condiția de mărginire a vitezelor induse este satisfăcută după cum se poate verifica ușor, dacă tangența unghiului α, ales pentru înclinarea laturilor finite ale potcoavelor, și etaloanele alese E_x, respectiv pe axa OX și OY, satisfac relația

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_x L_x}{E_y L_y},$$

în care L_x și L_y sînt numere întregi.

Semianvergura aripii a fost împărțită într-un număr de intervale egale (8 la 16). În ceea ce privește distribuția potcoavelor în coardă, programarea permite considerarea unor intervale oarecare, egale sau nu.

Punctele de control s-au luat aproximativ la mijlocul distanței între laturile finite a două potcoave turbionare consecutive în sensul corzii.

Aceasta se poate face, conform celor discutate mai sus, cu o abatere maximă de o jumătate de etalon. Abaterea e nulă în cazul cînd se aleg numere impare pentru abscisele laturilor finite ale potcoavelor.

1.5. EXTRAPOLAREA DATELOR ITERATIVE

Numărul iterațiilor necesare pentru obținerea unei precizii impuse, cu același număr de ecuații considerate, poate fi sensibil micșorat prin procedeul extrapolării rezultatelor obținute pe un număr suficient de mare de iterații. Într-adevăr, noi am arătat că în cazul ecuațiilor liniare (1.1) asociate aripilor subsonice, procedeul iterativ este convergent. Pe de altă parte [3], în condiții foarte generale, se arată că fiind date trei iterații consecutive N, $N+1$, $N+2$ aplicate unui sistem de ecuații liniare în felul indicat mai sus și matricele corespunzătoare ale necunoscutelor $\{x_i\}_N$, $\{x_i\}_{N+1}$, $\{x_i\}_{N+2}$ rapoartele

$$\frac{x_i(N+2) - x_i(N+1)}{x_i(N+1) - x_i(N)}, \tag{1.10}$$

unde x_i este oricare din necunoscutele sistemului, tind către o limită comună q cînd $N \to \infty$. Cu alte cuvinte începînd cu un rang N, suficient de mare, seriile ale căror termeni generali sînt diferențele între valorile necunoscutei corespunzînd la două iterații succesive, pot fi aproximate

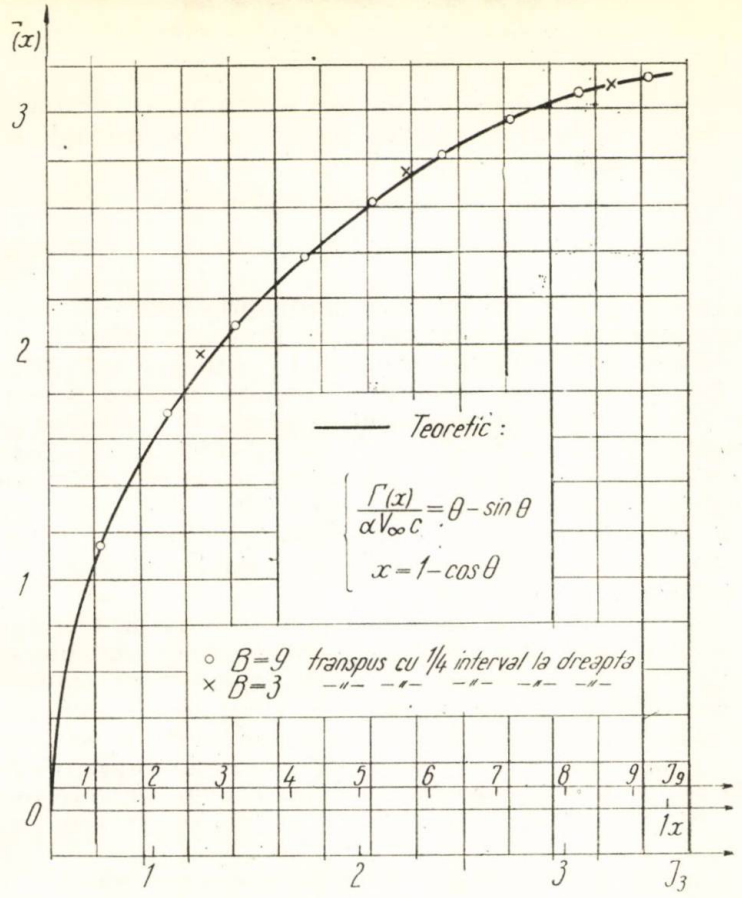

Γ(x)
3
2
1
0
Teoretic :
Γ(x) / αV∞c = θ − sin θ
x = 1 − cos θ
○ B=9 transpus cu 1/4 interval la dreapta
× B=3 −"− −"− −"− −"− −"−
1 2 3 4 5 6 7 8 9 J9
1x
1 2 3 J3

Fig. 1.4.

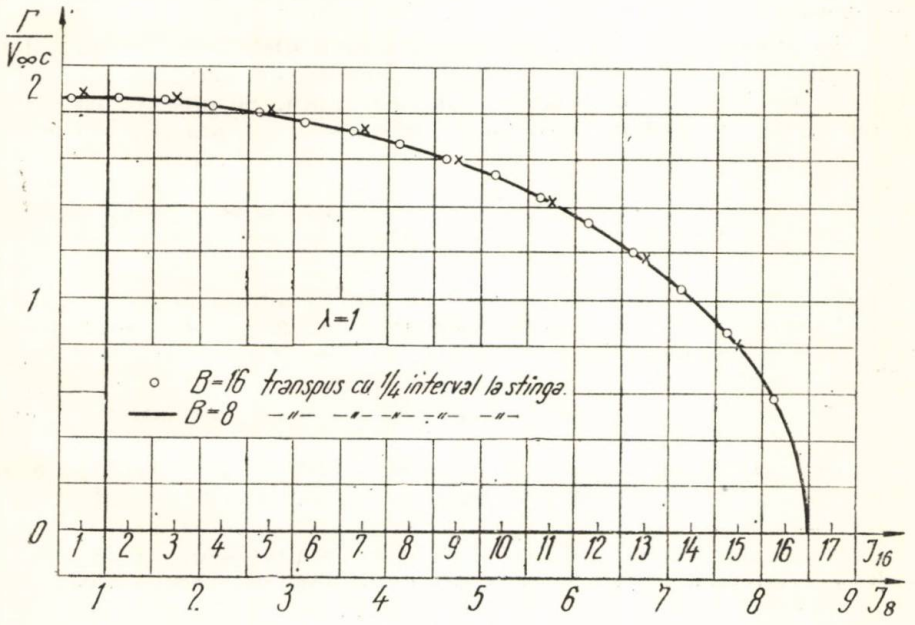

Γ / V∞c
2
1
0
λ=1
○ B=16 transpus cu 1/4 interval la stînga.
B=8 −"− −"− −"− −"− −"−
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 J16
1 2 3 4 5 6 7 8 9 J8

Fig. 1.5.

printr-o progresie geometrică [1]). Noi am constatat, cu ocazia aplicațiilor ce le-am făcut că numărul iterațiilor poate fi redus, prin aplicarea acestui procedeu de extrapolare, cu circa 70%.

1.6. PRECIZAREA PUNCTELOR ÎN CARE CIRCULAȚIILE AU VALORILE CALCULATE

Conform schemei turbionare adoptate, prin care se reprezintă distribuția reală, apare evident o incertitudine în ceea ce privește punctul din interiorul fiecărui ochi căruia trebuie să-i atribuim valoarea calculată. Într-adevăr, prin schema turbionară adoptată, variația potențialelor pe aripă se face în trepte, în interiorul fiecărui ochi turbionar, potențialul fiind constant. Noi am constatat că în sensul corzilor, valoarea circulației calculate trebuie să fie atribuită unui punct situat la 3/4 din pasul rețelei pe coardă, înspre aval și nu punctului median. Aplicarea acestei reguli la calculul caracteristicilor aerodinamice (în special a momentului de tangaj), duce la micșorarea numărului diviziunilor în coardă și deci, la scurtarea duratei la calculator.

Ca o exemplificare se arată în figura 1.4 variația teoretică a circulației $\Gamma(x)$ (în jurul unei aripi dreptunghiulare de alungire infinită, în comparație cu valorile obținute la calculator corespunzător împărțirii corzii în trei intervale (punctele marcate cu triunghiuri), respectiv 9 intervale (cerculețe). Plasarea acestor puncte, calculate, a fost făcută după regula dată mai sus. Se observă că, chiar în cazul împărțirii corzii în trei intervale egale ($B = 3$), acordul cu valorile teoretice este surprinzător de bun. Fără îndoială că regula menționată mai sus nu este decît aproximativă.

Noi am observat o regulă similară în ceea ce privește distribuția în anvergură și anume punctul căruia i se asociază valoarea calculată a potențialului se va afla la 3/4 din pasul ochiului în sensul avergurii, către axa aripii.

În figura 1.5 se dă spre exemplificare distribuția circulațiilor la bordul de fugă al unei aripi dreptunghiulare de alungire 1, calculată succesiv cu 8 și 16 diviziuni în semianvergură. Se observă că dacă se aplică regula menționată, cele două curbe corectate, practic, se confundă.

1.7. PROCEDEU GENERAL DE EXTRAPOLARE CĂTRE NUMĂR INFINIT DE DIVIZIUNI

Procedeul indicat mai sus este aplicabil numai aripilor subțiri cu schelet plan și în special pentru problema simetrică corespunzătoare calculului pantei coeficientului de portanță, cu necesitatea verificării condiției lui Jukovschi.

Pentru alte cazuri recomandăm să se aplice următorul procedeu general de extrapolare.

Fie un interval $\mathcal{D}$ pe care vrem, de exemplu, să se verifice o ecuație diferențială. Pentru soluționarea numerică se împarte intervalul $\mathcal{D}$ într-un

[1]) În cazul existenței unei soluții dominante a ecuației caracteristice asociate sistemului de ecuații liniare, soluția dominantă este chiar rația progresiei geometrice limită.

număr finit n_1 de intervale egale L_1 şi printr-un sistem adecvat de calcul cu diferenţe finite obţinem valorile aproximative ale funcţiei căutate f în centrele celor n_1 intervale. Apoi, prin interpolări convenabile vom avea valorile $f_i^{(1)}$ ale funcţiei pe o mulţime finită de puncte P_i ale intervalului $\mathcal{D}$, mulţime aleasă independent de diviziunile n_1.

Fie, mai departe, f_i (0) valorile exacte ale funcţiei căutate în aceleaşi puncte standard P_i. Presupunînd că aceste valori exacte s-ar obţine numeric dacă s-ar putea considera un număr infinit de intervale infinit mici, vom putea admite mai departe următoarea dezvoltare :

$$f_i(L) = f_i(0) + a_{i1} L + a_{i2} L^2 + \ldots \tag{1.11}$$

Dacă intervalele considerate în problemă sînt suficient de mici, este suficient să păstrăm numai partea liniară, adică,

$$f_i(L) = f_i(0) + a_{i1} L. \tag{1.12}$$

Efectuînd deci două rezolvări $f_i^{(1)}$ şi $f_i^{(2)}$ putem din două ecuaţii (1.12) să deducem a_{i1} şi f_i (0) :

$$f_i(0) = \frac{f_1 L_2 - f_2 L_1}{L_2 - L_1} \tag{1.13}$$

sau

$$f_i(0) = \frac{f_1 n_1 - f_2 n_2}{n_1 - n_2}. \tag{1.14}$$

Pentru a aplica o corecţie cvadratică, va trebui să dispunem de trei rezolvări corespunzătoare unor intervale diferite L_1, L_2, L_3. Prin calcule simple se deduce o formulă mai generală decît (1.14). În general însă, extrapolarea liniară este suficientă.

La problemele bidimensionale, cum este cazul aripilor noastre, se va putea face extrapolări în raport cu ambele coordonate, aplicînd o dezvoltare liniară de formă

$$f_i(L, M) = f_i(0,0) + a_i L + b_i M, \tag{1.15}$$

unde prin L şi M s-a întocmit mărimea intervalelor folosite pe axa x, respectiv y. Este evident că în situaţia aceasta, pentru extrapolare este nevoie să se calculeze problema de trei ori corespunzător unor intervale diferite (L_1, M_1); (L_2, M_2), (L_3, M_3), astfel încît să avem necunoscutele f_i (0,0); a_i şi b_i. Aceste rezolvări repetate duc în general, la un volum de calcul mult mai mic decît în cazul folosirii unei singure reţele suficient de fine cu care s-ar ajunge la acelaşi grad de precizie.

Este evident, de asemenea, că extrapolări de felul celor expuse mai sus, sînt aplicabile şi la unele rezultate globale ca de exemplu coeficienţii aerodinamici căutaţi.

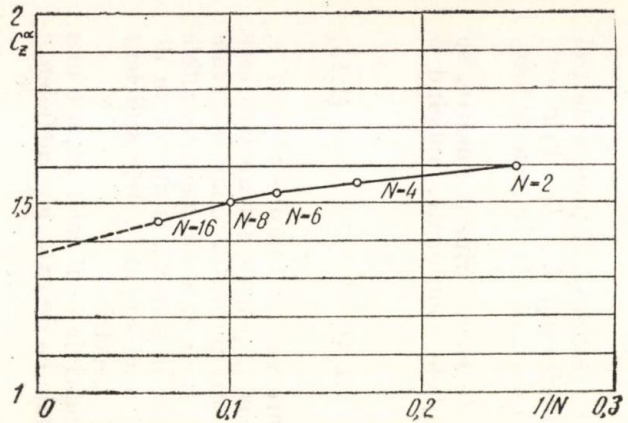


Fig. 1,6.

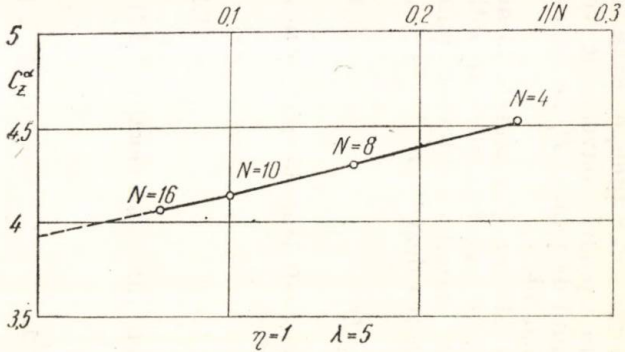


Fig. 1.7.

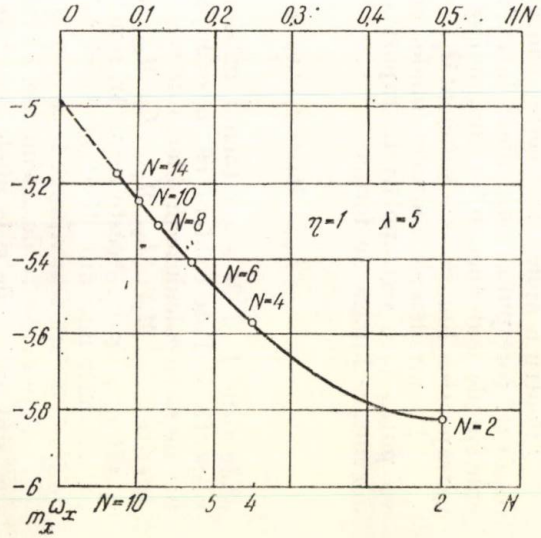


Fig. 1.8.

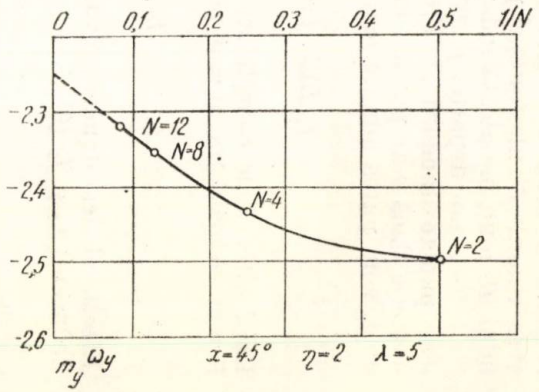


Fig. 1.9.

Pentru exemplificare, am corectat unele diagrame date în [2] aplicînd extrapolări față de numărul diviziunilor în anvergură.

Pe figura 1.7. s-a reprezentat astfel variația pantei coeficientului de portanță cu mărimea pasului $1/n$ în anvergură, conform valorilor date în [2] la pagina 172, corespunzător unei aripi dreptunghiulare de alungire $\lambda = 1$. Valoarea dată la pagina 176 a aceleiași lucrări a fost de aproximativ 1.55 în timp ce valoarea extrapolată rezultă 1.4. În figura 1.7 s-a reprezentat variația aceluiași coeficient aerodinamic, dar pentru o aripă dreptunghiulară de alungire 5. Se vede că valoarea extrapolată este 3,92 în timp ce valoarea dată în [2], p. 176, este de aproximativ 4,07.

Pe figura 1.8 s-a reprezentat derivata coeficientului de moment de ruliu $m_x^{\omega_x}$ a aceleiași aripi în raport cu viteza unghiulară de ruliu așa cum s-a definit în [2], în funcție tot de mărimea pasului rețelei în anvergură. Corecția rezultată este ceva mai însemnată și anume : valoarea extrapolată rezultă din figură de circa 4,87 în timp ce valoarea corespunzătoare celei date în [2] la pagina 182 este de aproximativ 5,5. Aici pare să fie și o inadvertență a autorului citat deoarece există o contradicție între valoarea aceluiași parametru luat din diagrama corespunzătoare de la pagina 182 și cu aceea care rezultă din diagrama de la pagina 174 (diagrama 4).

Pe figura 1.9 se arată extrapolarea făcută derivatei coeficientului de moment de tangaj în raport cu viteza unghiulară de tangaj.

Figurile 1.6, 1.7 și 1.8, 1.9 arată, de asemenea, variații care confirmă ipoteza posibilității dezvoltării după mărimea pasului rețelei și că în mod practic, dacă nu se consideră rețele prea grosiere, este suficient să se aplice numai extrapolarea liniară.

2. UNELE APLICAȚII

Am aplicat metoda [1]), la o varietate mare de aripi avînd diferite alungiri și forme.

Dintre acestea vom da mai jos, în special, rezultatele obținute privind o familie de aripi dreptunghiulare și o familie de aripi trapezoidale cu o săgeată $\chi = 45°$ și de diverse alungiri.

Caracteristicile obținute (derivata coeficientului de portanță, focarele, momentele de ruliu) au fost comparate atît cu rezultatele obținute de Beloțerkovski, cît și cu unele rezultate experimentale [2].

Se dau duratele consumate la calculator și numărul de iterații necesare pentru abateri relative sub o miime. Pentru o mai bună comparație cu alte rezultate nu s-au operat extrapolări cu pasul rețelei în anvergură.

2.1. ARIPI DREPTUNGHIULARE

Alungirile considerate au fost $\lambda = 1\,;\ 1{,}5\,;\ 2\,;\ 2{,}5\,;\ 4\,;\ 5\,;\ 8\,;$ și ∞. În figura 2.1. se compară valorile găsite de noi cu cele obținute în [2] pentru panta coeficientului de portanță.

---

[1]) Eleonora Mălaiu ne-a ajutat cu deosebită competență la întocmirea programelor de calcul pentru care îi aducem mulțumiri și pe această cale.

Calculele s-au făcut pe baza unei scheme turbionare cu 5 intervale în coardă şi 16 în semianvergură. În acelaşi timp s-au calculat distribuţiile circulaţiilor în planul aripilor calculîndu-se mai departe focarele parţiale (X_p) şi C^{α}_{zL} (local) corespunzînd celor 16 secţiuni în semianvergură.

În figura 2.2 se reprezintă valorile noastre pentru abscisele adimensionale ale focarelor în comparaţie cu cele calculate în [2].

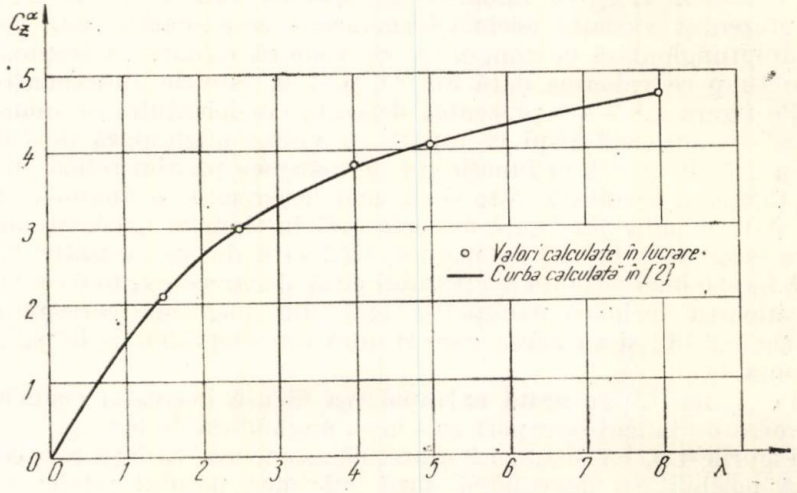


Fig. 2.1.

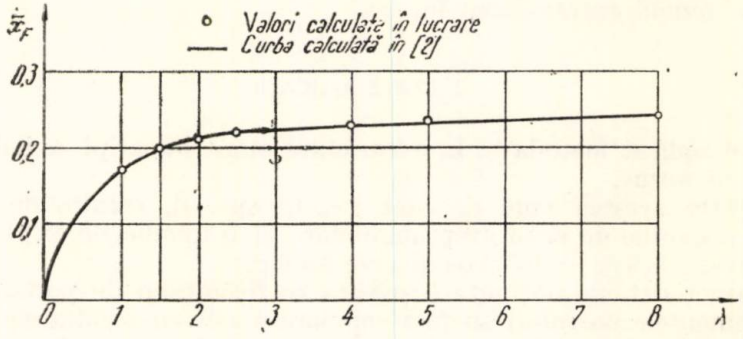


Fig. 2.2.

S-au comparat mai departe valorile coeficienţilor de ruliu calculate cu metoda de faţă, cu cele date în [2].

Coeficientul de moment C_M a fost definit prin relaţia

$$M_x = \rho S V_\infty^2 \cdot B \cdot C_M, \tag{2.1}$$

unde S este suprafaţa aripii şi B semianvergura.

În figura 2.3 s-au marcat valorile calculate de noi (cerculeţe) pentru derivata de stabilitate,

$$\frac{dC_M}{d\left(\frac{\omega_x B}{V_\infty}\right)}. \tag{2.2}$$

Prin ω_x s-a notat viteza unghiulară de ruliu.

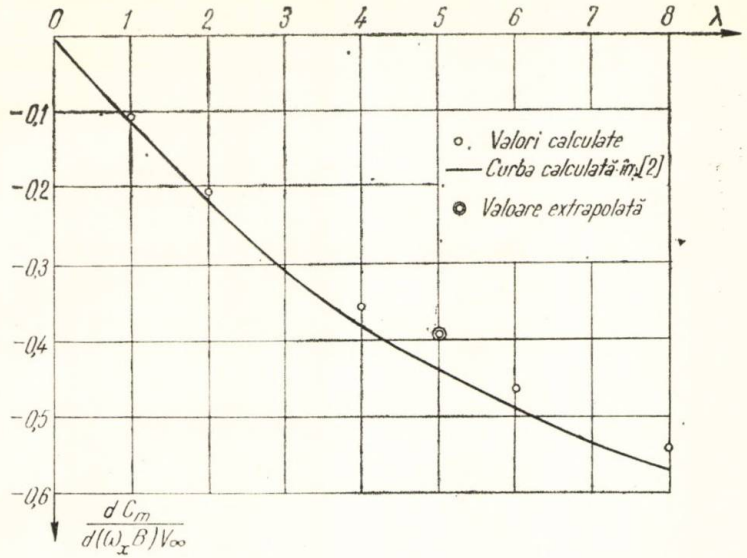


Fig. 2.3.

Se constată că valorile acestui parametru sînt ceva mai mici decît cele date în [2]. După cum s-a văzut însă mai sus (fig. 1.8) sînt motive să credem că prin aplicarea extrapolării valorile se vor micşora şi mai mult.

Pentru calculul derivatei de stabilitate la ruliu programul la calculator s-a făcut luînd şapte intervale egale în coardă şi 16 intervale în semianvergură. Ca şi la C_z^α, calculatorul a afişat nu numai derivata de stabilitate la ruliu dar şi întreaga distribuţie a circulaţiilor pe aripă.

Durata medie consumată de calculator pentru o alungire a fost de şase minute. Numărul iteraţiilor necesare la alungirile 1, 2, 4, 6, au fost respectiv 15, 15, 17, 19.

2.2. ARIPI TRAPEZOIDALE

S-a considerat o familie de aripi trapezoidale avînd săgeata $\chi = 45°$, trapezoidalitate $\eta = 2$ şi diferite alungiri : 1 ; 1,5 ; 2,5 ; 5 ; 8. Programarea s-a făcut cu şapte intervale neegale a corzilor, (cu intervale mai mici în vecinătatea bordului de atac), şi 16 în anvergură. De asemenea, s-au făcut unele programări şi cu cinci intervale în coardă şi tot 16 în anvergură.

Figura 2.4 arată valorile calculate pentru C_z^α în comparaţie cu valorile din [2], iar figura 2.5 poziţia focarelor dată aşa cum se obişnuieşte, prin distanţa de la focar la bordul de atac al corzii medii aerodinamice raportată la coarda medie aerodinamică, C_{MA} definită la rîndul său prin

$$C_{MA} = \frac{\int_0^B c^2\,dy}{\int_0^B c\,dy}.$$

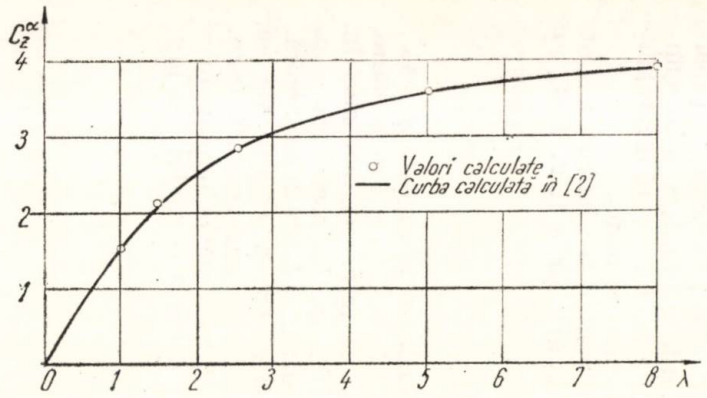


Fig. 2.4.

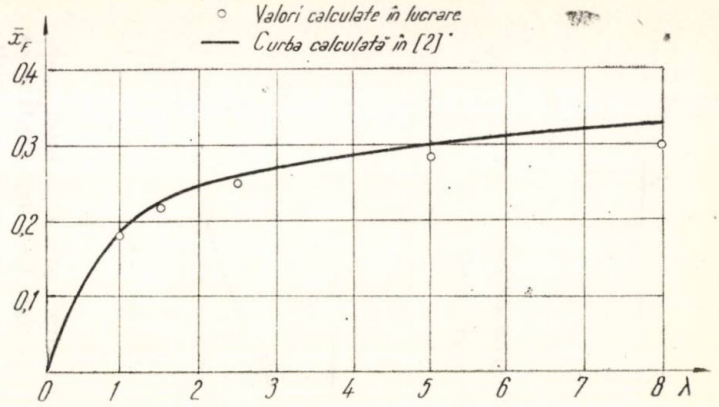


Fig. 2.5.

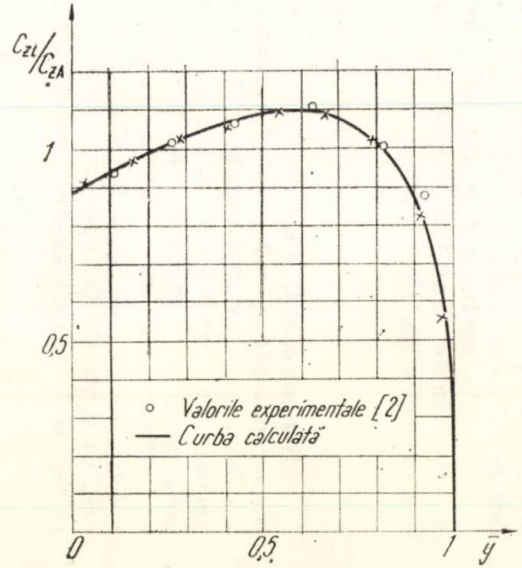


Fig. 2.6.

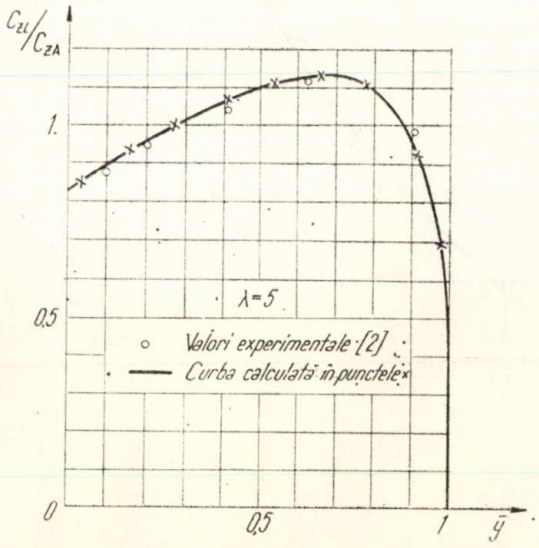


Fig. 2.7.

2.2.1. Comparație cu experiențe

Pentru alungirile $\lambda = 2{,}5$ și $\lambda = 5$ am reprezentat în figurile 2.6 și 2.7 variația parametrului $C_{zL}^{\alpha}/C_{zA}^{\alpha}$, în anvergură C_{zL}^{α} fiind derivata în raport cu incidența α a coeficientului de portanță local C_{zL} (în secțiunea J), iar prin C_{zA}^{α} derivata respectivă a coeficientului de portanță referitor la întreaga aripă.

După cum se vede acordul cu experiența este, de asemenea, satisfăcător.

3. CONCLUZII

După cum s-a văzut, rezultatele sînt în acord acceptabil atît cu alte rezultate teoretice, cît și cu rezultate experimentale.

Față de alte metode, metoda noastră prezintă următoarele deosebiri:

a) necunoscutele sînt circulațiile;

b) spre deosebire de [2], ecuațiile liniare au coeficienți care depind numai de diferența coordonatelor, de unde posibilitatea de a forma și înregistra în calculator, un nucleu redus;

c) se aplică procedeul iterativ de soluționare;

d) se indică aplicarea unei extrapolări a iterațiilor;

e) se indică aplicarea unei extrapolări spre intervale de rețea infinit mici.

Se înțelege că precizia de calcul crește odată cu mărirea numărului ecuațiilor. Durata la calculator crește de asemenea odată cu numărul ecuațiilor, dar prin metoda iterativă, a cărei convergență a fost dovedită de noi, teoretic în [1] și aplicativ în lucrarea prezentă, creșterea duratei nu este atît de însemnată ca în cazul rezolvării directe a ecuațiilor. Duratele la calculator sînt în general mici (aproximativ 6 pentru o alungire).

Extrapolarea iterațiilor duce la o reducere cu circa 70% a numărului de iterații.

Extrapolarea în raport cu pașii rețelei face posibil calculul cu rețele mai puțin fine ceea ce reduce mult durata la calculator pentru aceeași precizie dorită. Astfel, rezultă că rețelele cu 8—10 diviziuni în semianvergura sînt suficient de bune.

În legătură cu aceasta s-a arătat că diagramele date de S. M. Bielo-țerkovski [2] pot fi corectate simțitor.

Aplicarea metodei este simplă și unitară. Ea poate fi aplicată urmînd același procedeu, atît aripilor trapezoidale, cît și aripilor de contur oarecare, format din segmente de dreaptă sau curbe.

Se înțelege că, la fel ca oricare metodă bazată pe teoria liniară, metoda prezentă se aplică numai la unghiuri mici de incidență.

Primită la redacție la 7 ianuarie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. N. N. Patraulea, *Metode iterative pentru calculul aerodinamic al aripii subțiri în regim subsonic*, St. cerc. mec. apl., *1* (1972).
2. S. M. Bielo̧terkovski, *Central Aero Hydrodinamic inst*, Moscow, U.R.S.S., „The Theory of thin wings in subsonic flow", Translation Editor Morice Holt, Univ. of California Berkeley, Calif. Plenum Press, New York (1967).
3. R. A. Buckingham, *Numerical Methods*, London, 1957.

CÎTEVA ASPECTE INTERESANTE ALE MIȘCĂRILOR CONICE

de E. CARAFOLI și ȘT. STAICU
Institutul politehnic București

În această lucrare se studiază scurgerile supersonice în jurul unor „obstacole" sau „denivelări" delta. Aceste mișcări corespund unor compresiuni și respectiv unor expansiuni conice.
Alegînd cîteva exemple de mișcări simple sau mixte (expansiune-compresiune) se determină distribuțiile de presiuni și forma profilelor transversale ale denivelărilor. În continuare se studiază scurgerea în jurul aripii delta considerînd separația curentului la borduri, ca o aplicație a conceptului de pantă negativă.
Calculul distribuțiilor de presiuni și al profilelor transversale ale denivelărilor a fost efectuat cu ajutorul calculatorului electronic.

1. INTRODUCERE

Să considerăm un curent plan de viteză U_∞, deviat printr-o pantă pozitivă γ_0, corespunzînd astfel unei compresiuni (fig. 1*a*), sau printr-o

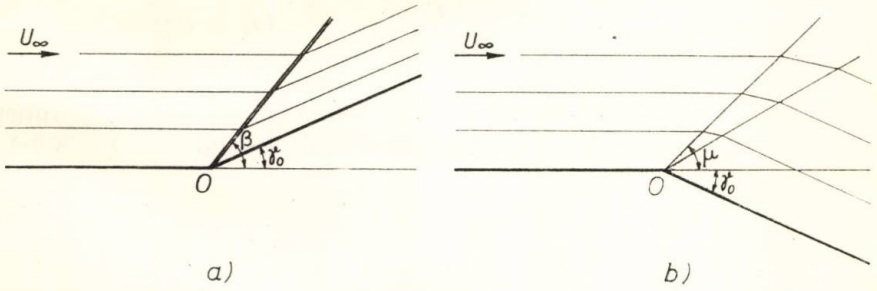


Fig. 1 *a*, *b*

pantă negativă $-\gamma_0$, corepunzînd unei expansiuni (fig. 1*b*). Mișcările plane corespunzătoare sînt bine cunoscute și constituie punctul de plecare al problemelor pe care le tratăm mai jos, privind mișcările tridimensionale.

În acest sens, vom considera într-un semiplan, cel superior, spre exemplu, un „obstacol" delta oarecare, avînd panta pozitivă γ_0 (fig. 2*a*), corespunzînd deci unei compresiuni, sau o „denivelare" tot de formă delta, avînd deci panta negativă $-\gamma_0$, care corespunde unei expansiuni conice (fig. 2*b*). Vitezele longitudinale de perturbaţie ale acestor mişcări sînt egale şi de sens contrar, iar valorile lor sînt perfect determinate, în ipoteza perturbaţiilor mici.

Deşi ne-am limitat la unele exemple simple, totuşi nu am micşorat generalitatea problemei. Astfel, putem considera o suprafaţă mai complexă, avînd şi pante pozitive şi pante negative (fig. 2*c*).

În cele ce urmează vom căuta tocmai să tratăm diferite aspecte ale unor astfel de mişcări, simple sau complexe.

2. EXEMPLE DE EXPANSIUNI ÎN JURUL DENIVELĂRILOR CONICE

Aceste mişcări se obţin din formulele care dau viteza axială de perturbaţie u pentru o aripă triunghiulară de grosimea simetrică, luînd semnul schimbat, adică expansiune în loc de compresiune. Această mişcare este valabilă într-un singur semiplan: fie semiplanul superior, fie semiplanul inferior.

Raportînd această „denivelare conică" la un sistem trirectangular $Ox_1x_2x_3$ (fig. 2*a*, *b*, *c*), vom defini în secţiunea $x_1 = 1$ sistemul de axe Oyz, avînd coordonatele y şi z date de relaţiile:

$$y = \frac{x_2}{x_1}, \quad z = \frac{x_3}{x_1}, \tag{1}$$

şi vom face următoarea transformare geometrică, similară cu cea a lui BUSEMANN

$$\eta = \frac{y}{1 - B^2z^2}, \quad \zeta = \frac{z\sqrt{1 - B^2(y^2 + z^2)}}{1 - B^2z^2} \quad (B = \sqrt{M_\infty^2 - 1}). \tag{2}$$

În planul $O\eta\zeta$, viteza de perturbaţie longitudinală u este o funcţie armonică; dacă notăm cu u' funcţia armonică asociată, vom construi o funcţie analitică

$$\mathfrak{U} = u + iu', \tag{3}$$

de variabilă complexă

$$x = \eta + i\zeta. \tag{4}$$

Pentru mişcările de care ne vom ocupa mai jos, o caracteristică importantă este aceea a salturilor de pantă, care au loc pe „muchii" radiale aşezate pe aripă, avînd anumite proprietăţi fundamentale în găsirea *funcţiei de viteză* $U(3)$.

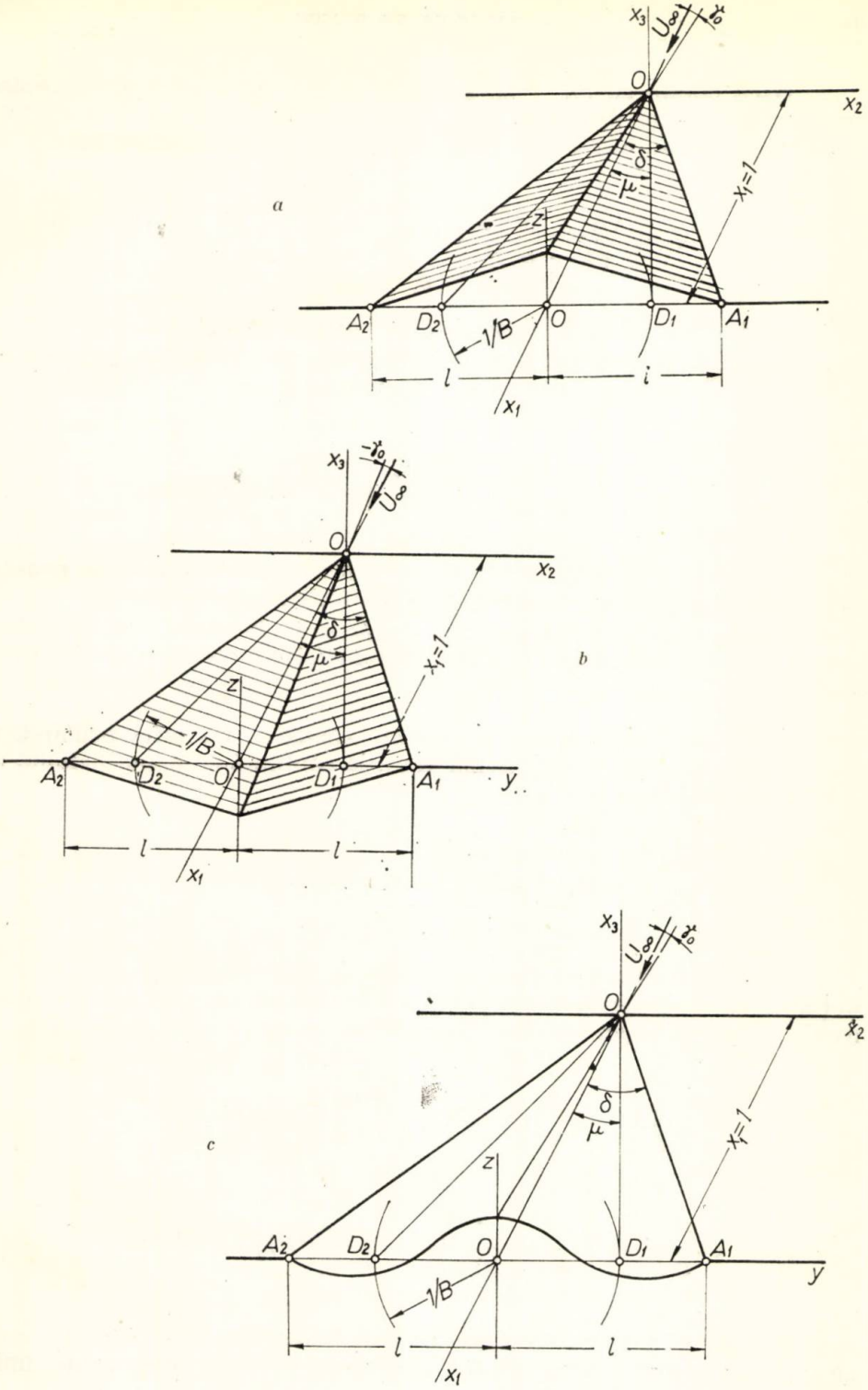

a
x_3
U_∞
γ_0
O
x_2
δ
μ
z
$x_1=1$
A_2
D_2
1/B
O
D_1
A_1
l
l
x_1
b
x_3
$-\gamma_0$
U_∞
O
x_2
δ
μ
z
$x_1=1$
1/B
A_2
D_2
O
D_1
A_1
y
l
l
x_1
c
x_3
U_∞
γ_0
O
x_2
δ
μ
z
$x_1=1$
A_2
D_2
O
D_1
A_1
y
1/B
l
l
x_1

Fig. 2 *a*, *b*, *c*

Dacă notăm cu $(\gamma_1 - \gamma_0)$ saltul de pantă într-un punct oarecare, contribuţia acestei pante în construcţia funcţiei de viteză U este dată de o sursă plasată în punctul considerat $y = s$, avînd intensitatea

$$Q = \frac{(\gamma_1 - \gamma_0)U_\infty}{\sqrt{1 - B^2 s^2}}\, s = (w_0 - w_1)\frac{s}{\sqrt{1 - B^2 s^2}}, \tag{5}$$

unde w_0 şi w_1 sînt vitezele verticale de o parte şi de alta a muchiei.

Dacă panta este continuu variabilă, atunci vom avea o relaţie similară cu cea de mai sus, într-un punct oarecare $y = \eta$:

$$\mathrm{d}Q = q(\eta)\,\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}w\,\frac{\eta}{\sqrt{1 - B^2\eta^2}}, \tag{6}$$

unde $q(\eta)$ este intensitatea sursei pe unitatea de lungime în punctul considerat, iar $\mathrm{d}w$ este variaţia vitezei verticale în acelaşi punct.

Aceste formule fundamentale se găsesc în lucrările noastre anterioare [1], [2] şi servesc pentru găsirea funcţiei de viteză U, definită mai sus (3).

Cazul unei denivelări triunghiulare simetrice. Ca prim exemplu se va considera o „denivelare" avînd variaţia continuă de pantă definită de următoarea repartiţie de surse :

$$q(\eta) = q_{10}\frac{|\eta|}{l} \qquad (-l \leqslant \eta \leqslant l). \tag{7}$$

Aplicînd metoda obişnuită a analogiei hidrodinamice şi rezultatele obţinute în lucrările anterioare [3], [4], vom putea scrie pentru viteza axială de perturbaţie, următoarea expresie

$$\mathfrak{u} = \frac{q_{10}l}{\pi}\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)\left(\cosh^{-1}\frac{1 - B^2 lx}{B(l - x)} + \cosh^{-1}\frac{1 + B^2 lx}{B(l + x)}\right) + \right. \tag{8}$$

$$\left. + \frac{x^2}{l^2}\cosh^{-1}\frac{1}{Bx} + \frac{1}{B^2 l^2}(1 - \sqrt{1 - B^2 l^2})\sqrt{1 - B^2 x^2}\right],$$

care corespunde unor viteze finite pe linia bordurilor. Prin acest exemplu am vrut să evităm viteza infinită care apare în cazul unei pante finite la bordul de atac subsonic.

Variaţia pantei γ sau a vitezei verticale w se deduce din (6) şi (7) şi are următoarea expresie

$$\gamma(\eta) = -\frac{w}{U_\infty} = \tag{9}$$

$$= -\frac{q_{10}}{2BlU_\infty}(B\eta\sqrt{1-B^2\eta^2} - Bl\sqrt{1-B^2l^2} + \cos^{-1}Bl - \cos^{-1}B\eta),$$

de unde rezultă o relaţie între constanta q_{10} şi panta de la centrul aripii

$$\frac{q_{10}}{U_\infty} = \frac{2Bl\gamma_0}{Bl\sqrt{1-B^2l^2} + \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}Bl}. \tag{10}$$

În cazul în care numărul MACH capătă valori mai mari, se poate întîmpla ca bordurile canalului conic să devină supersonice. În acest caz, viteza axială U, panta γ şi constanta q_{10}, se deduc din (8), (9) şi (10). Rezultă

$$\mathfrak{U}_{x<\frac{1}{B}} = \frac{q_{10}l}{\pi}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)\left(\cos^{-1}\frac{1-B^2lx}{B(l-x)} + \cos^{-1}\frac{1+B^2lx}{B(l+x)}\right) + \right. \tag{11a}$$

$$\left. + \frac{x^2}{l^2}\cosh^{-1}\frac{1}{Bx} + \frac{1}{B^2l^2}(1-\sqrt{B^2l^2-1})\sqrt{1-B^2x^2}\right],$$

$$\mathfrak{U}_{x>\frac{1}{B}} = \frac{q_{10}l}{2}\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right), \tag{11b}$$

$$\gamma_{x<\frac{1}{B}} = -\frac{q_{10}}{2BlU_\infty}(B\eta\sqrt{1-B^2\eta^2} - Bl\sqrt{B^2l^2-1} + \cosh^{-1}Bl - \cos^{-1}B\eta), \tag{11c}$$

$$\gamma_{x>\frac{1}{B}} = -\frac{q_{10}}{2BlU_\infty}(B\eta\sqrt{B^2\eta^2-1} - Bl\sqrt{B^2l^2-1} + \cosh^{-1}Bl - \cosh^{-1}B\eta), \tag{11d}$$

$$\frac{q_{10}}{U_\infty} = \frac{2Bl\gamma_0}{Bl\sqrt{B^2l^2-1} + \frac{\pi}{2} - \cosh^{-1}Bl}. \tag{11e}$$

Ţinînd seama de aceste rezultate, se poate calcula distribuţia de presiuni în ipoteza perturbaţiilor mici (fig. 3*a*, *b*)

$$C_p = -\frac{2u}{U_\infty}. \tag{12}$$

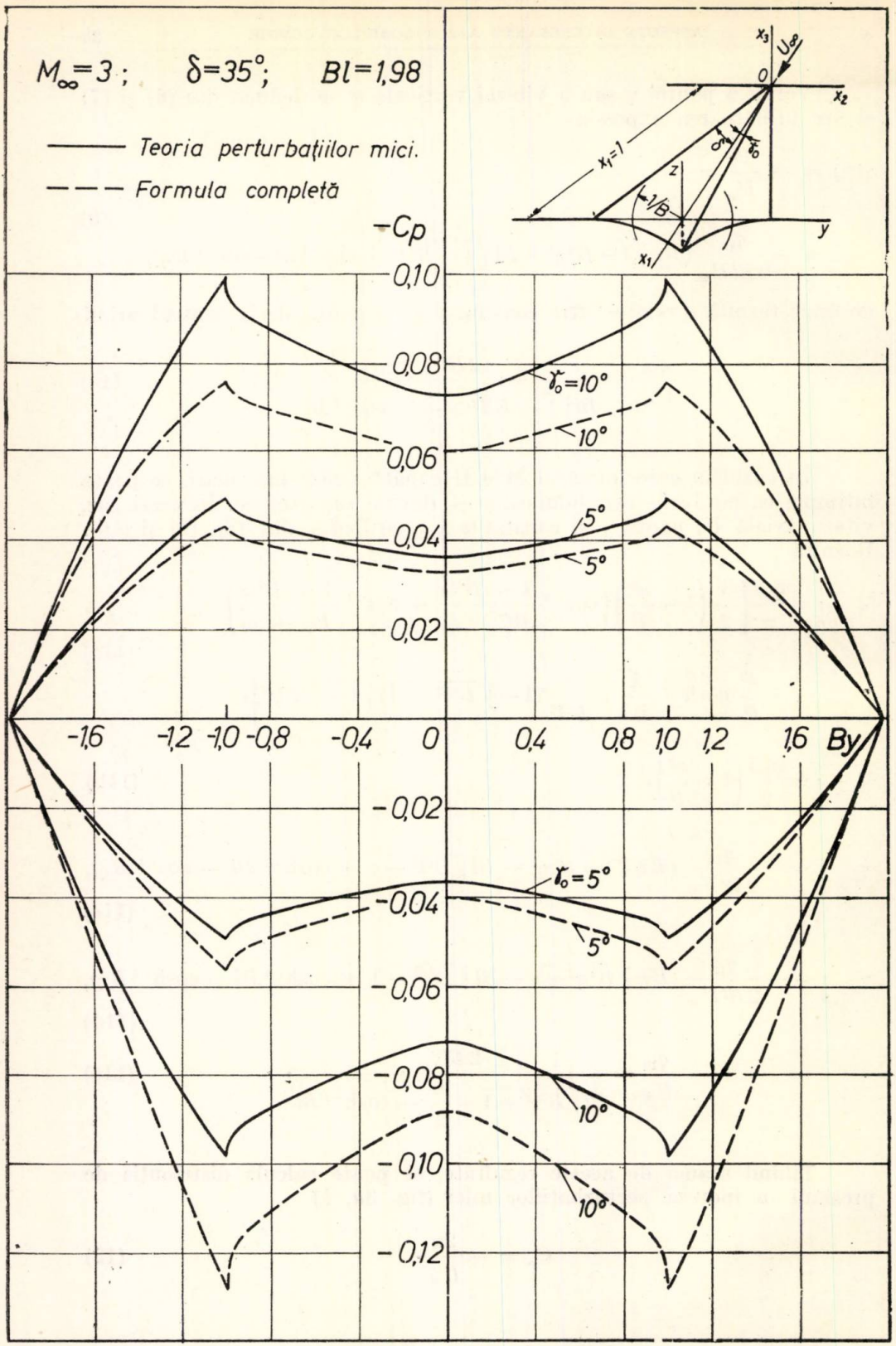

$M_\infty = 3$; $\delta = 35°$; $Bl = 1{,}98$
Teoria perturbațiilor mici.
Formula completă
$-Cp$
0,10
0,08
0,06
0,04
0,02
$\gamma_0 = 10°$
10°
5°
5°
-1,6 -1,2 -1,0 -0,8 -0,4 0 0,4 0,8 1,0 1,2 1,6 By
-0,02
-0,04
-0,06
-0,08
-0,10
-0,12
$\gamma_0 = 5°$
5°
10°
10°
x_3
U_∞
0
x_2
$x_1 = 1$
δ_0
γ_0
z
1/B
y
x_1

Fig. 3 *a*

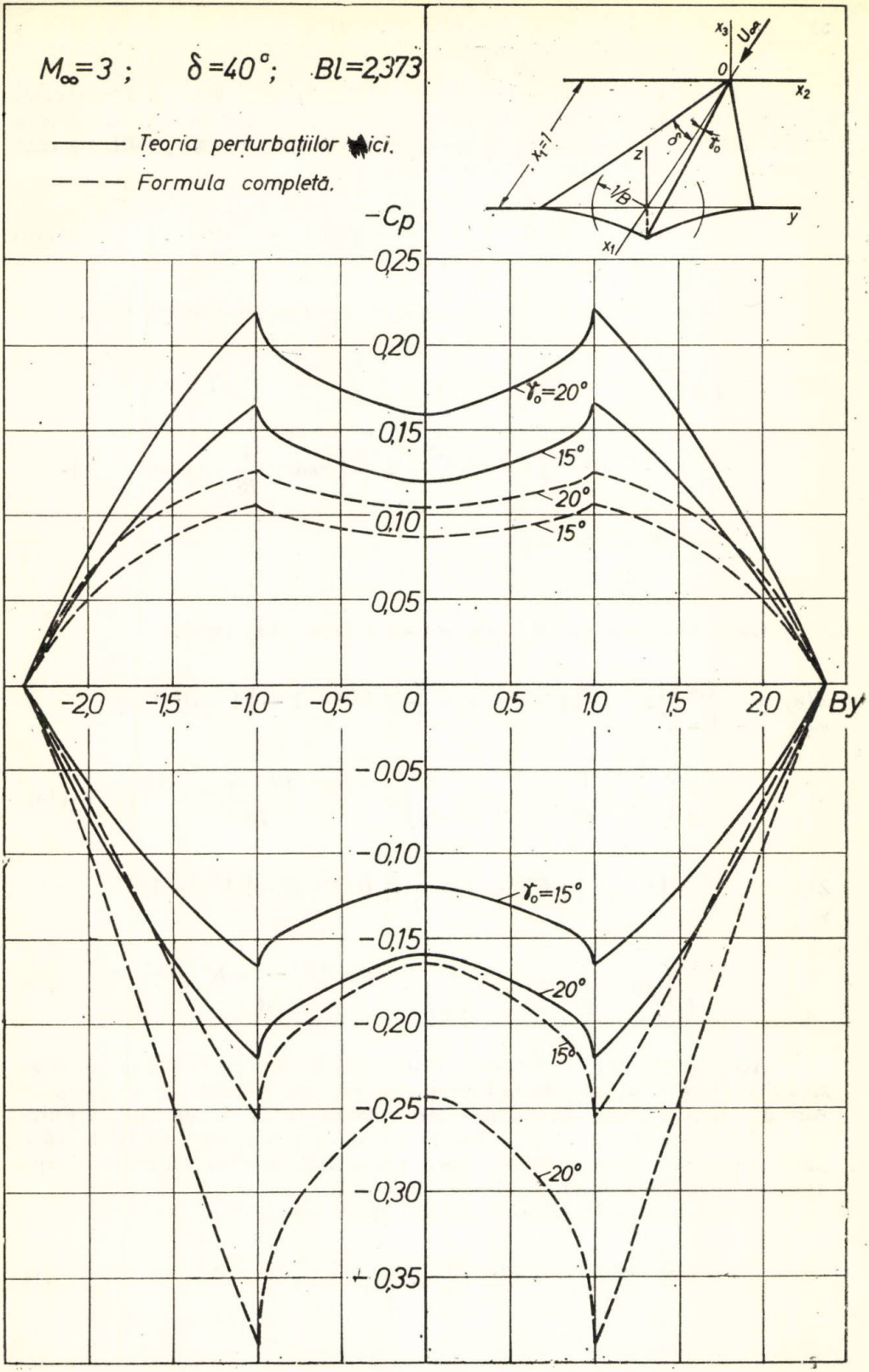

$M_\infty = 3$; $\delta = 40°$; $Bl = 2{,}373$
Teoria perturbațiilor liniei.
Formula completă.
$-C_p$
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
$\gamma_0 = 20°$
15°
20°
15°
-2,0
-1,5
-1,0
-0,5
0
0,5
1,0
1,5
2,0
By
-0,05
-0,10
-0,15
-0,20
-0,25
-0,30
-0,35
$\gamma_0 = 15°$
20°
15°
20°
x_3
U_∞
0
x_2
$x_1 = 1$
z
δ
γ_0
1/B
x_1
y

Fig. 3 *b*

Pornind de la relaţia (9) putem găsi mai întîi profilul transversal al suprafeţei conice care a fost considerată mai sus. Pentru aceasta vom utiliza ecuaţia lui w (sau γ) în funcţie de ecuaţia acestui profil, pe care o găsim într-o lucrare anterioară [1]

$$-\gamma = \frac{w}{U_\infty} = \frac{\partial Z(x_1, x_2)}{\partial x_1} = Z(y) - y\frac{dZ(y)}{dy}. \tag{13}$$

Prin metodele adecvate se găseşte ecuaţia profilului transversal

$$Z(y) = \frac{1}{x_1}\left(\int \frac{\partial Z(x_1, x_2)}{\partial x_1}\, dx_1 + f(x_2)\right) = \frac{1}{2}\frac{q_{10}}{U_\infty}\left[\left(1-\frac{y}{l}\right)\sqrt{1-B^2l^2} - \right.$$

$$-\frac{y}{l}\left(\sqrt{1-B^2l^2} - \sqrt{1-B^2y^2}\right) + 2\frac{y}{l}\left(\cosh^{-1}\frac{1}{Bl} - \cosh^{-1}\frac{1}{By}\right) -$$

$$\left. -\frac{\cos^{-1}Bl - \cos^{-1}By}{Bl}\right]. \tag{14}$$

Dacă bordurile devin supersonice relaţia (14) devine

$$Z(y)_{y<\frac{1}{B}} = \frac{1}{2}\frac{q_{10}}{U_\infty}\left[\left(1-\frac{y}{l}\right)\sqrt{B^2l^2-1} - \frac{y}{l}\left(\sqrt{B^2l^2-1} - \sqrt{1-B^2y^2}\right) + \right.$$

$$\left. + 2\frac{y}{l}\left(\cos^{-1}\frac{1}{Bl} - \cosh^{-1}\frac{1}{By}\right) - \frac{\cosh^{-1}Bl - \cos^{-1}By}{Bl}\right], \tag{15a}$$

$$Z(y)_{y>\frac{1}{B}} = \frac{1}{2}\frac{q_{10}}{U_\infty}\left[\left(1-\frac{y}{l}\right)\sqrt{B^2l^2-1} - \frac{y}{l}\left(\sqrt{B^2l^2-1} - \sqrt{B^2y^2-1}\right) + \right.$$

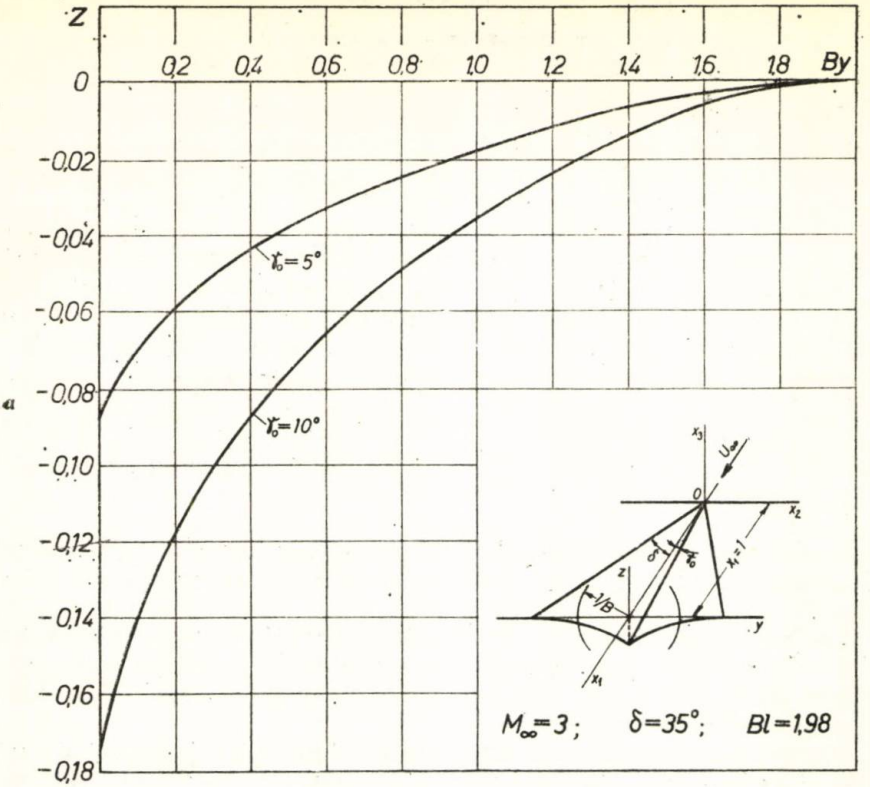
$$\left. + 2\frac{y}{l}\left(\cos^{-1}\frac{1}{Bl} - \cos^{-1}\frac{1}{By}\right) - \frac{\cosh^{-1}Bl - \cosh^{-1}By}{Bl}\right]. \tag{15b}$$

Acest profil (fig. 4*a*,*b*) poate fi aproximat cu o parabolă de un ordin superior. După cum am spus la început, am ales un exemplu de „expansiune conică" fără puncte singulare, care viteza u ar fi devenit infinită.

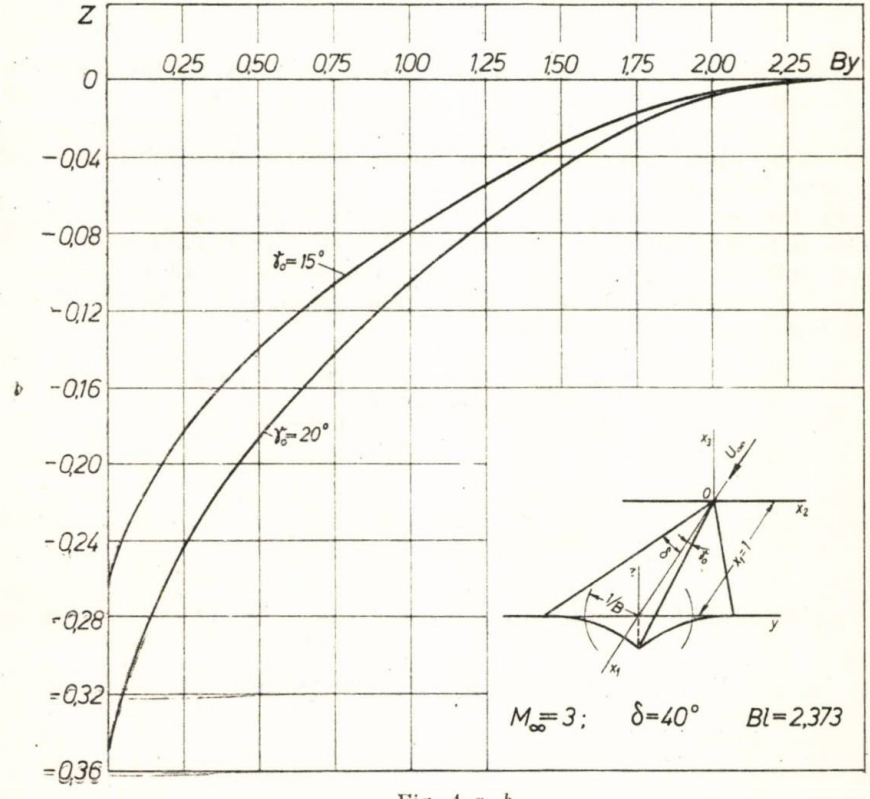
Este uşor de văzut mai departe că dacă facem ca l să tindă către infinit, obţinem atunci expansiunea plană PRANDTL-MAYER, în ipoteza perturbaţiilor mici.

Viteza axială de perturbaţie din acest caz devine

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{\gamma_0}{B}. \tag{16}$$


Z
By
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
0
-0,02
-0,04
-0,06
-0,08
-0,10
-0,12
-0,14
-0,16
-0,18
$\gamma_0 = 5°$
$\gamma_0 = 10°$
$M_\infty = 3$; $\delta = 35°$; $Bl = 1{,}98$

a


Z
By
0,25
0,50
0,75
1,00
1,25
1,50
1,75
2,00
2,25
0
-0,04
-0,08
-0,12
-0,16
-0,20
-0,24
-0,28
-0,32
-0,36
$\gamma_0 = 15°$
$\gamma_0 = 20°$
$M_\infty = 3$; $\delta = 40°$ $Bl = 2{,}373$

b

Fig. 4 *a*, *b*

Revenind la expresiile (11a), (11b) ale lui u, este cazul să arătăm că valoarea sa este pozitivă dar egală şi de sens contrar cu cea a unui obstacol de forma aripii delta de „grosime simetrică" (fig. 3).

Totuşi, pentru numere MACH mari ($M_\infty \gg 1$) sau pentru pante mai importante, este o deosebire între expansiunea datorită unei denivelări şi compresiunea pe aceeaşi formă de suprafaţă, însă inversată, care corespunde, de altfel, unei jumătăţi de aripă groasă simetrică.

Într-adevăr, am stabilit într-o lucrare anterioară [5], următoarea formulă a coeficientului de presiune C_p în funcţie de viteza axială de perturbaţie u, obţinută în ipoteza perturbaţiilor mici:

$$C_p = \frac{\gamma+1}{2} M_\infty^2 \left(\frac{u}{U_\infty}\right)^2 - 2\left(\frac{u}{U_\infty}\right)\sqrt{1+\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 M_\infty^4 \left(\frac{u}{U_\infty}\right)^2}. \tag{17}$$

Distribuţia de presiuni, calculată cu această formulă, s-a reprezentat în figura 3, pentru a se compara cu cea rezultată în ipoteza micilor perturbaţii.

Pentru compresiune $u < 0$; pentru expansiune $u > 0$. În valoare absolută C_p este mai mare pentru compresiune decît pentru expansiune. În cadrul formulei de mai sus, avem o „expansiune conică", dincolo de ipoteza perturbaţiilor mici.

Pentru a vedea diferenţa între compresiune (pe o jumătate de aripă groasă) şi expansiunea din interiorul denivelării, se reprezintă cele două distribuţii pe aceeaşi diagramă (fig. 3*a*, *b*).

Cazul unor mişcări conice mixte de expansiune şi compresiune. Dacă suprafaţa de „perturbaţie" situată pe semiplanul superior, are o formă oarecare conică cu pante pozitive şi negative, atunci mişcarea este tot conică, însă cuprinde atît compresiune cît şi expansiune, devenind astfel o scurgere complexă.

Pentru simplificare, fără a diminua generalitatea problemei, vom lua cîteva mişcări mixte antisimetrice. Astfel, spre exemplu, dacă avem o aripă delta avînd pe o parte o pantă constantă γ_0, iar pe cealaltă $-\gamma_0$ (fig. 5), din rezultatele clasice obţinute pînă acum, vom scrie ţinînd seama de anumite relaţii trigonometrice

$$\mathfrak{U}_1 = \frac{2\gamma_0 l U_\infty}{\pi\sqrt{1-B^2l^2}} \cosh^{-1} Bl \sqrt{\frac{1-B^2x^2}{B^2(l^2-x^2)}} =$$

$$= \frac{2\gamma_0 l U_\infty}{\pi\sqrt{B^2l^2-1}} \cos^{-1} Bl \sqrt{\frac{1-B^2x^2}{B^2(l^2-x^2)}}. \tag{18}$$

Dacă muchiile acestei suprafeţe sînt subsonice $\left(l < \frac{1}{B}\right)$ vom avea viteze infinite la bordurile de atac ($\eta = \pm l$); dacă $\left(l > \frac{1}{B}\right)$, atunci se evită această singularitate.

Cazul limită, cînd $l \to \infty$, adică

$$u_1 = \pm \frac{2\gamma_0 U_\infty}{\pi B} \cos^{-1}\sqrt{1 - B^2x^2}, \tag{19}$$

corespunde unei aripi de anvergură infinită, jumătate din dreapta avînd o expansiune, iar jumătate din stînga o compresiune. Vitezele axiale de

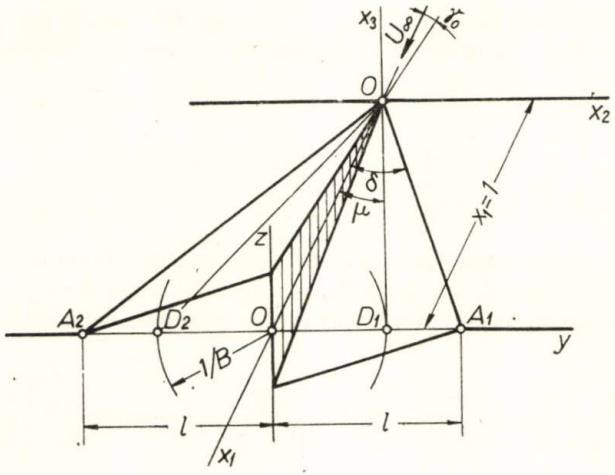


Fig. 5

perturbaţie de o parte şi de alta, în afara conului Mach, sînt respectiv

$$\frac{u_1}{U_\infty} = \pm \frac{\gamma_0}{B}. \tag{20}$$

În interiorul conului MACH, viteza u variază după formula de mai sus (19) şi trece prin zero în origine.

Atît timp cît este vorba de micile perturbaţii, rezultatul de mai sus nu prezintă un interes deosebit. Pentru pante (sau denivelări) mai mari, sau numere MACH mari, coeficientul de presiune C_p va fi dat de formula stabilită mai sus, şi anume

$$M_\infty^2 C_p = \frac{\gamma+1}{2}\left(M_\infty^2 \frac{u}{U_\infty}\right)^2 - 2\left(M_\infty^2 \frac{u}{U}\right)\sqrt{1+\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2\left(M_\infty^2 \frac{u}{U_\infty}\right)^2}. \tag{21}$$

De aici se vede că atît compresiunea după unda de şoc, cît şi expansiunea după undele de expansiune, pot fi scrise în funcţie de viteza de perturbaţie axială u, care se poate calcula cu uşurinţă, aproape în toate cazurile practice.

Avem, astfel, trecerea de la expansiune la compresiune, printr-o mişcare conică în jurul saltului de incidenţă, de la $+\gamma_0$ la $-\gamma_0$.

Din formula de mai sus se poate deduce şi viteza totală U, care este riguroasă pentru compresiune, dar este valabilă şi pentru expansiune, întrucît aceste două fenomene sînt definite de aceleaşi formule pînă la o limită oarecare de pantă sau de număr MACH.

În diagramele din figurile 6*a*, *b* şi figurile 7*a*, *b* s-a reprezentat variaţia coeficientului de presiune total, de la compresiune la expansiune, în comparaţie cu aceeaşi diagramă din cazul micilor perturbaţii.

Să trecem acum la un exemplu de mişcări mixte antisimetrice cu variaţie continuă de pantă, determinată de o distribuţie liniară de surse, după relaţia

$$q = q_{10}\frac{\eta}{l} \qquad (-l < \eta < l). \tag{22}$$

Utilizînd mereu aceeaşi metodă indicată în diverse lucrări anterioare [3], [4], dacă punem şi condiţia ca viteza să fie finită la bordurile de de atac, vom putea scrie pentru această mişcare formula vitezei axiale

$$\mathfrak{U}_2 = \frac{q_{10}l}{\pi}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)\left(\cosh^{-1}\frac{1-B^2lx}{B(l-x)} - \cosh^{-1}\frac{1+B^2lx}{B(l+x)}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{x}{l}\sqrt{1-B^2x^2}\,\frac{\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}Bl}{Bl}\right]. \tag{23}$$

În cazul în care bordurile devin supersonice ($Bl > 1$), relaţia precedentă devine

$$\underset{x<\frac{1}{B}}{\mathfrak{U}_2} = \frac{q_{10}l}{\pi}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)\left(\cos^{-1}\frac{1-B^2lx}{B(l-x)} - \cos^{-1}\frac{1+B^2lx}{B(l+x)}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{x}{l}\sqrt{1-B^2x^2}\,\frac{\frac{\pi}{2}-\cosh^{-1}Bl}{Bl}\right], \tag{24a}$$

$$\underset{x>\frac{1}{B}}{\mathfrak{U}_2} = \frac{q_{10}l}{2}\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right). \tag{24b}$$

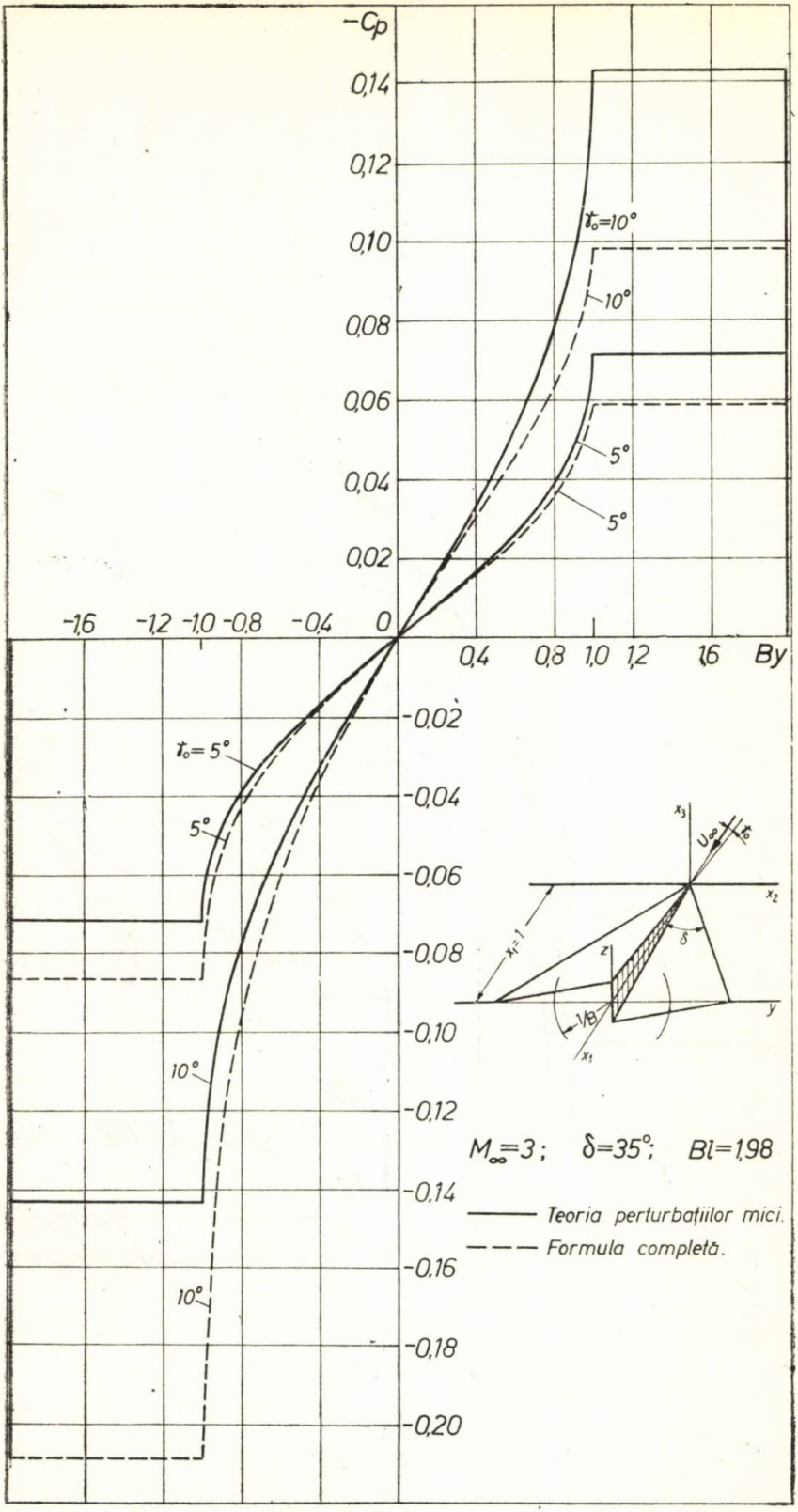
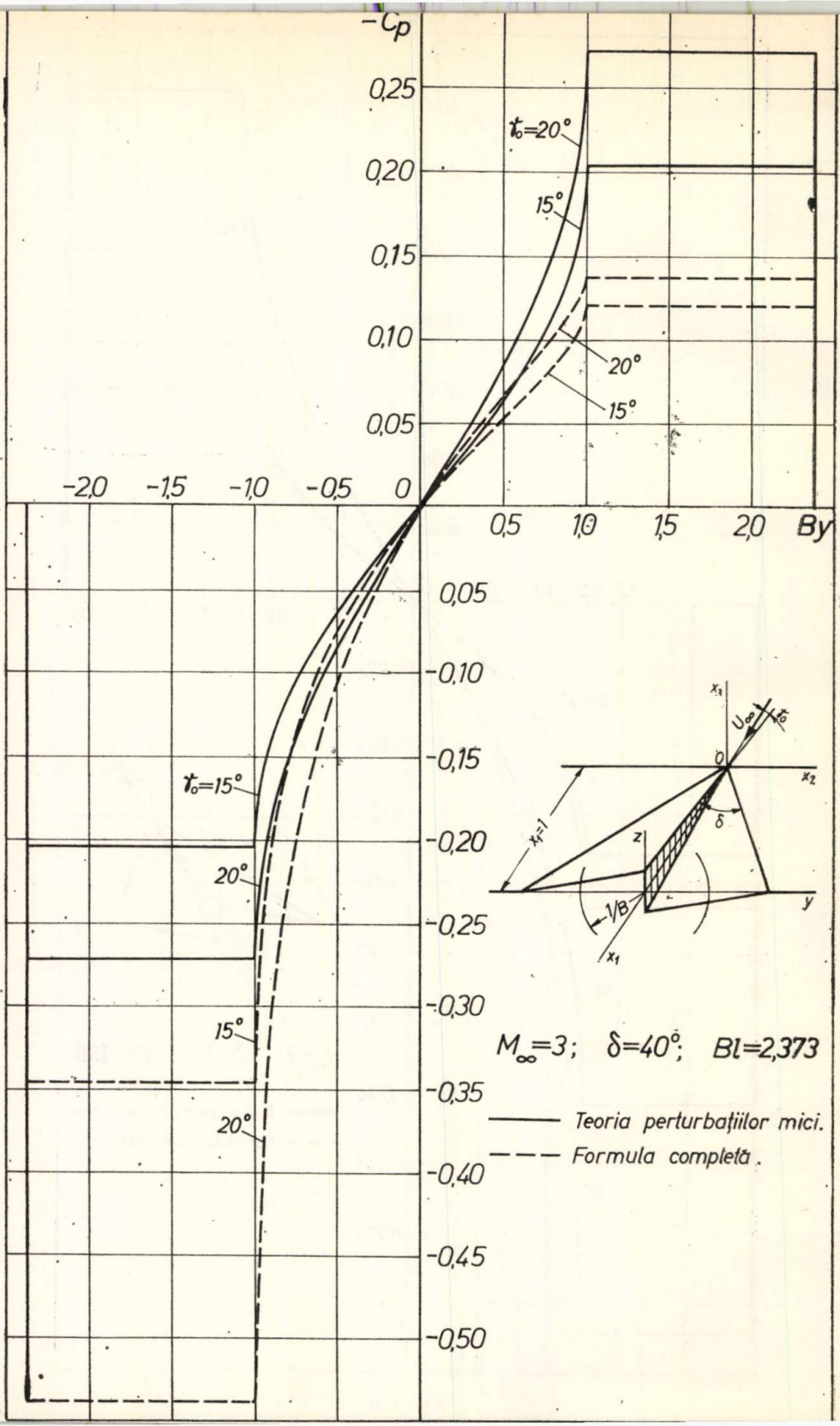
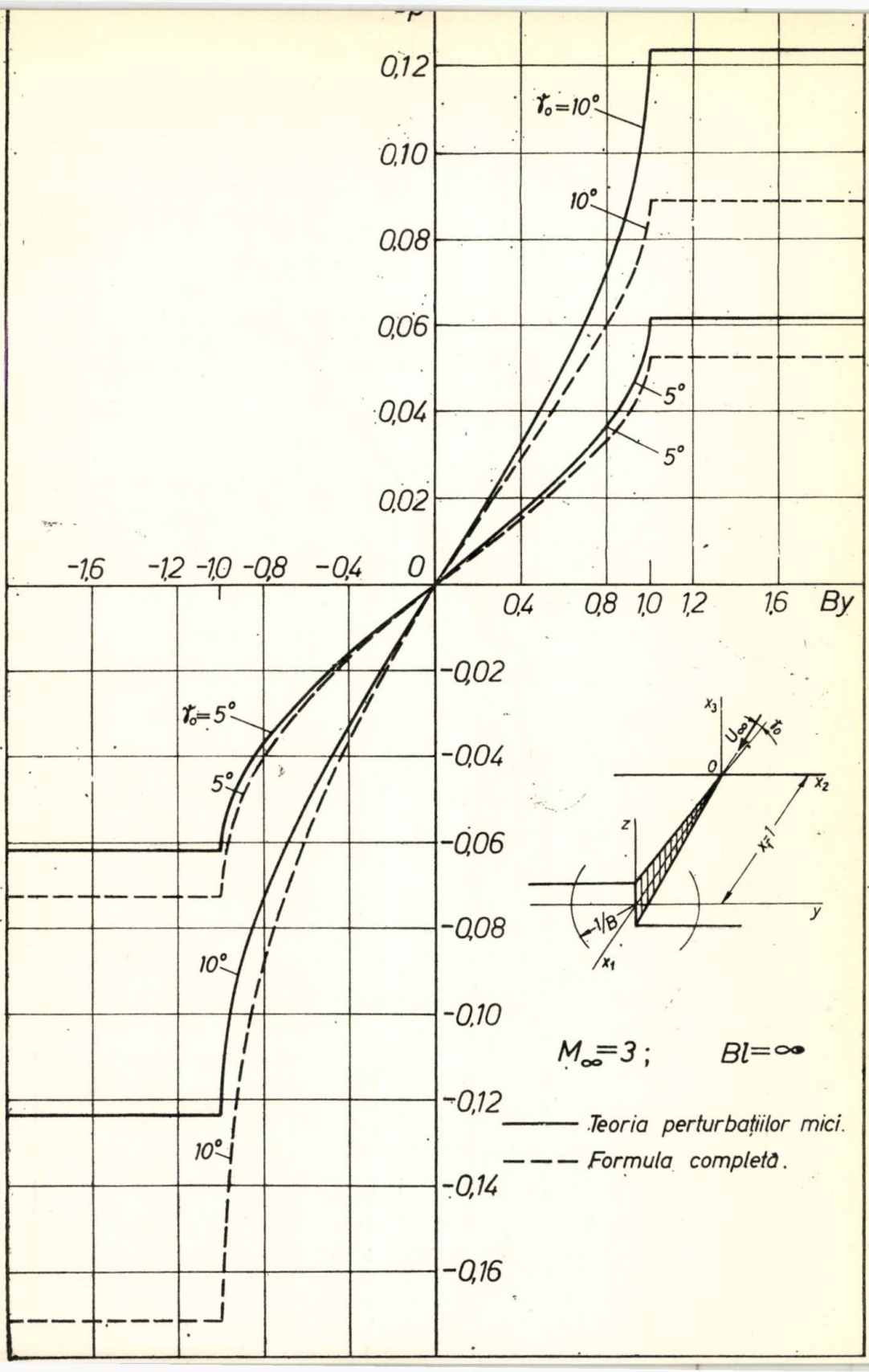

-Cp
0,14
0,12
0,10
0,08
0,06
0,04
0,02
-1,6
-1,2
-1,0
-0,8
-0,4
0
0,4
0,8
1,0
1,2
1,6
By
ϑ_0=10°
10°
5°
5°
ϑ_0= 5°
5°
10°
10°
-0,02
-0,04
-0,06
-0,08
-0,10
-0,12
-0,14
-0,16
-0,18
-0,20
x_3
x_2
x_1
y
z
δ
M_∞=3; δ=35°; Bl=1,98
Teoria perturbațiilor mici.
Formula completă.

Fig. 6 *a*


$-C_p$
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
t_0=20°
15°
20°
15°
-2,0
-1,5
-1,0
-0,5
0
0,5
1,0
1,5
2,0
By
0,05
-0,10
-0,15
-0,20
-0,25
-0,30
-0,35
-0,40
-0,45
-0,50
t_0=15°
20°
15°
20°
x_3
U_∞
t_0
0
x_2
x_1=1
z
δ
y
1/B
x_1
M_∞=3; δ=40°; Bl=2,373
Teoria perturbațiilor mici.
Formula completă.


0,12
0,10
0,08
0,06
0,04
0,02
-0,02
-0,04
-0,06
-0,08
-0,10
-0,12
-0,14
-0,16
-1,6
-1,2
-1,0
-0,8
-0,4
0
0,4
0,8
1,0
1,2
1,6
By
$\gamma_0=10°$
10°
5°
5°
$\gamma_0=5°$
5°
10°
10°
x_3
U_∞
γ_0
0
x_2
z
$x_1=1$
y
1/B
x_1
$M_\infty=3$; $Bl=\infty$
——— Teoria perturbațiilor mici.
– – – Formula completă.

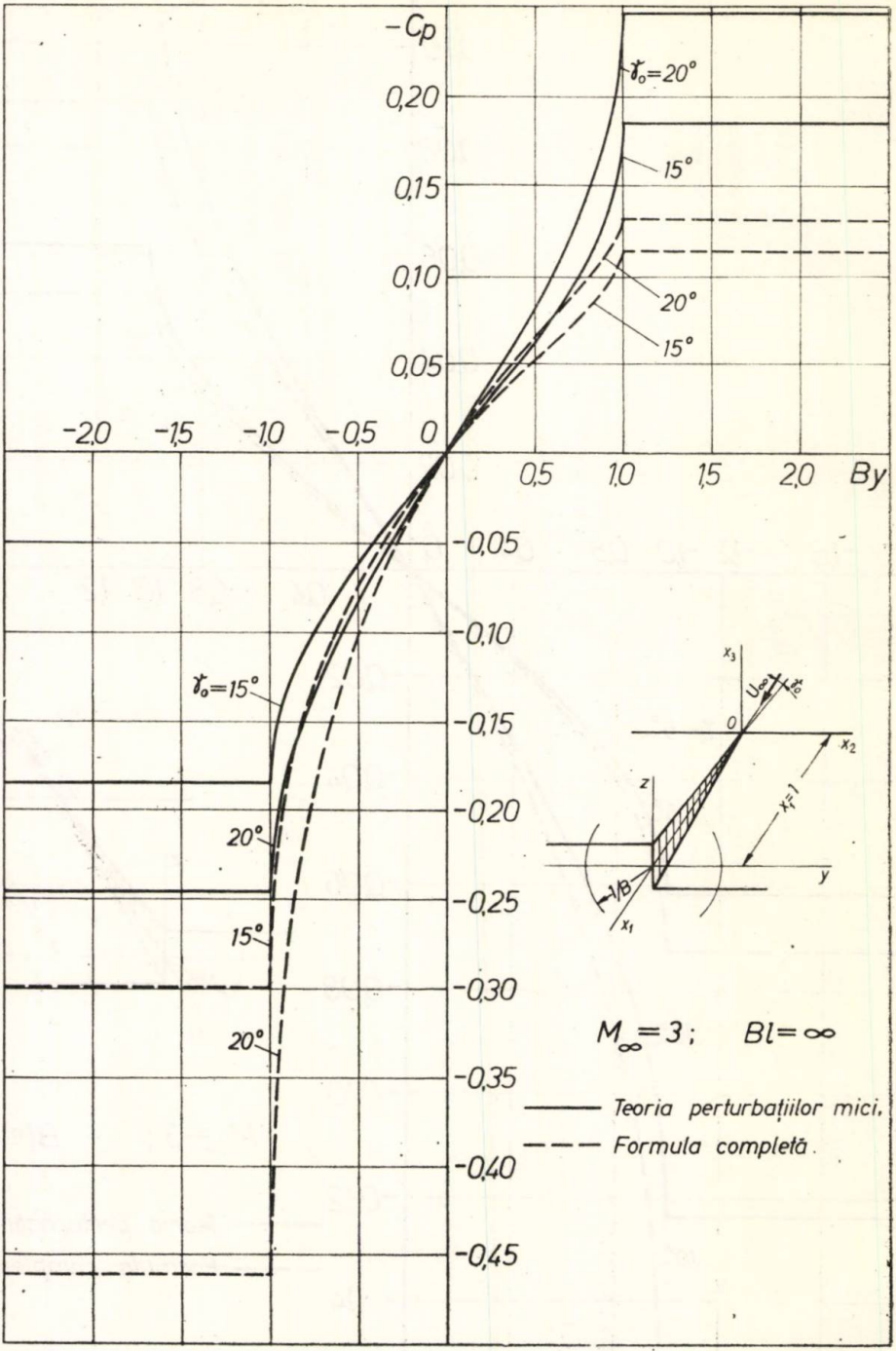

-Cp
0,20
0,15
0,10
0,05
-2,0
-1,5
-1,0
-0,5
0
0,5
1,0
1,5
2,0
By
$\gamma_0=20°$
15°
20°
15°
-0,05
-0,10
-0,15
-0,20
-0,25
-0,30
-0,35
-0,40
-0,45
$\gamma_0=15°$
20°
15°
20°
x_3
U_∞
γ_0
0
x_2
z
$x_1=1$
y
$-1/\beta$
x_1
$M_\infty=3$; $Bl=\infty$
Teoria perturbațiilor mici.
Formula completă.

Fig. 7 *b*

Forma suprafeţei este dată schematic în figura 8.

Variaţia pantei γ şi ecuaţiile profilului transversal sînt date de relaţiile (11c), (11d), (15a) şi (15b) în care constanta q_{10} este dată de formula (11e). Profilul secţiunii transversale al unei jumătăţi de aripă este cel reprezentat în figurile 4*a*, *b*.

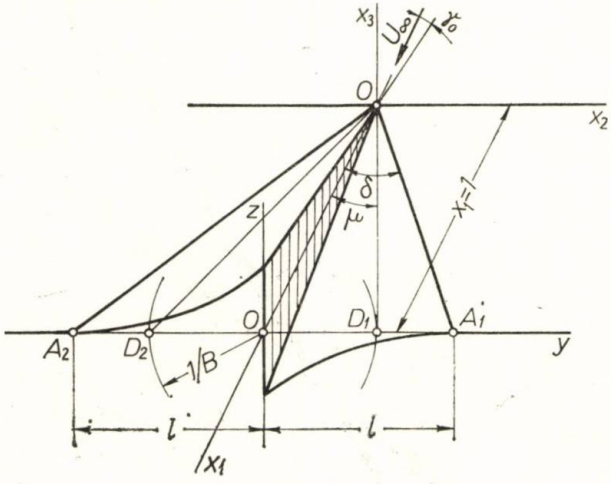


Fig. 8

În figurile 9*a*,*b* sînt reprezentate diagramele distribuţiei de presiuni, calculate în ipoteza perturbaţiilor mici, precum şi în cazul pantelor şi numerelor MACH mari, în afară de ipoteza perturbaţiilor mici.

Deşi pantele suprafeţei conice considerate sînt antisimetrice, deci egale şi de sens contrar, totuşi, în spiritul formulei de mai sus (21), coeficientul de presiune este mai mare — în valoare absolută — pentru compresiune decît pentru depresiune (fig. 9*a*, *b*).

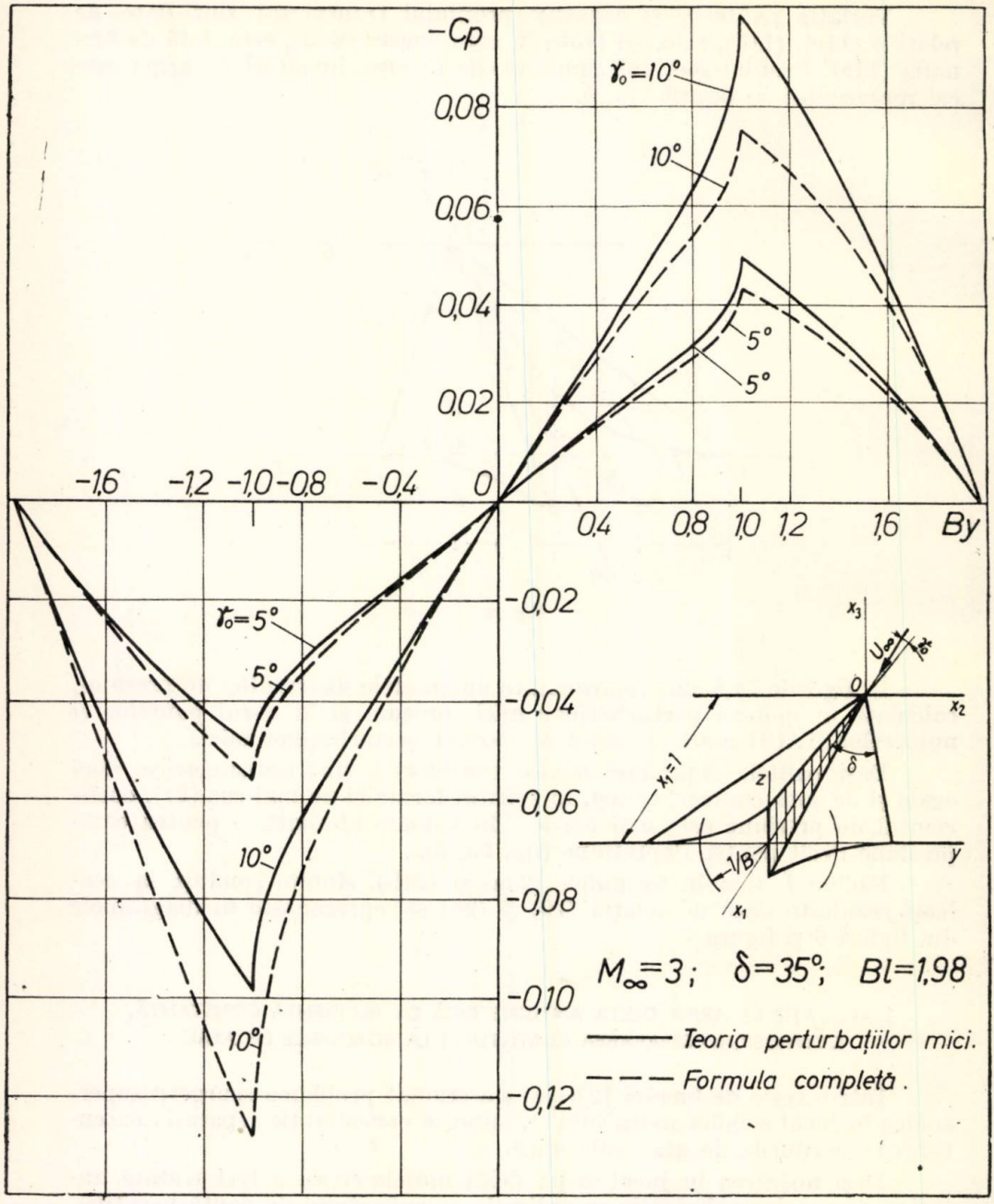
Făcînd $l \to \infty$ în formulele (24a) şi (24b), sîntem conduşi la aceleaşi rezultate date de relaţia (19) şi (20) şi reprezentate în diagramele din figura 6 şi figura 7.

3. APLICAŢIE LA ARIPA DELTA ANTISIMETRICĂ CU INCIDENŢĂ CONSTANTĂ, CONSIDERÎND SEPARAREA CURENTULUI LA BORDURILE DE ATAC

Într-o serie de lucrări [3], [4] s-a studiat problema scurgerii supersonice în jurul aripilor delta subţiri, luînd în consideraţie separaţia curentului la bordurile de atac subsonice.

Deşi mişcarea în jurul aripii delta antisimetrice a fost tratată anterior, vom relua schematic ca aplicaţie a conceptului de pantă negativă.

Pentru rezolvarea acestor probleme s-a stabilit un model teoretic, în virtutea căruia efectul perturbator al vîrtejurilor în cornet duce în cele din urmă la un sistem de trei aripi componente care înlocuiesc aripa



-Cp
0,08
0,06
0,04
0,02
0
-0,02
-0,04
-0,06
-0,08
-0,10
-0,12
-1,6
-1,2
-1,0
-0,8
-0,4
0,4
0,8
1,0
1,2
1,6
By
γ₀=10°
10°
5°
5°
γ₀=5°
5°
10°
10°
x₃
U∞
x₂
O
x₁=1
z
δ
1/B
y
x₁
M∞=3; δ=35°; Bl=1,98
Teoria perturbațiilor mici.
Formula completă.

Fig. 9 *a*

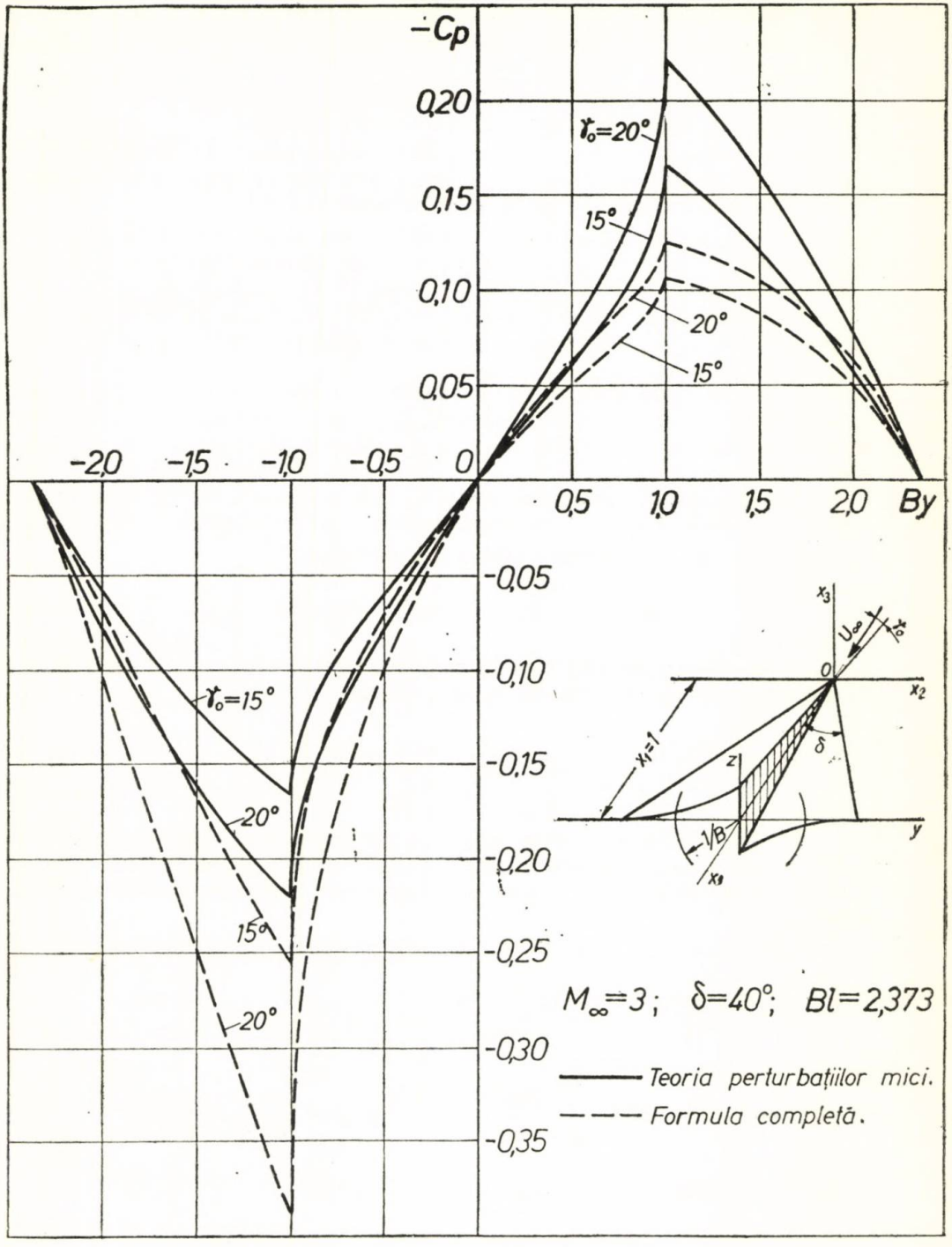

-Cp
0,20
0,15
0,10
0,05
0
-2,0
-1,5
-1,0
-0,5
0,5
1,0
1,5
2,0
By
γ₀=20°
15°
20°
15°
-0,05
-0,10
-0,15
-0,20
-0,25
-0,30
-0,35
γ₀=15°
20°
15°
20°
x₃
U∞
γ₀
0
x₂
x₁=1
z
δ
y
1/B
x₁
M∞=3; δ=40°; Bl=2,373
Teoria perturbațiilor mici.
Formula completă.

Fig. 9 b

reală. Soluţia constă din a înlocui mişcarea complexă din jurul aripii reale prin suma a trei mişcări conice din jurul următoarelor aripi fictive echivalente :

1) — o aripă subţire cu incidenţa variabilă care va reprezenta global fenomenul separaţiei curentului la bordurile de atac,

2) — o aripă de „grosime simetrică" avînd panta de aceeaşi formă cu incidenţa primei aripi, care va elimina denivelarea bruscă de presiuni la intrados pentru a corespunde cu fenomenul real,

3) — o aripă de „grosime simetrică" cu panta variabilă după o lege simplă, astfel încît să se compenseze cu aripa groasă precedentă şi din suprapunerea ambelor să rezulte o pantă medie nulă.

În continuare vom determina pentru aripa rezultantă viteza axială de perturbaţie care este necesară la calculul caracteristicilor aerodinamice.

1) *Aripa delta subţire cu incidenţa variabilă.* Vom presupune că viteza verticală pe suprafaţa acestei aripi este constantă şi egală cu $w_0 = -\alpha_0 U_\infty$ pe intervalul $(-s < \eta < s)$, în rest fiind considerată variabilă.

Această variaţie a vitezei verticale este reprezentată, în baza analogiei hidrodinamice, printr-o distribuţie de surse, conform relaţiei (6).

Admiţînd o repartiţie uniformă a surselor

$$q(\eta) = \pm k_{11}, \quad \eta \in [-l, -s] \cup [s, l], \tag{25}$$

şi aplicînd rezultatele obţinute în lucrările anterioare [4], viteza axială de perturbaţie va avea următoarea expresie

$$u_i = \pm \frac{k_{11} l}{\pi} \left[\frac{s-x}{l} \cosh^{-1} \left| \frac{l^2 - sx}{l(s-x)} \right| - \frac{s+x}{l} \cosh^{-1} \frac{l^2 + sx}{l(s+x)} \right]. \tag{26}$$

2) *Aripa delta de grosime simetrică cu panta variabilă.* Scurgerea în jurul acestei aripi, cu panta negativă pe partea din stînga, are un suport real fiind identică cu mişcarea din jurul unor obstacole sau denivelări conice.

Alegînd o distribuţie de surse identică cu (25), viteza axială va fi

$$u_i = \pm \frac{k_{11} l}{\pi} \left[\left(1 - \frac{x}{l}\right) \cosh^{-1} \frac{1 - B^2 l x}{B(l-x)} - \left(1 + \frac{x}{l}\right) \cosh^{-1} \frac{1 + B^2 l x}{B(l+x)} - \right.$$

$$\left. - \frac{s-x}{l} \cosh^{-1} \left| \frac{1 - B^2 s x}{B(s-x)} \right| + \frac{s+x}{l} \cosh^{-1} \frac{1 + B^2 s x}{B(s+x)} \right] + L, \tag{27}$$

unde L reprezintă contribuţia bordurilor aripii.

3) *Aripa delta compensatoare de pantă.* Ca şi cea precedentă, această aripă fictivă, va avea, de asemenea, un suport fizic.

Într-adevăr, considerînd o distribuţie liniară de surse (22), expresia vitezei axiale de perturbaţie va fi chiar cea dată de relaţia (23), care defineşte o mişcare mixtă antisimetrică.

Constantele k_{11} şi q_{11} care apar, se determină în acelaşi mod ca în lucrările anterioare [2], [4]. Rezultă

$$\frac{k_{11}}{\alpha U_\infty} = 2\left[\left(2-\frac{s}{l}\right)\sqrt{1-B^2s^2}-\sqrt{1-B^2l^2}+2\left(\cosh^{-1}\frac{1}{Bl}-\cosh^{-1}\frac{1}{Bs}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\cosh^{-1}\frac{l}{s}-\sqrt{1-\frac{s^2}{l^2}}\right)+\frac{1}{Bl}\left(\sin^{-1}Bl-\sin^{-1}Bs\right)\right]^{-1}, \tag{28a}$$

$$\frac{q_{11}}{k_{11}} = -\frac{3Bl\left(Bl\sqrt{1-B^2l^2}-Bs\sqrt{1-B^2s^2}+\sin^{-1}Bl-\sin^{-1}Bs\right)}{2\left[1-(1-B^2l^2)^{3/2}\right]}. \tag{28b}$$

Coeficienţii aerodinamici de portanţă şi de moment de ruliu vor avea expresiile

$$C_z = \frac{4k_{11}l}{\pi U_\infty}\left(\sqrt{1-\frac{s^2}{l^2}}-\frac{s^2}{l^2}\cosh^{-1}\frac{l}{s}\right), \tag{29a}$$

$$\frac{H}{l}C_m = \frac{4k_{11}l}{9U_\infty}\left(1-\frac{s^2}{l^2}\right)^{3/2}, \tag{29b}$$

unde H este o lungime de referinţă a aripii delta, în general egală cu înălţimea sa.

Pentru calculele numerice efectuate s-au utilizat următoarele formule ale parametrului s/l care delimitează intervalul de variaţie a vitezei verticale :

$$\frac{s}{l} = \frac{1}{3}\left(4\frac{c}{l}-1\right), \quad \frac{c}{l} = \frac{1}{1+1{,}4\sqrt{\alpha}}, \tag{30}$$

aşa cum s-a procedat şi în alte lucrări anterioare. Ţinînd seama de rezultatele obţinute, putem determina distribuţia de presiuni (fig. 10*a*, *b*):

$$C_p = -\frac{2}{U_\infty}\,\mathrm{Re}\,(\mathfrak{U}_l+\mathfrak{U}_t+\mathfrak{U}_c). \tag{31}$$

Observaţie. Calculul distribuţiilor de presiuni şi al profilului aripii a fost efectuat cu ajutorul unui calculator electronic.

Primită la redacţie la 3 martie 1972

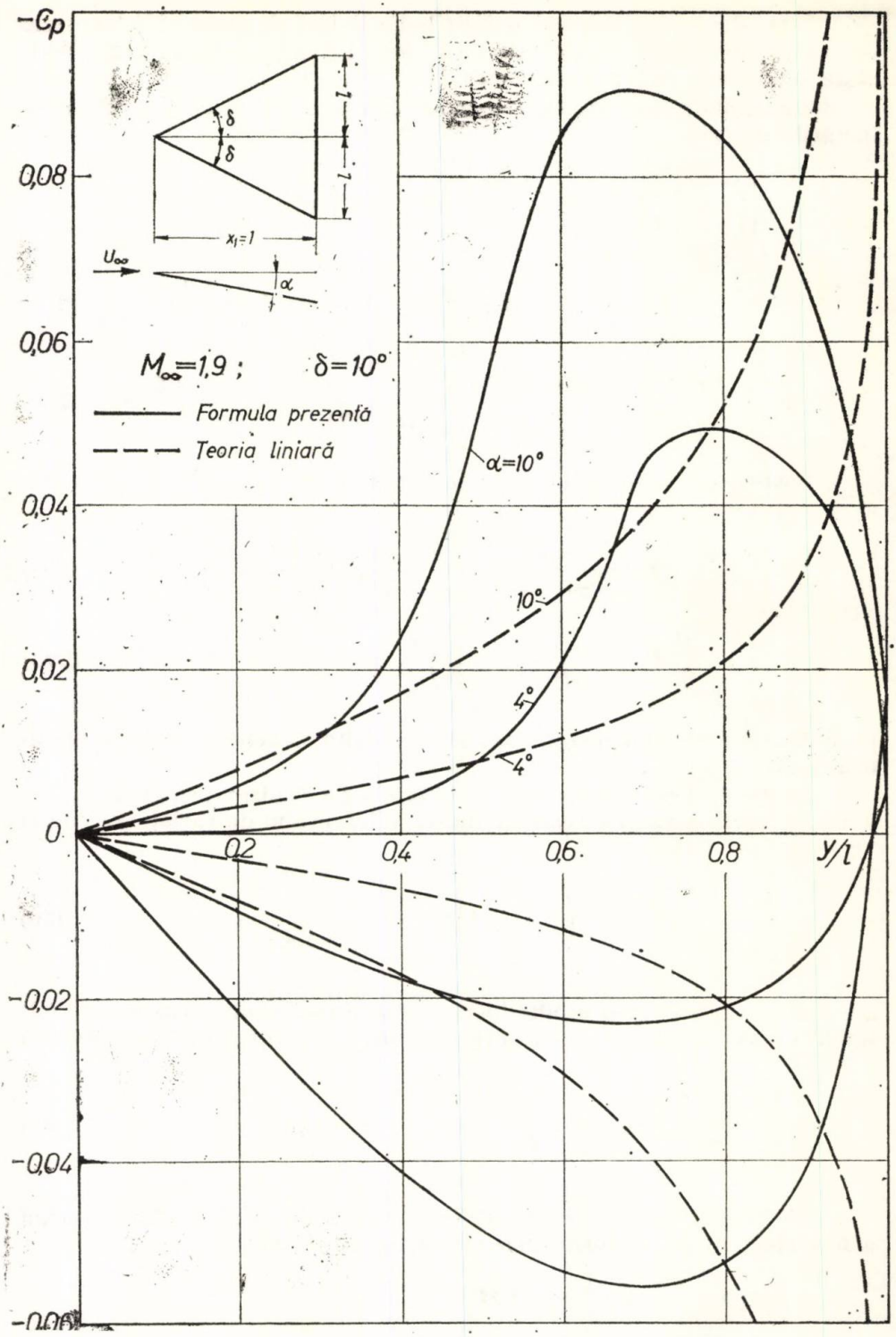

$-c_p$
0,08
0,06
0,04
0,02
0
-0,02
-0,04
0,2
0,4
0,6
0,8
y/l
δ
δ
l
l
$x_1=1$
U_∞
α
$M_\infty=1,9$;
$\delta=10°$
Formula prezentă
Teoria liniară
α=10°
10°
4°
4°

Fig. 10 *a*

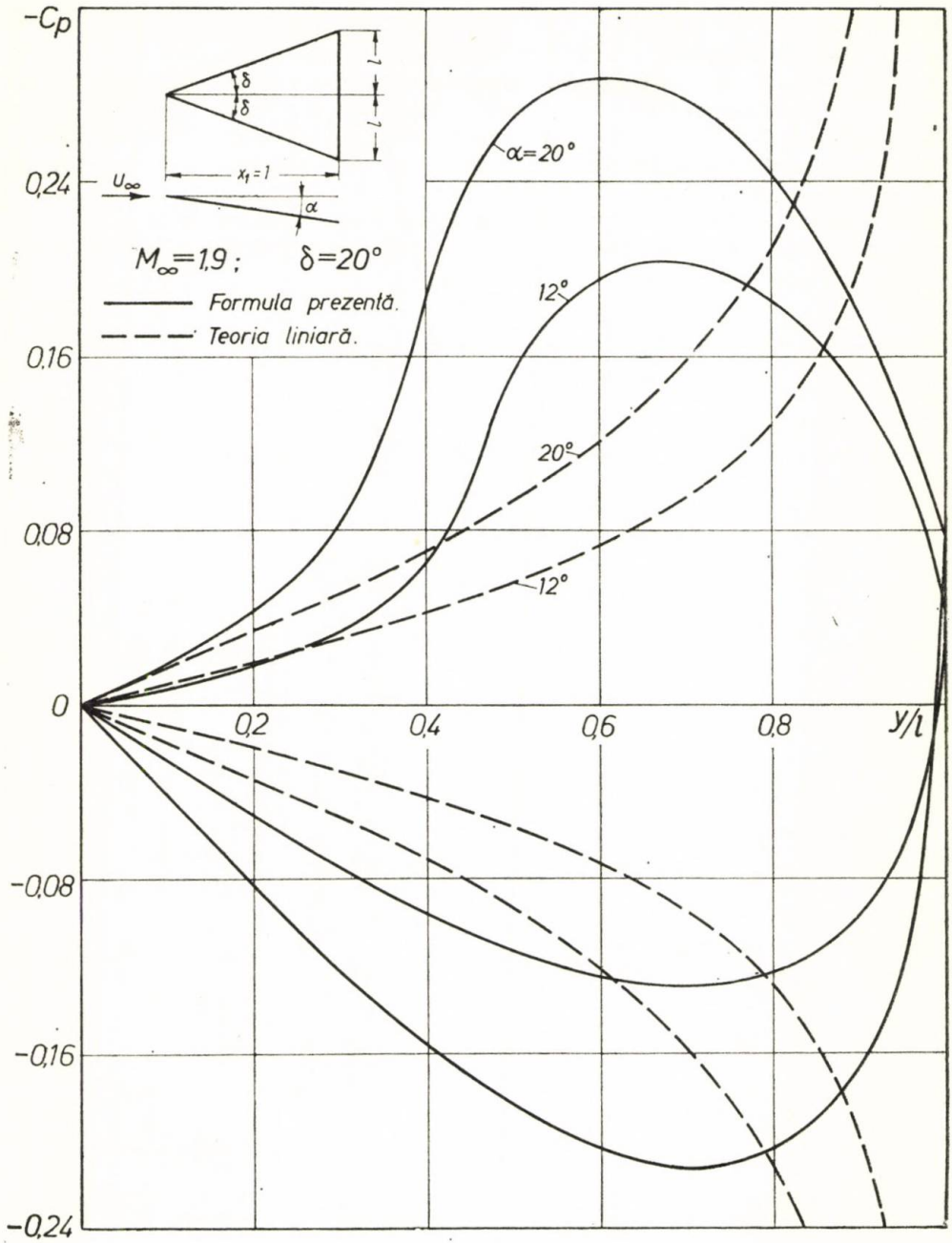

-Cp
0,24
0,16
0,08
0
-0,08
-0,16
-0,24
0,2
0,4
0,6
0,8
y/l
α=20°
12°
20°
12°
δ
δ
l
l
x1=1
U∞
α
M∞=1,9 ; δ=20°
Formula prezentă.
Teoria liniară.

Fig. 10 *b*

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, *High-Speed Aerodynamics*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1956.
2. E. Carafoli, *Wing Theory in Supersonic Flow*, Pergamon Press, London, 1969.
3. E. Carafoli, Şt. Staicu, *Sur un modèle théorique concernant l'aile delta mince avec décollement aux bords d'attaque*, Journal de Mécanique, **6**, *2* (1967).
4. E. Carafoli, Şt Staicu, *On the Delta Wing with Forced Antisymmetry in Supersonic Flow, considering the Leading Edge Separation*, Rev. Rom. Sci. Techn. Méc. Appl., **XIII**, *2* (1968).
5. E. Carafoli, C. Berbente, *Calculations of Pressures and Aerodynamic Characteristics of Delta Wings in Supersonic — moderate Hypersonic Flow*, Rev. Méc. Appl., **XI**, *3* (1966).

DIFUZIA UNUI JET VERTICAL ÎNTR-UN MEDIU FLUID DE DENSITATE OARECARE

de E. RĂZVAN
I.S.C.P.G.A.

Problema este stimulată de practică, respectiv de evacuarea intensivă a fluidelor reziduale (fum, gaze, ape uzate) în mediul înconjurător (aer, ape).
După o scurtă clasificare se trece la analiza fizicii fenomenelor, se fixează parametrii care intervin (forţe active, concentraţii) variaţia lor posibilă. Se scriu ecuaţiile care descriu procesul : ecuaţia de continuitate şi ecuaţia mişcării — şi se propun condiţii la limită. Folosind şi unele rezultate publicate (în particular relaţia lui Tollmien pentru distribuţia vitezelor în zona jetului) — se deduc soluţii care dau distribuţia concentraţiei în funcţie de spaţiu şi condiţii la margine (fenomenul fiind presupus permanent).
Discuţia ecuaţiilor şi a soluţiilor obţinute.
Soluţia numerică depinde de doi coeficienţi ale căror valori se aleg pe baza datelor experimentale. Cu valorile alese s-au construit diagrame de lucru.

1. INTRODUCERE

Difuzia unui jet a fost abordată de mult în mecanica fluidelor, însă pînă în anii din urmă problema era tratată fără să se ia în considerare o eventuală diferenţă de densitate între jet şi mediul înconjurător [1], [2]. Neglijarea acestei diferenţe, admisibilă pînă la un punct, nu mai poate fi acceptată atunci cînd se analizează variaţia concentraţiei unei substanţe transportate de fluidul din jet.

O asemenea analiză este stimulată de practică, respectiv de tehnologia contemporană, care evacuează în mediul înconjurător, în aer şi în ape — cantităţi enorme de substanţe reziduale, deşeuri ale proceselor industriale. Substanţe sub diverse forme — gaze, pulberi, soluţii, căldură — sînt evacuate adeseori cu ajutorul unor jeturi, mediul purtător fiind acelaşi cu mediul înconjurător, apă sau aer.

1.1. Într-o secţiune iniţială densitatea jetului, ρ_0, diferă de cea a mediului înconjurător, ρ_m, datorită prezenţei substanţei transportate. Diferenţa iniţială, $\Delta\rho = \rho_m - \rho_0$, se reduce în lungul jetului datorită schimbului de masă cu mediul înconjurător, prin difuzie şi prin convenţie. Astfel, un jet avînd aceeaşi densitate cu mediul în care debuşază ($\Delta\rho = 0$)

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 32, NR. 1, 1973, P. 55–80.

apare ca un caz particular, cazul general fiind cel în care există o diferenţă de densitate ($\Delta\rho \neq 0$). Diferenţa de densitate poate fi pozitivă ($\Delta\rho > 0$), fluidul ambiant mai greu decît cel din jet, sau negativă ($\Delta\rho < 0$), fluidul ambiant mai uşor decît cel din jet. În primul caz, diferenţa de densitate stimulează caracterul ascendent al mişcării în jet. În sfîrşit, cazul cel mai general este cel în care densitatea mediului înconjurător variază în lungul jetului după o lege oarecare, fie aceasta liniară în cazul cel mai simplu ($\Delta\rho = cz$).

O asemenea situaţie se datorează fie factorilor termici, fie salinităţii, fie acţiunii combinate a acestor factori.

1.2. Difuzia jetului într-un mediu de densitate diferită are implicaţii practice foarte variate (tab. 1):

— difuzia unui jet lichid în apă, în cazul particular $\Delta\rho = 0$, apare în hidraulica construcţiilor hidrotehnice (goliri de fund, orificii înecate, bief aval);

— cazul general, $\Delta\rho \neq 0$, se întîlneşte, de exemplu, la evacuarea apelor uzate în mare;

— fenomene foarte asemănătoare, sub aspect cinematic apar la evacuarea unor fluide compresibile în atmosferă (coşuri de fum, turnuri de răcire etc.);

— în sfîrşit soluţiile problemei pot servi şi la studiul jeturilor lichide în atmosferă.

1.3. Păstrînd un grad de generalitate rezonabil, această lucrare se referă la jeturi într-un mediu lichid nelimitat, cu aplicaţii directe la analiza procesului de poluare în mediu marin. Se admite ipoteza că un jet vertical turbulent debuşează în mediu fluid înconjurător care se găseşte iniţial în repaus, aceasta tocmai pentru a scoate în evidenţă rolul diferenţei de densitate ($\rho_m - \rho_0$). Din acelaşi motiv s-au considerat procesele staţionare.

Într-o primă etapă a studiului se consideră densitatea mediului înconjurător constantă pe verticala ($\partial\rho_m/\partial z = 0$), ceea ce reprezintă o condiţie mai severă pentru practică. Această ipoteză este apoi abandonată şi într-un capitol separat se cercetează cazul variaţiei liniare ($\partial\rho_m/\partial z = \text{const.}$), verosimilă în mediu marin.

Pe parcurs s-a ţinut seama de numeroase lucrări de specialitate publicate, după cum urmează:

— pentru difuzia jetului în mediu omogen, de soluţia teoretică clasică a lui Tollmien [1] şi de rezultatele experimentale ulterioare ale lui Albertson ş.a. [2]. A fost consultată, de asemenea, monografia clasică a lui Abramovici [3] şi s-a parcurs capitolul corespunzător de cea a lui Hinze [4];

— pentru difuzia jetului în mediu de densitate diferită s-au folosit lucrările lui Morton [5] şi Abraham [6] precum şi unele articole în probleme de detaliu citate în text.

2. ASPECTE FIZICE ALE FENOMENULUI

Fie un jet turbulent vertical într-un mediu fluid nelimitat, de densitate ρ_m, aflat iniţial în stare de repaus. Se va raporta mişcarea la un sistem de axe zOx, avînd originea în secţiunea de debuşare (fig. 1*a*). În

Tabela 1

Clasificarea problemelor jeturilor în mediu cu densitate oarecare

Natura variației densității $\Delta\rho = \rho_m - \rho_0$	$\Delta\rho = 0$	$\Delta\rho \neq 0$	
		$\Delta\rho$ = const. (z)	$\Delta\rho$ = var. (z)
		$\Delta\rho < 0$ $\Delta\rho > 0$	(jet ascendent)

Natura forțelor active asupra mediului purtător	Impulsul	Forțe gravitaționale (portanța)	Rezultanta celor două forțe
	$F_i = \iint_A \rho v^2 \, dA$	$F_g = \iiint_{Vol} g \, \Delta\rho \, dVol \quad (V_0 \to 0)$	$\vec{F_i} + \vec{F_g} \quad (V_0 \neq 0)$

Natura mediului fluid înconjurător	Apă; apă marină		Aer				
Tipurile de aplicații practice	Jeturi înecate $\Delta\rho = 0$	Evacuări de ape uzate (calde) în mare $\Delta\rho \neq 0$	Fluide grele în atmosferă		Fluide compresibile în atmosferă		
			sonde de petrol	puțuri arteziene, jeturi contra incendiilor	coșuri de fum	turnuri de răcire	coloane de gaze

această secțiune, cu suprafața A_0, jetul este considerat omogen, avînd densitatea inițială ρ_0 și viteza medie pe secțiune V_0.

2.1. În cîmpul mișcării densitatea fluidului, ρ, variază datorită schimbului de masă între jet și mediul înconjurător ; admițînd că procesul este staționar, densitatea depinde numai de spațiu, $\rho\ (x,z)$. O reducere a densității reflectă scăderea concentrației substanței transportate de jet și presupune antrenarea în jet a unui debit Q_1, suplimentar față de $Q_0 = V_0 A_0$. Schimbul de masă între jet și mediul fluid înconjurător are loc datorită fenomenelor de convecție și de difuzie, în principal de difuzie turbulentă. Convecția apare în măsura în care există o componentă transversală a vitezelor medii locale $\overline{v}_x$ și este proporțională cu mărimea $\overline{v}_x$.

Aceste componente există în măsura în care jetul este divergent, iar divergența jetului se datorește acțiunii eforturilor tangențiale din zona de contact jet-mediu înconjurător, eforturi proporționale cu gradientul, $\partial \overline{v}_z / \partial x$. După rezultatele experimentale disponibile gradul de divergență variază între 1/4 și 1/12 în funcție de $\mathcal{F}_{\kappa_0}$ [6]. Difuzia moleculară apare ca fenomen de contact pe suprafețele care separă substanțe cu densități diferite.

Difuzia turbulentă rezultă din acțiunea pulsațiilor turbulente ale vitezelor locale v', respectiv a vîrtejurilor care se formează în zona de contact. Vîrtejurile, care pătrund alternativ în tot volumul jetului, au rolul principal în schimbul de mase cu mediul înconjurător, deci în variația densității, respectiv în reducerea concentrației substanței transportate de jet.

În măsura în care fenomenul se desfășoară într-un mediu nelimitat și mai greu decît jetul ($\rho_m > \rho_0$), această variație este monotonă (fig. 1*b*). Există doi factori de perturbare a acestei variații :

— o variație, respectiv o scădere, a densității mediului fluid înconjurător în lungul jetului, $\partial \rho_m / \partial z \neq 0$, (fig. 1*c*) ;

— existența unei limite, de exemplu a unei suprafețe libere a mediului fluid înconjurător (fig. 1*d*).

Se înțelege că un efect similar, mai puternic, îl are acțiunea simultană a celor doi factori (fig. 1e,f). Perturbările menționate se manifestă prin evazarea laterală relativ bruscă a jetului.

Astfel, în apropierea suprafeței libere și în absența curenților sau a valurilor, un jet incident vertical este defectat într-o direcție paralelă cu suprafața liberă, orizontală (fig. 1*d*).

În apropierea suprafeței libere are loc acumularea fluidului provenit din jet și care dezlocuiește o cantitate echivalentă de fluid din mediul înconjurător, fie aceasta apa marină ($\rho < \rho_m$). Aceasta este un adevărat curent de densitate de suprafață, în care procesele de amestec sînt practic oprite și ca atare densitatea rămîne aci constantă. Este interesantă valoarea acestei densități maxime, respectiv a concentrației minime corespunzătoare.

În prezența unui gradient de densitate a mediului înconjurător, $\partial \rho_m / \partial z \neq 0$, deflectarea jetului are loc la un anumit nivel limită, z_{lim}, la care forțele ascensionale devin nule (fig. 1*c*). În apă, acest nivel limită se poate găsi sub nivelul suprafeței libere, ceea ce ar prezenta un deosebit interes pentru practică (excluderea poluării la suprafața mării, fig. 1*e*).

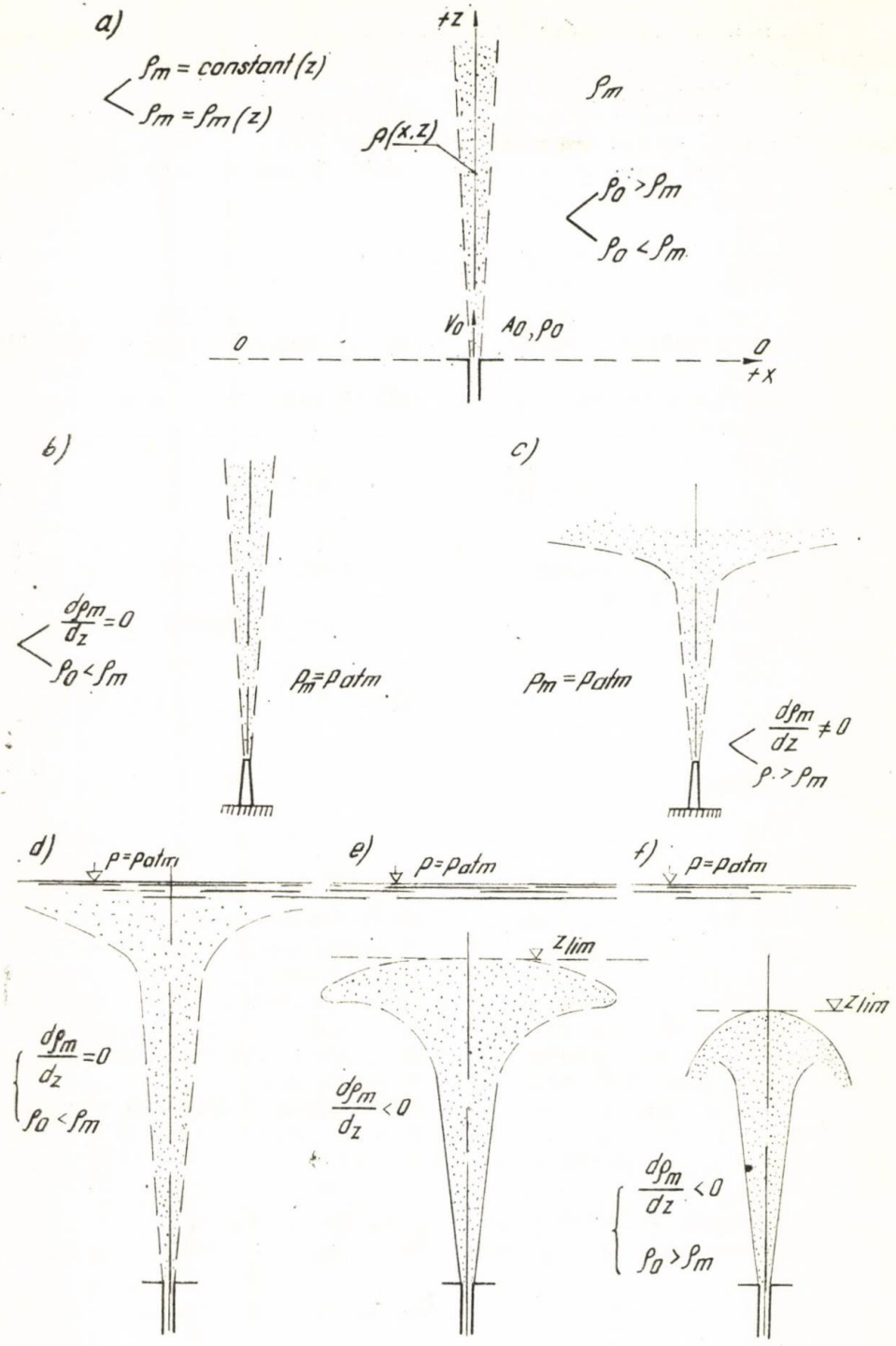


Fig. 1. — Schematizarea difuziei unui jet :

a) — Schemă generală: *b*), *c*) — Scheme pentru difuzia unui jet în atmosferă (fără gradient de densitate, respectiv cu gradient de densitate): *d*), *e*), *f*) — Scheme pentru difuzia unui jet în mediu lichid

În sfîrşit, în cazul unui jet de densitate mai mare decît cea a mediului fluid înconjurător ($\rho_0 > \rho_m$), la un anumit nivel limită, apare chiar un curent descendent (fig.1*f*).

2.2. Cîmpul mişcării este determinat de forţele care acţionează asupra fluidului în mişcare :

— Impulsul în secţiunea de suprafaţă A, transversală pe direcţia jetului, a cărui expresie este

$$F_i = \iint_A \rho\, \overline{v}_z^2\, dA. \tag{1}$$

Viteza iniţială V_0, imprimă jetului o energie cinetică specifică ($\rho V_0^2/2$) ;

— Rezultanta forţelor gravitaţionale în volumul de control fixat şi a căror expresie este

$$F_g = \iiint_{Vol} g\,(\rho_m - \rho)\, dVol. \tag{2}$$

Deci datorită diferenţei ($\rho_m - \rho$), fluidul din jet dispune şi de o anumită energie potenţială.

— Forţele de frecare pe suprafaţa laterală de separare A_1 între jet şi mediul fluid în repaus :

$$F_f = \int_{A_1} \tau\, dA_1, \tag{3}$$

în care se admite că

$$\tau = -\rho\, \overline{v_x' v_z'} = -\rho\varepsilon \frac{\partial \overline{v}_z}{\partial x}. \tag{4}$$

Acestea sînt forţele care disipează energia disponibilă a jetului.

Impulsul iniţial reprezintă o forţă ascensională numai dacă viteza iniţială, V_0 astfel îndreptată în sus, spre $+z$; forţele gravitaţionale sînt ascensionale dacă $\rho_m > \rho$, însă acţiunea lor ascensională se reduce dacă densitatea ρ_m scade spre suprafaţa liberă. Tocmai această reducere şi în cele din urmă anulare, asociată cu reducerea vitezelor în jet prin difuzie explică forma mişcării în cazurile din figura 1*c*, *e*, *f*.

2.3. Parametrii care descriu fenomenul, presupus staţionar, în mediul înconjurător omogen (ρ_m=const.) şi în repaus, sînt viteza locală $\overline{v}$ şi densitatea locală ρ, care la rîndul lor depind de :

— coordonate : x, z ;
— condiţiile în secţiunea iniţială : A_0, ($\sim r_0^2$), V_0, ρ_0 ;
— natura mediului fluid înconjurător : ρ_m, ν_m ; adică

$$\overline{v} = \overline{v}\,(x, z, A_0, V_0, \rho_0, \rho_m, \nu_m), \tag{5}$$

$$\rho = \rho\,(x, z, A_0, V_0, \rho_0, \rho_m, \nu_m), \tag{6}$$

(se iau în considerație jeturi plane sau axial simetrice, care prezintă interes practic; ca atare spațiul este definit numai cu două coordonate).

O analiză dimensională elementară conduce la concentrarea parametrilor; alegînd ca mărimi fundamentale V_0, ρ_0 și r_0 (o dimensiune liniară caracterizînd suprafața secțiunii inițiale A_0) se obține fără dificultăți:

$$\frac{\overline{v}}{V_0} = f_1\left(\frac{x}{r_0}, \frac{z}{r_0}, \frac{\rho_m - \rho_0}{\rho_0}, \mathcal{F}_{\rho_0}, \mathcal{R}e_0\right), \tag{7}$$

$$\frac{\rho_m - \rho}{\rho_m - \rho_0} = f_2\left(\frac{x}{r_0}, \frac{z}{r_0}, \frac{\rho_m - \rho_0}{\rho_0}, \mathcal{F}_{\rho_0}, \mathcal{R}e_0\right). \tag{8}$$

Această grupare pune în evidență următorii doi parametri:

— concentrația, c, definită în acest caz ($\partial \rho_m / \partial z = 0$) cu relația

$$c = \frac{\rho_m - \rho}{\rho_m - \rho_0}, \tag{9}$$

și care reflectă complementar variația densității;

— numărul Froude scris cu densitatea

$$\mathcal{F}_{\rho_0} = \frac{V_0^2}{\frac{\rho_m - \rho_0}{\rho_0} g r_0}, \tag{10}$$

care reprezintă raportul dintre forțele inerțiale și cele gravitaționale. Se observă că apar două cazuri limită:

— cazul unor fluide cvasiomogene, $\rho_m \simeq \rho_0$;

$$\mathcal{F}_{\rho_0} \to \infty; \tag{11}$$

— cazul în care impulsul, ρv^2, este neglijabil:

$$\mathcal{F}_{\rho_0} \to 0. \tag{12}$$

În primul caz, acțiunea forțelor gravitaționale este neglijabilă, în raport cu alte forțe, ceea ce are loc fie în vecinătatea sursei (unde V_0^2 este mare), fie la distanțe mari de sursă, unde $\Delta\rho \to 0$. În cazul al doilea, acțiunea forțelor gravitaționale este predominantă, ceea ce corespunde unor situații în care impulsul inițial V_0^2 e neglijabil.

Valori intermediare $\mathcal{F}_{\rho_0} \neq 0$ caracterizează zona cea mai întinsă a jetului.

În ce privește influența numărului Reynolds, $\mathcal{R}e_0$, se admite că aceasta este neglijabilă în raport cu ceilalți factori pentru jeturi turbulente; ipoteza a fost confirmată experimental pentru domeniul $\mathcal{R}e_0 \geqslant 5 \times 10^3$[6].

2.4. Cîmpul mișcării a fost studiat în mecanica fluidelor în special pentru cazul $\rho_m = \rho_0$ [1], [4].

Astfel, s-a demonstrat că variația presiunilor în direcția transversală axei jetului este neglijabilă, adică

$$\partial p/\partial x = 0, \tag{13}$$

iar în direcția mișcării depinde în principal de distribuția presiunilor în fluidul aflat în repaus, în zona exterioară mișcării ([4] pag. 182). Ca urmare se pot exclude din ecuațiile mișcării termenii de forma $\partial p/\partial x_j$.

Cinematica jeturilor omogene s-a studiat în următoarele două ipoteze:

— componentele vitezei medii pe direcțiile transversale ($\overline{v}_x$, $\overline{v}_y$) sînt neglijabile în raport cu cea axială ($\overline{v}_z$);

— schimburile de masă în direcția mișcării principale sînt neglijabile (lente) în raport cu cele pe direcțiile transversale.

Materialul experimental disponibil demonstrează că distribuția vitezelor medii în secțiuni normale pe axa jetului este invariantă, respectiv că pentru un jet dat, ar depinde numai de coordonate [3]. Adică, într-o secțiune dată:

$$\frac{\overline{v}}{\overline{v}_{ax}} = f\left(\frac{x}{z}\right), \tag{14}$$

unde z definește poziția secțiunii transversale pe axul jetului, iar $\overline{v}_{ax}$ este mărimea vitezei în axul jetului.

Pe baza invarianței profilelor vitezelor medii se poate accepta cu o bună aproximație că divergența conturului jetului este liniară:

$$\frac{r(z)}{z} = \text{const.} \tag{15}$$

Distribuția vitezelor a fost dedusă teoretic de mult, folosindu-se teoria lungimii de amestec și ipoteza că lungimea de amestec lateral ar fi proporțională cu lățimea jetului [1]. În aceste ipoteze expresia analitică a curbei (14) este (fig. 2)

$$\frac{\overline{v}}{\overline{v}_{ax}} = \exp.\left(-k\frac{x^2}{z^2}\right), \tag{16}$$

care este curba lui Gauss.

Aici, k este o mărime adimensională, considerată constantă și care se determină experimental. Cercetările experimentale efectuate au arătat

că valorile coeficientului k depind totuşi de geometria secţiunii iniţiale şi în genere şi de $\mathcal{F}_{k\rho_0}$, însă lent (tab. 2). Se înţelege că expresia analitică

Tabela 2

Date experimentale privind valorile coeficienţilor k şi k' din relaţiile distribuţiei vitezei şi concentraţiei într-un jet

Autorul	Tipul jetului	Valorile coef. k	Valorile coef. k'	k'/k	Domeniul $\mathcal{R}e$
	Jet circular,	$\Delta\rho = 0$	$\mathcal{F}_{k\rho} = \infty$		
Ricou ş.a. (1961)	aer	77	—	—	$2{,}5 \times 10^4$
Porech ş.a. (1959)	apă	100	—	—	$(5 \ldots 9)10^4$
Taylor ş.a. (1951)	aer	91	—	—	2×10^4
Corrsin ş.a. (1949)	aer cald	96	67	0,70	$(4 \ldots 6)10^4$
Hinze ş.a. (1949)	gaze calde	100	73	0.73	7×10^4
Forstall ş.a. (1955)	apă	83	68	0,82	—
Ruden (1933)	aer cald	87	66	0,76	—
	Jet circular	$\Delta\rho > 0$,	$\mathcal{F}_{k\rho} = 0$		
Abraham (1960)	apă/a. salină	77	62	0,80	2×10^4
Rouse ş.a. (1952)	aer cald	96	71	0,74	—
Schmidt (1941)	aer cald	48	57	1,33	—
	Jet plan,	$\Delta\rho = 0$,	$\mathcal{F}_{k\rho} = \infty$		
Miller ş.a. (1957)	aer	75	—	—	$1{,}8 \times 10^4$
Albertson ş.a. (1950)	aer cald	42	—	—	$(2.12)\ 10^3$
Reichardt (1942)	aer cald	55	27,5	0,50	$2{,}3 \times 10^4$
	Jet plan,	$\Delta\rho > 0$,	$\mathcal{F}_{k\rho} = 0$		
Rouse ş.a. (1952)	aer cald	32	41	—	1,28

(16) este valabilă după generalizarea stratului-limită, pentru că distribuţia vitezelor medii în secţiunea de margine la nivelul $z = 0$ este practic constantă (fig. 2):

$$\overline{v} = \overline{v}_{ax} = V_0. \tag{17}$$

Urmează o zonă, numită de stabilizare şi limitată de un nivel $z = z_s$, în care are loc generalizarea stratului-limită turbulent pe lăţimea secţiunii. În această zonă există un nucleu de viteză constantă şi egală cu viteza iniţială V_0 (fig. 2). Aşa cum au arătat experienţele, în zona de stabilizare vitezele sînt distribuite tot după curba lui Gauss, dar numai în afara nucleului de viteză constantă [2], [7]. În zona stabilizată a mişcării, deci pentru niveluri $z > z_s$, viteza în axul jetului scade după o lege care rămîne de determinat, însă oricum :

$$\overline{v}_{ax}(x) < V_0. \tag{18}$$

Strict vorbind, între zona de stabilizare şi zona stabilizată mai există o zonă de tranziţie. Însă ţinînd seama de obiectul urmărit în această lucrare, şi de lungimile lor relativ mici (de ordinul a $10 \ldots 20\ r_0$) într-o primă aproximaţie zonele de stabilizare şi de tranziţie nu vor fi luate în consideraţie. (vezi şi 3.2).

2.5. Aşa cum s-a mai menţionat şi cum rezultă şi din imaginea cinematicei, arătată în figura 2, reducerea concentraţiei unei substanţe

transportate de mediul purtător din jet are loc prin înglobarea continuă a anumitor volume din mediul fluid înconjurător în cîmpul mişcării. Acest proces este proporţional cu schimbul de mase între jet şi fluidul înconjurător; cum vectorul schimbului de masă este cîmpul vitezelor,

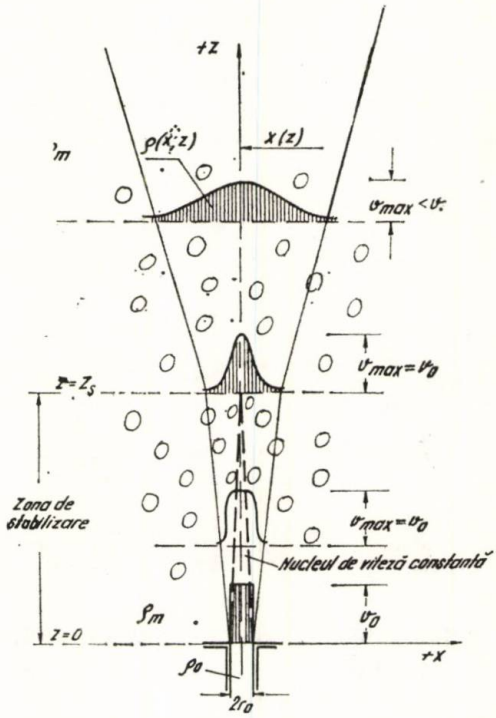


Fig. 2. — Difuzia unui jet ascendent într-o masă de fluid de densitate diferită. Notaţii

apare logică ipoteza că distribuţia concentraţiilor este asemenea cu cea a vitezelor. Această ipoteză este confirmată de un mare număr de experienţe [3], [6]. Ca urmare, se poate admite că într-o secţiune transversală dată distribuţia concentraţiilor este afină cu cea a vitezelor, adică

$$\frac{c}{c_{ax}} = \exp.\left(-k'\frac{x^2}{z^2}\right); \tag{19}$$

Aci k' este un coeficient de acelaşi tip cu k din relaţia (16). Datele experimentale disponibile arată că în mod sistematic $k' < k$, deci că substanţa transportată (în speţă poluantă) difuzează mai lent decît cantitatea în mişcare. Explicaţia acestui rezultat rezidă, probabil, în mecanismul intim al turbulenţei: în procesul de difuzie turbulentă mase finite de fluid îşi păstrează un anumit timp individualitatea (în sensul că toate punctele dintr-un anumit volum au o aceeaşi viteză într-un timp egal cu scara de turbulenţă Lagrange) deci în mod similar, se conservă şi concen-

traţia. Difuzia cantităţii de mişcare are loc în urma şocurilor, respectiv a redistribuirii maselor în alte volume, dar acest proces devansează redistribuirea (reducerea) concentraţiei, de unde şi decalajul reflectat de valorile coeficienţilor $k' < k$.

★

Din aspectele fizice descrise aci rezultă că fenomenul abordat este descris de sistemul ecuaţiilor variaţiei vitezei şi variaţiei concentraţiei în cîmpul mişcării

$$\overline{v} = \overline{v}(z, x) \quad , \quad \overline{c} = \overline{c}(z, x). \tag{20}$$

Ţinînd seama de relaţiile (16) şi (19), acest sistem se pote scrie:

$$\overline{v}_{ax} = \overline{v}_{ax}(z) \quad , \quad \overline{c}_{ax} = \overline{c}_{ax}(z), \tag{21}$$

şi asocia su ecuaţiile (16) şi (19), menţionate.

3. ECUAŢIILE FENOMENULUI

Pentru a stabili expresiile (20) sau (21), sînt disponibile următoarele ecuaţii:

3.1. *Ecuaţii de continuitate*, care exprimă legea conservării masei; în cazul de faţă se scriu două asemenea ecuaţii, una pentru mediul purtător, a doua pentru substanţa transportată. Ecuaţia de continuitate a mediului fluid purtător în formă diferenţială are expresia elementară (vezi şi expresiile (5) — (9)):

$$\frac{\partial \overline{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}_z}{\partial z} = 0. \tag{22}$$

Datorită simetriei cîmpului vitezelor, avem condiţia la limită:

$$\overline{v}_x = 0 \text{ pentru } x = 0, \tag{23}$$

astfel că integrînd ecuaţia precedentă după x (deci într-o secţiune transversală, A situată la un nivel z) se obţine

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_0^\infty \overline{v}_z \,\mathrm{d}x + v_x(z, \infty) = 0, \tag{24}$$

sau, independent de forma secţiunii transversale,

$$\mathrm{d}\int_A \overline{v}_z \,\mathrm{d}A = q_z \,\mathrm{d}z, \tag{25}$$

în care q_z este debitul specific antrenat de jet din mediul fluid înconjurător.

Se observă că ecuația de continuitate a mediului purtător introduce o funcție necunoscută suplimentară, q_z. Ecuația de continuitate a substanței transportate în formă diferențială are expresia

$$\frac{\partial c\overline{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial c\overline{v}_z}{\partial z} = 0, \tag{26}$$

în care c, definit cu relația (9), este o funcție de coordonate. Ținînd seama de ecuația la limită (23) și operînd ca în cazul precedent se obține forma :

$$\int_A c\overline{v}_z \, dA = \text{const.} \ (z) = A_0 c_0 V_0 \tag{27}$$

a ecuației de continuitate, care exprimă conservarea masei substanței transportate (poluante), din secțiune în secțiune.

3.2. *Ecuația mișcării* este o expresie a legii conservării cantității de mișcare (sau a echilibrului forțelor instantanee) și se scrie aplicînd teorema impulsului unui volum de control din fluidul în mișcare. Forma diferențială generală bine cunoscută a acestei ecuații este, în proiecție pe direcția Oz (într-un spațiu definit cu două coordonate) :

$$\rho\overline{v}_x \frac{\partial \overline{v}_z}{\partial x} + \rho v_z \frac{\partial \overline{v}_z}{\partial z} = (\rho_m - \rho)\, g + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}, \tag{28}$$

în care τ_{xz} are expresia (4), iar termenul $\partial p/\partial x$ este nul conform observațiilor de la § 2.4 și relației (13). Date fiind ipotezele adoptate, ecuația pe direcția Ox este nesemnificativă. În cazul jeturilor, admițînd o distribuție normală a vitezelor $\overline{v}_z$ după (16), apar următoarele condiții la limită :

$$\overline{v}_x = 0 \ \text{și} \ \frac{\partial \overline{v}_z}{\partial x} = 0, \quad \text{pentru} \quad x = 0 \quad \text{și} \quad x = \infty. \tag{29}$$

Ca urmare, pentru aceleași limite

$$\tau_{xz} = 0, \tag{30}$$

deși în tot domeniul $0 < x < \infty$, $\tau_{xz} \neq 0$.

Astfel, integrînd ecuația cu derivate parțiale (28) pe direcția x, între $x = 0$ și $x = \infty$, se obține

$$\frac{d}{dz}\int_0^\infty \rho\, \overline{v}_z^2 \, dx = \int_0^\infty (\rho_m - \rho)\, g\, dx. \tag{31}$$

Integrînd acum pe direcţia Oz se obţine

$$\int_0^\infty \overline{v}_z^2 \, \mathrm{d}x + C = \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}z \int_0^\infty (\rho_m - \rho) \, g \, \mathrm{d}x. \tag{32}$$

Constanta de integrare din partea dreaptă a ecuaţiei (32) reprezintă cantitatea de mişcare într-o secţiune de referinţă, la un nivel z. În mod strict, această secţiune ar coincide cu limita zonei de stabilizare a jetului (fig. 2). Însă :

— lungimea acestei zone e mică în raport cu lungimile care apar în problemele de control a poluării mediului ;

— diferenţele produselor $\rho\overline{v}_z$, sînt relativ mici, dată fiind tendinţa de compensare a factorilor produselor ;

— condiţiile la limită (29) sînt valabile şi în interiorul zonei de stabilizare.

Din toate aceste motive se consideră admisibil să se ia

$$z_0 = 0 \tag{33}$$

şi ca urmare

$$C = \rho_0 \, V_0^2 \, A_0. \tag{34}$$

Se rescrie acum ecuaţia mişcării şi, pentru o secţiune transversală de o formă oarecare se obţine

$$\int_A \rho \overline{v}_z^2 \, \mathrm{d}A - \rho_0 V_0^2 A_0 = g \int_0^z \mathrm{d}z \int_A (\rho_m - \rho) \, \mathrm{d}A. \tag{35}$$

În această formă, ecuaţia mişcării exprimă că forţele de impuls sînt echilibrate de forţele gravitaţionale.

3.3. Ecuaţiile integrale (25), (27) şi (35) formează un sistem închis, funcţiile necunoscute fiind $q(z)$, $c(z)$ şi $\overline{v}_z(x, z)$. În cazul unui jet axial simetric, de exemplu circular, cu diametrul iniţial $2\,r_0$, acest sistem capătă forma următoare :

$$\mathrm{d}\int_0^\infty \overline{v}_z r \, \mathrm{d}r = \frac{q_z}{2\pi} \mathrm{d}z, \tag{36}$$

$$2\int_0^\infty c \, \overline{v}_z \, r \, \mathrm{d}r = c_0 \, V_0 \, r_0^2, \tag{37}$$

$$2\int_0^\infty \rho \, \overline{v}_z^2 \, r \, \mathrm{d}r = \rho_0 \, V_0^2 \, r_0^2 + 2\,g \int_0^z \mathrm{d}z \int_0^\infty (\rho_m - \rho) \, r \, \mathrm{d}r. \tag{38}$$

În cazul unui jet bidimensional de lățime inițială $2b_0$ (problema plană) sistemul capătă forma următoare :

$$\mathrm{d}\int_0^\infty \overline{v}_z \,\mathrm{d}x = q_z \,\mathrm{d}z, \tag{39}$$

$$\int_0^\infty c\,\overline{v}_z \,\mathrm{d}x = c_0 V_0 b_0, \tag{40}$$

$$\int_0^\infty \rho\,\overline{v}_z^2 \,\mathrm{d}x = \rho_0 V_0^2 b_0 \cdot 1 + g\int_0^z \mathrm{d}z \int_0^\infty (\rho_m - \rho)\,\mathrm{d}x. \tag{41}$$

4. SOLUȚIILE ECUAȚIILOR

Pentru rezolvarea sistemului de ecuații (25), (27), (35) se asociază acestora relația de definiție (9) și expresiile (16) și (19) ale distribuției vitezelor și concentrațiilor medii într-o secțiune transversală. Se reamintește că obiectivul urmărit este obținerea unor relații (20), (21) explicite.

4.1. Pentru un jet axial simetric, circular, soluțiile se obțin plecînd de la sistemul (36) — (38) și operînd în succesiunea următoare :

— se trece de la mărimile $\overline{v}_z$ și c la mărimile $\overline{v}_{ax}$ și c_{ax}, dat fiind că distribuțiile în secțiune sînt date de (16) și (19) ;

— se elimină apoi c_{ax} între ultimele două ecuații ale sistemului, dat fiind că acestea conțin numai două din necunoscute și anume pe cele interesante, $\overline{v}_z$ și c.

În acest mod se vor obține de fapt relații de tipul (22).

— Se obține apoi expresia variației concentrației axiale c_{ax} (z). Așadar, din (16) și (19) se obține

$$\overline{v}_z = \overline{v}_{ax} \exp.\left(-k\frac{r^2}{z^2}\right), \quad c = c_{ax} \exp\left(-k'\frac{r^2}{z^2}\right). \tag{42}$$

Introducînd (42) în (37), (38) și observînd expresia cunoscută a integralei

$$\int_0^\infty \exp.(-au)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a}, \tag{43}$$

se obține din (37)

$$\left(\frac{1}{k+k'}\right) c_{ax}\,\overline{v}_{ax}\, z^2 = c_0 V_0 r_0^2, \tag{44}$$

respectiv din (38), neglijînd diferența $\Delta\rho$ față de ρ_0 în sume :

$$\frac{1}{2k} v_{ax}^2 z^2 = V_0^2 r_0^2 + g\int_0^z \frac{\rho_m - \rho_0}{k'\,\rho_0} c_{ax}\, z^2\,\mathrm{d}z. \tag{45}$$

Pentru a elimina acum pe c_{ax} între ultimele două ecuații, se deduce expresia c_{ax} din (44) și se introduce în (45) după ce aceasta se diferențiază în prealabil

$$\mathrm{d}\,(\overline{v}_{ax}^2 z^2) = \frac{2k}{k'}(k + k')\frac{\rho_m - \rho_0}{\rho_0} \cdot g\, V_0 r_0^2 c_0 \frac{\mathrm{d}z}{v_{ax}}. \tag{46}$$

Se obține astfel o ecuație diferențială obișnuită cu variabile separabile:

$$(\overline{v}_{ax}^2 \cdot z^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\,(\overline{v}_{ax}^2 z^2) = \frac{k\,(k + k')}{k'}\,\frac{\rho_m - \rho_0}{\rho_0}\, g V_0 r_0^2 c_0\,\mathrm{d}\,(z^2), \tag{47}$$

care se integrează direct și, ținînd seama și de (45), după cîteva operații simple se ajunge la următoarea expresie:

$$\frac{v_{ax}}{V_0} = \frac{r_0}{z}\left[\frac{3}{4}\,k\,(1 + k/k') \cdot \frac{c_0}{\mathcal{F}_{r_{\rho_0}}}\left(\frac{r_0}{z}\right)^{-2} + (2k)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}. \tag{48}$$

Introdusă în ecuația (37), această relație conduce la distribuția concentrației axiale:

$$\frac{c_{ax}}{c_0} = \frac{r_0}{z}\left[\frac{3}{4}\,k\,(1 + k/k') \cdot \frac{c_0}{\mathcal{F}_{r_{\rho_0}}}\left(\frac{r_0}{z}\right)^{-2} + (2k)^{\frac{3}{2}}\right]^{-\frac{1}{3}} \cdot k'\,(1 + k/k'). \tag{49}$$

A treia soluție a sistemului, q_z, se obține imediat, urmînd o procedură asemănătoare; astfel, din ecuația (36) avem

$$q_z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_0^\infty v_z\,\mathrm{d}\,(\pi r^2). \tag{50}$$

Folosind aceleași relații (42) și (43) rezultă

$$q_z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\pi}{k}\,v_{ax}\,z^2\right). \tag{51}$$

Înlocuind pe v_{ax} cu expresia sa dată de (48) și efectuînd operații banale, se obține în cele din urmă variația debitului specific antrenat în formă adimensională

$$\frac{q_z r_0}{Q_0} = \frac{1}{k}\left[\frac{3}{4}\,k\,(1 + k/k')\,\frac{c_0}{\mathcal{F}_{r_{\rho_0}}}\left(\frac{r_0}{z}\right)^{-2} + (2\,k)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} \times \tag{52}$$

$$\times\left\{1 + \frac{1}{2}\,k(1 + k/k')\,\frac{c_0}{\mathcal{F}_{r_{\rho_0}}}\left(\frac{r_0}{z}\right)^{-2}\left[\frac{3}{4}\,k(1 + k/k') \cdot \frac{c_0}{\mathcal{F}_{r_{\rho_0}}}\left(\frac{r_0}{z}\right)^{-2} + (2k)^{\frac{3}{2}}\right]^{-1}\right\}.$$

Relaţiile (48), (49) şi (52) asociate cu (42) constituie soluţiile căutate ale sistemului de ecuaţii (36) — (38) referitoare la un jet axial simetric, circular.

4.2. Pentru un jet plan de lăţime iniţială $2b_0$, soluţiile se obţin plecînd de la sistemul (39) — (41) şi urmînd o cale absolut analogă. Din (16) şi (19) rezultă

$$\overline{v}_z = \overline{v}_{ax} \exp\left(-k\frac{x^2}{z^2}\right), \quad c = c_{ax} \exp\left(-k'\frac{x^2}{z^2}\right). \tag{53}$$

Introducînd (50) în (40) şi (41) şi observînd expresia cunoscută

$$\int_0^\infty \exp(-au^2)\,du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \tag{54}$$

se obţine din (40)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{k+k'}\right)^{\frac{1}{2}} c_{ax}\, v_{ax}\, z = c_0\, V_0\, b_0, \tag{55}$$

iar din (41)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2k}\right)^{\frac{1}{2}} \rho_0\, v_{ax}^2\, z = \rho_0\, V_0^2\, b_0 + g\int_0^z \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{k'}\right)^{\frac{1}{2}} (\rho_m - \rho_0)\, c_{ax}\, z\, dz. \tag{56}$$

Se elimină c_{ax} dintre ultimele două ecuaţii, la fel ca în cazul precedent, şi se ajunge la ecuaţia diferenţială simplă :

$$(v_{ax}^2 z)^{\frac{1}{2}}\, d(v_{ax}^2 z) = \frac{2k(k+k')}{k'}\,\frac{\rho_m - \rho_0}{\rho_0}\, g V_0\, 2b_0\, c_0\, z^{\frac{1}{2}}\, dz. \tag{57}$$

Integrînd direct şi punînd condiţia la limită la fel ca în cazul precedent, se obţine în cele din urmă expresia variaţiei vitezelor axiale :

$$\frac{v_{ax}}{V_0} = \left[\left(\frac{2\,k(1+k/k')}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{c_0}{\mathcal{F}_{k\rho_0}} + \left(\frac{8k}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}}\left(\frac{b_0}{z}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}. \tag{58}$$

Variaţia concentraţiilor axiale rezultă imediat din (55) :

$$\frac{c_{ax}}{c_0} = \frac{b_0}{z}\left[\left(\frac{2k\,(1+k/k')}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{c_0}{\mathcal{F}_{k\rho_0}} + \left(\frac{8k}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}}\left(\frac{b_0}{z}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{-\frac{1}{3}} \times \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\left(1+\frac{k}{k'}\right)k'\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{59}$$

Relaţiile (58) şi (59) asociate cu (53) constituie două din soluţiile căutate ale sistemului (39) — (41) pentru cazul unui jet vertical plan.

Şi în cazul de faţă a treia soluţie a sistemului se obţine direct din ecuaţia (39) prin simple substituiri. Astfel :

$$q_z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_0^\infty v_z\,\mathrm{d}x, \tag{60}$$

şi apoi

$$q_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(v_{ax}\cdot z). \tag{61}$$

Înlocuind pe v_{ax} cu expresia sa din (58) şi efectuînd operaţiile corespunzătoare rezultă :

$$\frac{q_z}{q_0} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{k}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{b_0}\left[\left(\frac{2\,k(1+k/k')}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{c_0}{\mathcal{F}_{\kappa\rho_0}} + \left(\frac{8k}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}}\left(\frac{b_0}{z}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}\times \tag{62}$$

$$\times\left\{1 - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2k\,(1+k/k')}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{c_0}{\mathcal{F}_{\kappa\rho_0}} + \left(\frac{8k}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}}\left(\frac{b_0}{z}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{-1}\times\left(\frac{8k}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}}\cdot\left(\frac{b_0}{z}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}.$$

4.3. *Discuţia soluţiilor.* Se observă că soluţiile (48), (49) şi (58), (59) obţinute, sînt binome, ceea ce reflectă influenţa celor două forţe active luate în consideraţie : impulsul iniţial şi diferenţa de densitate.

În caz că diferenţa de densitate este neglijabilă, $\mathcal{F}_{\kappa\rho_0} \to \infty$ şi termenii respectivi se anulează. Rezultă în acest caz, pentru un jet circular,

$$\frac{v_{ax}}{V_0} = \frac{r_0}{z}\sqrt{2k}, \tag{48'}$$

respectiv

$$\frac{c_{ax}}{c_0} = \frac{r_0}{z}\cdot\frac{k'(1+k/k')}{\sqrt{2k}}. \tag{49'}$$

În caz că, din contră, predomină forţele gravitaţionale, se anulează ceilalţi termeni din paranteze şi rezultă

$$\frac{v_{ax}}{V_0} = \frac{r_0}{z}\left[\frac{3}{4}\,k\,(1+k/k')\frac{c_0}{\mathcal{F}_{\kappa\rho_0}}\left(\frac{r_0}{z}\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{3}}, \tag{48''}$$

respectiv

$$\frac{c_{ax}}{c_0} = \frac{r_0}{z}\left[\frac{3}{4}\,k\,(1+k/k')\,\frac{c_0}{\mathcal{F}_{\kappa\rho_0}}\left(\frac{r_0}{z}\right)^{-2}\right]^{-\frac{1}{3}}\times k'(1+k/k'). \tag{49''}$$

Se înțelege că relații absolut asemănătoare se obțin din (58) — (59) pentru un jet plan. Din comparația relațiilor (48′) și (49″) se constată că v_{ax} descrește *mai lent* pentru $\mathcal{F}_{\kappa_{\rho_0}} \to 0$ decît pentru $\mathcal{F}_{\kappa_{\rho_0}} \to \infty$, deși aparent acest rezultat ar fi paradoxal. Explicația rezidă în faptul că forțele ascensionale predominante în cazul $\mathcal{F}_{\kappa_{\rho_0}} \to 0$, accelerează masa de fluid din jet, în timp ce în celălalt caz, pe direcția axului jetului nu apar decît forțe de frînare.

Domeniu de valabilitate. Este de la sine înțeles că soluțiile (48)—(49) și (58), (59) sînt valabile în același domeniu ca și ipotezele în care au fost scrise ecuațiile de bază (36) — (41). Deci aceste soluții nu vor fi valabile în zona de deflectare a jetului în apropierea suprafeței libere, unde nu se mai poate accepta

$$\overline{v}_x, \overline{v}_y \ll \overline{v}_z \quad \text{și} \quad v'_x, v'_y \gg v'_z.$$

Lungimea zonei de stabilizare, z_s, se poate obține într-o primă aproximație din expresiile (44) sau (55) ale ecuației de continuitate. Într-adevăr, punînd în aceste relații

$$v_{ax} = V_0, \quad c_{ax} = c_0 \tag{63}$$

se obțin ecuații de forma

$$f(z_s) = 0,$$

din care se explicitează ușor lungimea z_s. Rezultă pentru un jet circular, din (44) :

$$z_s = r_0 \sqrt[4]{k + k'}; \tag{64}$$

pentru un jet plan, din (55) :

$$z_s = 2\, b_0 \sqrt{\frac{(k + k')}{\pi}}. \tag{65}$$

Aproximația inclusă în aceste expresii este ipoteza că egalitățile (63) au loc simultan. Introduse în ecuațiile (48), (49), respectiv în (58), (59), relațiile (64), (65) conduc la niște ecuații de forma

$$f(\mathcal{F}_{\kappa_{\rho_0}} k, k') = 0,$$

din care se deduce domeniul $\mathcal{F}_{\kappa_{\rho_0}}$ pentru care ipoteza menționată este acceptabilă. O altă indicație asupra gradului de aproximație al relațiilor (64), (65) se deduce din (48′) și (49′). Astfel, conform ecuației (64) avem

$$(z_s)_c = r_0 \sqrt[4]{2k}, \tag{66}$$

$$(z_s)_c = r_0 \frac{k + k'}{\sqrt[4]{2k}} \tag{67}$$

sau, înlocuind,

$$(z_s)_c = (z_s)_v \frac{1 + k'/k}{2}. \tag{68}$$

Se observă că, aşa cum era de prevăzut lungimile $(z_s)\ c$ şi $(z_s)\ v$ diferă în măsura în care $k \neq k'$ şi, cum $k' < k$ întotdeauna

$$(z_s)_c < (z_s)_v.$$

Ca ordin de mărime, se poate accepta

$$(z_s)_c = 0{,}9\ (z_s)_v. \tag{69}$$

Pentru a sesiza influenţa parametrului $\mathcal{F}_{K\rho_0}$ se deduce expresia lungimii z_s pornind, de exemplu, de la relaţia (49'') în care se ia, la fel ca mai înainte, $c_{ax} = c_0$. Se obţine :

$$(z_s)_c = r_0\,(k + k')^{\frac{2}{5}} \left(\frac{4}{3}\,\frac{k'}{k}\,\mathcal{F}_{K\rho_0}\right)^{\frac{1}{5}}, \tag{70}$$

care arată că influenţa parametrului $\mathcal{F}_{K\rho_0}$ asupra mărimii $(z_s)_c$ e relativ redusă. Pe de altă parte relaţia (70) conduce la valori apropiate la cele date de relaţia (64).

4.4. Pentru a fi utilizate în practică relaţiile (48), (49) şi (58), (59) trebuie completate cu rezultate experimentale privind valorile numerice ale coeficienţilor k şi k'.

Asemenea date au fost publicate şi cele considerate mai semnificative sînt strînse în tabela 2. Se observă o anumită împrăştiere a valorilor celor doi coeficienţi la diferiţi autori. ($k = 100 \ldots 32$, $k' = 73 \ldots$ $\ldots 27{,}5$). Pentru a sesiza importanţa acestei împrăştieri s-au efectuat o serie de calcule numerice de sondaj cu valori limită ale coeficienţilor $k = 100 \ldots 50$, $k' = 75 \ldots 25$, pentru valori $\mathcal{F}_{K\rho_0} = 1\ ;\ 10\ ;\ \infty$, atît pentru jet circular cît şi pentru un jet plan. Calculele au fost efectuate pentru un domeniu spaţial larg, resp. $z \leqslant 1\,000\ r_0$.

Rezultatele acestor calcule sînt prezentate în tabela 3. Din examinarea rezultatelor numerice se observă că :

a) ecartul variaţiei valorilor coeficienţilor k şi k' se resimte mai puţin în variaţia vitezelor (v_{ax}/V_0) dar se propagă aproape integral în variaţia concentraţiilor ;

b) atît vitezele cît şi concentraţiile variază liniar cu $\mathcal{F}_{K\rho_0}$ la limita superioară a domeniului şi cvasiliniar în interiorul domeniului $1 < \mathcal{F}_{K\rho_0} < \infty$, pentru toate valorile k şi k' sondate (fig. 3,4) ;

c) există o diferenţiere a pantelor acestor drepte, după forma jetului, respectiv jetul plan difuzează mai lent decît cel circular (tridimensional) ;

Tabela 3

Influența variației coeficienților k și k'

Tipul jetului și parametrii comparați		$\mathcal{F}_{K_{p_0}} =$	$k = 100$	$k' = 75$		$k = 75$	$k' = 60$		$k = 50$	$k' = 25$	
			1	10	∞	1	10	∞	1	10	∞
Jet circular		$\frac{r_0}{z} =$ 1/20	1,0	0,975	0,707	1,650	0,868	0,612	1,560	0,790	0,500
	$\frac{v_{ax}}{V_0}$	1/100	1,0	0,492	0,141	0,946	0,442	0,122	0,908	0,424	0,100
		1/200	0,836	0,386	0,070	0,750	0,370	0,061	0,722	0,335	0,050
		1/1000	0,488	0,227	0,014	0,440	0,203	0,012	0,424	0,196	0,010
		$\frac{r_0}{z} =$ 1/20	0,239	0,450	0,620	0,182	0,395	0,550	0,112	0,235	0,375
	$\frac{c_{ax}}{c_0}$	1/100	0,016	0,170	0,124	0,125	0,027	0,110	0,008	0,018	0,075
		1/200	0,006	0,011	0,062	0,004	0,085	0,055	0,002	0,006	0,037
		1/1000	0,0004	0,008	0,0012	0,0003	0,005	0,011	0,0002	0,0004	0,007
Jet plan		$\frac{b_0}{z} =$ 1/20	2,350	1,245	0,890	2,190	1,170	0,830	1,010	1,020	0,750
	$\frac{v_{ax}}{V_0}$	1/100	2,310	1,090	0,404	2,185	1,035	0,377	1,000	0,990	0,340
		1/200	2,308	1,080	0,089	2,180	1,025	0,083	1,000	0,990	0,075
		1/1000	2,300	1,070	0,126	2,180	1,015	0,118	0,990	0,990	0,034
		$\frac{b_0}{z} =$ 1/20	0,370	0,700	0,970	0,297	0,584	0,786	0,226	0,495	0,646
	$\frac{c_{ax}}{c_0}$	1/100	0,075	0,159	0,431	0,060	0,126	0,320	0,085	0,100	0,310
		1/200	0,038	0,106	0,097	0,015	0,090	0,276	0,029	0,050	0,209
		1/1000	0,007	0,017	0,037	0,006	0,013	0,111	0,004	0,021	0,105

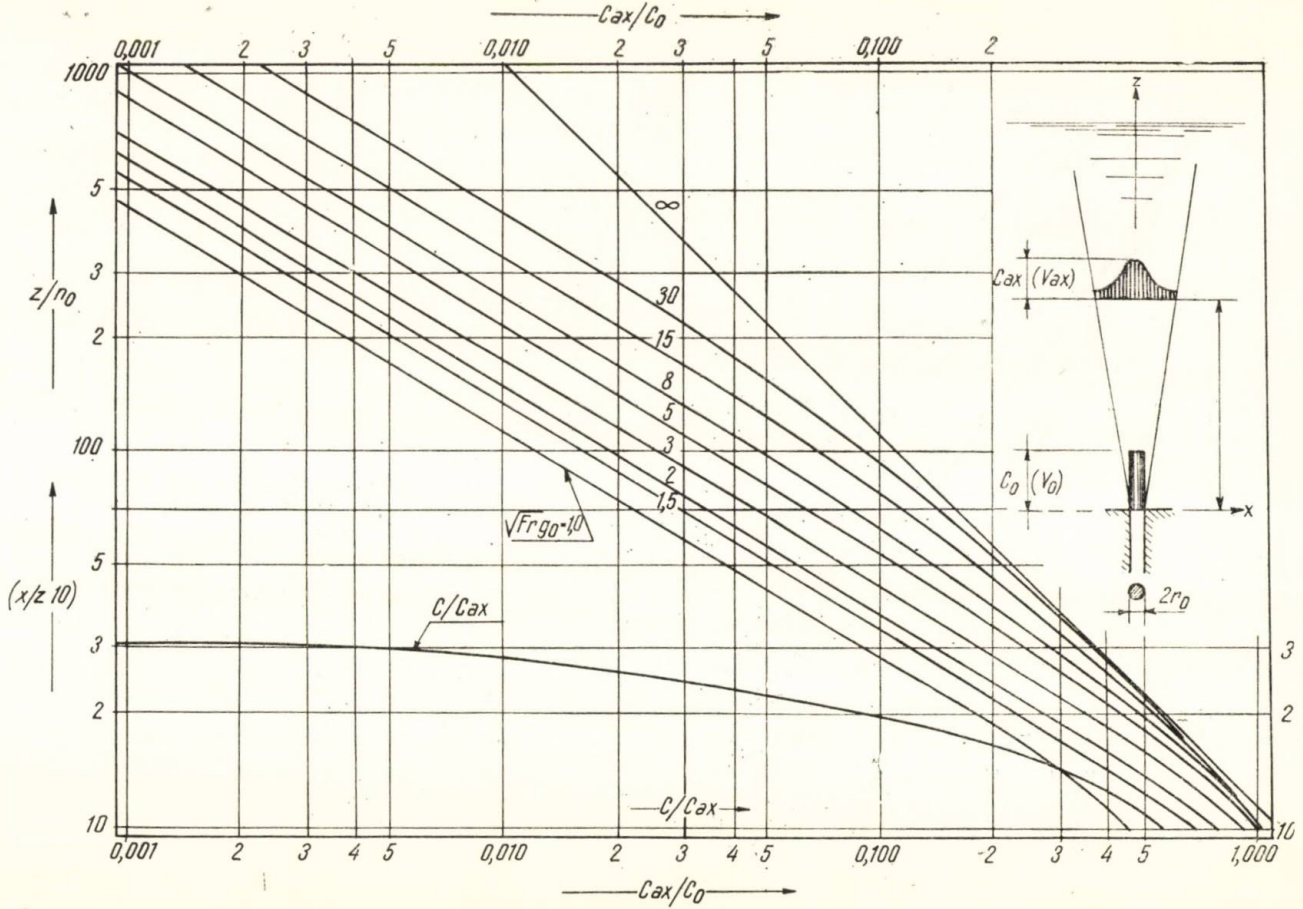


Fig. 3. — Diagrama cîmpului concentrațiilor într-un jet vertical circular

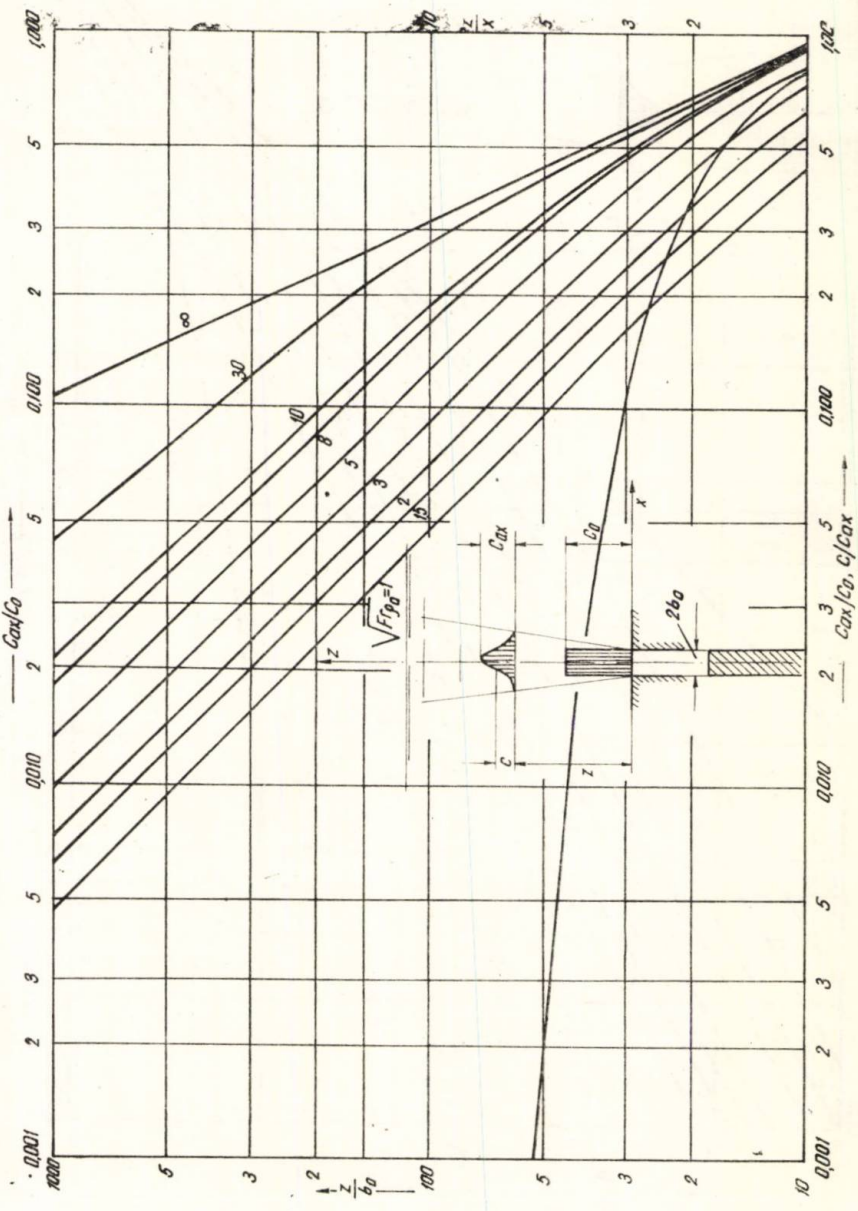


Fig. 4. — Diagrama cîmpului concentrațiilor într-un jet vertical plan

d) pentru anumite valori ale coeficienților k și k', ale numărului $\mathcal{F}_{K_{\rho_0}} < 10$ și ale raportului z/r_0 s-au obținut valori supraunitare ale raportului v_{ax}/V_0, evident, lipsite de sens fizic. Apariția acestor valori se poate interpreta în două moduri :

— fie că pentru valoarea respectivă a numărului $\mathcal{F}_{K_{\rho_0}}$ punctul z/r_0 este situat în interiorul zonei de stabilizare a jetului, în care soluțiile obținute nu sînt valabile ;

— fie că valorile respective ale coeficienților k și k' nu corespund fizicii mișcării.

Sub acest aspect se poate observa că diferențierea semnalată între jetul circular și cel plan se accentuează ;

— la jetul circular rapoarte $v_{ax}/V_0 > 1$ apar în special în cazul predominanței factorilor cinetici ($\mathcal{F}_{K_{\rho_0}} \simeq 1$) și în apropiere de sursă, ceea ce este fizic explicabil ($z < 20\, r_0$) ;

— la jetul plan rapoarte $v_{ax}/V_0 > 1$ apar în tot domeniul pentru valori $k \geqslant 50$ și $k' > 25$.

Oricum, din observațiile precedente se poate conchide că :

— valorile de lucru ale coeficienților k și k' trebuie diferențiate după forma jetului (circular, plan) ;

— pentru jetul plan trebuie să se ia $k \leqslant 50$ și $k' \leqslant 25$.

O alegere finală a valorilor de lucru trebuie făcută, se înțelege, pe baza unor rezultate experimentale. În acest scop s-au folosit rezultate experimentale obținute de alți cercetători în condițiile cele mai apropiate de ale noastre [6]. Cu relațiile respective s-au efectuat o serie de calcule comparative (tabela 4). Diferențele procentuale mici apărute din calcule arată că :

— rezultatele obținute cu relațiile (48), (49) și (58), (59) sînt coerente și foarte apropiate de cele date de relațiile altor cercetători, mai complete, dar mai complicate.

— ținînd seama de modul cum a fost abordată problema de noi, respectiv de autorii la care se face referința, se poate conchide că distribuția vitezelor și a concentrațiilor în zona de stabilizare a jetului are o influență care scade rapid cu distanța z de la sursă ;

ca urmare, diferențele între impulsul în secțiunea de debușare și impulsul în secțiunea de stabilizare se pot neglija atunci cînd se urmărește difuzia concentrației la distanță mare de sursă ;

— valorile de calcul ale coeficienților k și k' se pot lua după cum urmează :

pentru un jet circular... $k = 75$, $k' = 60$;

pentru un jet plan.....$k = 50$, $k' = 25$.

Cu aceste valori relațiile de calcul (48), (49) și (58), (59) capătă forma de lucru următoare :

— pentru un jet circular :

$$\frac{v_{ax}}{V_0} = \frac{r_0}{z}\left[126{,}6\,\frac{c_0}{\mathcal{F}_{K_{\rho_0}}}\left(\frac{r_0}{z}\right)^{-2} + 1835\right]^{\frac{1}{3}}, \tag{71}$$

$$\frac{c_{ax}}{c_0} = \frac{r_0}{z}\left[126{,}6\,\frac{c_0}{\mathcal{F}_{K_{\rho_0}}}\left(\frac{r_0}{z}\right)^{-2} + 1835\right]^{-\frac{1}{3}} \times 135, \tag{72}$$

Tabela 4

Compararea rezultatelor proprii cu cele din literatură

Elementele comparate		$\mathcal{F}_{\kappa\rho_0}$	După [6] $k = 77$	După [6] $k' = 62$		După relațiile (48), (49) și (58), (59)			Diferențe %		
			1	10	∞	1	10	∞	1	10	∞
Jet circular	$\frac{v_{ax}}{V_0}$	$\frac{r_0}{z} = 1/20$	1,00	1,0	0,600	1,00	0,876	0,612	—	—	+2,3
		1/100	1,00	0,510	0,125	1,00	0,447	0,122	—	—	−0,8
		1/200	0,920	0,420	0,064	0,860	0,371	0,061	−6,5	−11	−3,8
	$\frac{c_{ax}}{c_0}$	1/20	0,185	0,360	0,530	0,182	0,395	0,550	−1,6	+9	+4
		1/100	0,013	0,029	0,110	0,0125	0,027	0,110	−3,8	−7	0
		1/200	0,004	0,009	0,056	0,0004	0,0085	0,055	±0	−5	−2
Jet plan	$\frac{v_{ax}}{V_0}$	$\frac{b_0}{z} = 1/20$	1,00	1,00	0,745	1,00	1,000	0,750	—	—	+0,7
		1/200	1,000	1,00	0,235	1,00	0,990	0,337	—	−1,0	+1,8
		1/600	1,00	1,00	0,132	1,00	0,990	0,136	—	−1,0	+3,0
	$\frac{c_{ax}}{c_0}$	1/20	0,230	0,460	0,640	0,226	0,495	0,646	+1,7	+5,7	+0,9
		1/200	0,024	0,052	0,230	0,029	0,050	0,229	+5,0	−4,0	+4,0
		1/600	0,007	0,017	0,120	0,0076	0,016	0,118	±0,0	−5,0	−1,8

$$\frac{q_z r_0}{Q_0} = \frac{1}{75} \cdot A_1^{\frac{1}{3}} \left[1 + 84{,}4 \cdot \frac{c_0}{\mathcal{F}_{\kappa_{\rho_0}}} \left(\frac{z}{r_0} \right)^2 \cdot A_1^{-1} \right], \tag{73}$$

în care

$$A_1 = 126{,}6 \cdot \frac{c_0}{\mathcal{F}_{\kappa_{\rho_0}}} \left(\frac{r_0}{z} \right)^{-2} + 1835, \tag{74}$$

— respectiv pentru un jet plan

$$\frac{v_{ax}}{V_0} = \left[9{,}76 \frac{c_0}{\mathcal{F}_{\kappa_{\rho_0}}} + 38 \left(\frac{b_0}{z} \right)^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}, \tag{75}$$

$$\frac{c_{ax}}{c_0} = \frac{b_0}{z} \left[9{,}76 \frac{c_0}{\mathcal{F}_{\kappa_{\rho_0}}} + 38 \left(\frac{b_0}{z} \right)^{\frac{3}{2}} \right]^{-\frac{1}{3}} \times 9{,}76, \tag{76}$$

$$\frac{q_z}{q_0} = 0{,}0624 \frac{1}{b_0} A_2^{\frac{1}{3}} \left[1 - 19 A_2^{-1} \left(\frac{b_0}{z} \right)^{\frac{3}{2}} \right]^{-\frac{1}{3}}, \tag{77}$$

în care

$$A_2 = 9{,}76 \frac{c_0}{\mathcal{F}_{\kappa_{\rho_0}}} + 38 \left(\frac{b_0}{z} \right)^{\frac{3}{2}}. \tag{78}$$

4.5. *Diagrame de lucru.* Pentru a facilita folosirea lor, relaţiile de calcul stabilite au fost reprezentate grafic ca diagrame de forma

$$\frac{c_{ax}}{c_0} = f\left(\frac{r_0}{z}, \mathcal{F}_{\kappa_{\rho_0}} \right), \quad \frac{c_{ax}}{c_0} = f\left(\frac{b_0}{z}, \mathcal{F}_{\kappa_{\rho_0}} \right) \tag{79}$$

într-un domeniu suficient de larg pentru practică ($\mathcal{F}_{\kappa_{\rho_0}} = 1 \ldots \infty$, $\frac{r_0}{z}, \frac{b_0}{z} = 20 \ldots 1\,000$ (fig. 3,4)

Pe aceleaşi diagrame s-a reprezentat şi curba variaţiei concentraţiei pe direcţia transversală mişcării, calculată cu relaţia (19). Astfel, cu ajutorul acestor diagrame se poate determina rapid şi precis cîmpul concentraţiilor, pentru condiţii iniţiale ($\mathcal{F}_{\kappa_{\rho_0}}$, r_0, b_0) date.

Primită la redacţie la 16 august 1972

BIBLIOGRAFIE

1. W. Tollmien, *Strahlverbreiterung*, ZAMM, 468—478, 1926.
2. M. L. Albertson şi colab., *Diffusion of submerged jets*, In Trans. ASCE (1950) *2409*.
3. G. N. Abramovici, *Teoriia turbulentih strui*. Gos. izd. fiz. mat. liter, Moskva, 1960.
4. J. O. Hinze, *Turbulence*, Mc Graw Hill, N. Y. 1959.
5. B. R. Morton, *Forced plumes*, In Jurn. of Fl. Mech, *1* (1959).
6. G. Abraham, *Jet diffusion in stagnant ambient fluid*, Delft Hydr. Labor. Public, *29* (1963).
7. H. Rouse şi colab., *Gravitational convection from a boundary source*, Tellus, *3*, (1952).
8. K. Cederwall, *Buoyant slot jets into stagnant or flowing environments*, Cal. Inst. of Technology. Report no KH—R—25, april, 1971.

ASPECTE TEORETICE CARACTERISTICE ŞI METODĂ DE CALCUL PENTRU LAGĂRELE RADIALE HIDROSTATICE FĂRĂ CANALE LONGITUDINALE, UNSE CU LICHIDE*)

de GH. MANEA, D. HÎNCU, V. SIMIONESCU, M. DUMBRAVĂ şi D. ANASTASESCU
Institutul politehnic Bucureşti,
Institutul de cercetări şi proiectări
maşini-unelte şi agregate Bucureşti

Abordarea teoretică a problemei a dus la elaborarea relaţiilor pentru elementele principale — presiuni, portanţă, debit de lubrifiant, rigiditate — valabile pentru cazul general. Familiile de curbe trasate în coordonate corespunzătoare au pus în evidenţă interdependenţa dintre geometria lagărului, alimentare şi condiţii funcţionale.

Sînt indicate modalităţi de calcul practic de proiectare cu folosirea acestor diagrame, la nevoie prin interpolări.
S-a elaborat de asemenea un program de calcul pe maşini electronice, care permite dimensionarea exactă a lagărelor din categoria considerată.

1. CONTURAREA PROBLEMEI

Tipul de lagăr tratat, cu praguri circumferenţiale *fără* canale între degajări, important sub aspect practic prin portanţa sporită şi dificultăţi tehnologice mai reduse în comparaţie cu lagărul hidrostatic prevăzut *cu* canale longitudinale de scurgere, prezintă totodată dificultăţi matematice mai mari în abordarea analitică, implicînd considerarea influenţei reciproce a proceselor de curgere din diferitele degajări, condiţionate de modul specific de circulaţie a fluidului.

Dificultăţile de investigaţie decurg, la lagărele hidrostatice, şi din strînsa dependenţă a posibilităţilor funcţionale de parametrii caracteristici ai sistemului de alimentare, „lagărul" propriu-zis şi „alimentarea" constituind un „sistem" unitar.

*) Lucrare prezentată în Sesiunea ştiinţifică de comunicări a Academiei Republicii Socialiste România din 14 decembrie 1971.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 32, NR. 1, 1973, P. 81—103

Sînt arătate aici expresiile analitice finale obținute în studii anterioare pentru elementele funcționale de bază — presiuni, portanță, debit de lubrifiant, rigiditate — pentru cazul general al lagărului hidrostatic, cu un număr *oarecare* de degajări alimentate prin *restrictoare capilare*, cu fusul în rotație și sarcina acționînd sub un unghi oarecare.

Ca progres față de alți cercetători, în tratarea teoretică a problemei s-a introdus *variația presiunii* între degajări, în locul acceptării unei presiuni medii în aceste zone; iar în determinarea debitului axial, s-a considerat variația reală a interstițiului dintre fus și cuzinet, corespunzător celui dintre doi cilindri excentrici, în locul unei înălțimi medii a acestui interstițiu.

Folosind bazele teoretice obținute, cu ajutorul calculatoarelor numerice au fost elaborate familii de curbe corespunzătoare unui cîmp valoric uzual, care au permis fixarea unor concluzii orientative asupra parametrilor cu efect determinant.

Reprezentările în coordonate adecvate au fost totodată utilizate pentru schematizarea unor metode de calcul practic, în funcție de elementele cunoscute, fixate inițial. Un program complet de calcul, realizat în final, permite rezolvarea exactă pentru oricare caz în care datele inițiale nu se suprapun cu cele valabile pentru curbele date, sau cînd interpolările nu corespund preciziei cerute și, bineînțeles, se dispune de mașina de calcul corespunzătoare.

2. NOTAȚII (fig. 1 și 2)

2.1. INDICI

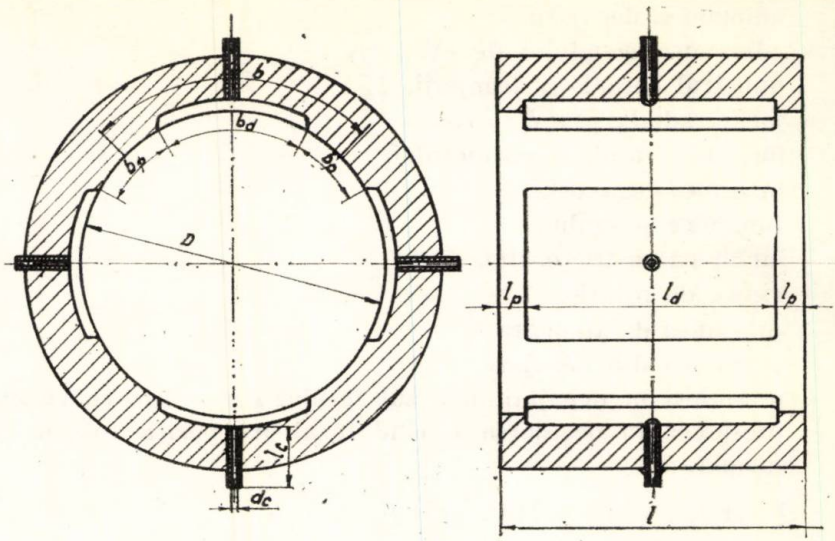
a — axial; alimentare,
b — circumferențial,
d — degajare,
m — mediu,
p — prag,
r — restrictor,

2.2. SIMBOLURI

b_d — lățimea degajării,
b_k — lățimea canalului longitudinal,
b_p — lățimea pragului,
c — rigiditatea,
d — diametrul fusului,
d_c — diametrul restrictorului capilar,
e — excentricitatea,
h — grosimea filmului de lubrifiant,
$h_0 = h_{min}$ — grosimea minimă a filmului,
h_0^* — grosimea filmului pentru excentricitatea zero ($\varepsilon = 0$)

$$h_0^* = R - r,$$

h_d — adîncimea degajării,
h_k — adîncimea canalului de evacuare,
i — numărul curent al degajării,
j — jocul radial; $j = R - r$,
l — lungimea totală a cuzinetului,
l_d — lungimea degajării,
l_p — lungimea pragului,
l_c — lungimea restrictorului,
n — viteza de rotaţie,
p_a — presiunea de alimentare,
p_d — presiunea din degajare,
p_{d_0} — presiunea în degajări în cazul fusului concentric cu cuzinetul,
p_{d_i} — presiunea în degajarea i, cînd fusul are poziţie excentrică în cuzinet,
p_m — presiunea medie a lagărului; $p_m = \dfrac{P}{d.l}$,
p_{md} — presiunea medie pe degajare,
p_0 — presiunea atmosferică,
$\bar{p}$ — portanţa specifică adimensională,
p_p — presiunea pompei,
q_a — debitul alimentat prin restrictor,
q_i — debitul axial corespunzător degajării i,
q_{ci} — debitul circumferenţial corespunzător degajării i,
t — timpul,
v — viteza uleiului pe direcţia periferică,
w — viteza uleiului pe direcţia axială,
z — numărul degajărilor,
A — aria,
D — diametrul interior al cuzinetului,
P — sarcina exterioară,
P_{lim} — capacitatea limită de încărcare,
Q — debitul total de lubrifiant,
T — temperatura,
α — unghiul curent,
α_i — unghiul de poziţie al degajării i,
γ — unghiul de direcţie a forţei faţă de linia zero,
η — viscozitatea dinamică a lubrifiantului,
ε — excentricitatea relativă,
φ_d — unghiul la centru al degajării,
φ_p — unghiul la centru al pragului,
λ — coeficientul de alimentare al restrictorului capilar,
ρ — densitatea uleiului,
μ — coeficientul de frecare,
ω — viteza unghiulară,
θ — unghiul liniei centrelor faţă de linia zero.



Parametrii geometrici

1. Global al lagărului $k = \frac{D}{l} \approx \frac{d}{l}$
2. De lungime $k_l = \frac{l_d}{l}$
3. Circumferențial $k_b = \frac{b_d}{b}$
4. De alimentare $\lambda = \frac{32}{3\pi} \frac{l_c h_o^{*3}}{d_c^4}$
5. Joc relativ $\psi = \frac{\Delta R}{R} = \frac{h_o^*}{R}$

Parametrii funcționali

1. De presiune $\bar{p}_{di} = \frac{p_{di}}{p_a}$
2. De debit $\bar{q}_i = \frac{q_i}{\frac{p_{di}}{6\eta} \frac{h_o^{*3} k}{1-k_l}}$
3. De portanță alimentată $k_\omega = \frac{\eta \omega}{p_a \psi^2}$
4. Portanță adimensională $\bar{P} = \frac{P}{dl p_a} = \frac{p_m}{p_a}$
5. Excentricitatea relativă $\varepsilon = \frac{e}{\Delta R} = \frac{e}{h_o}$

Fig. 1

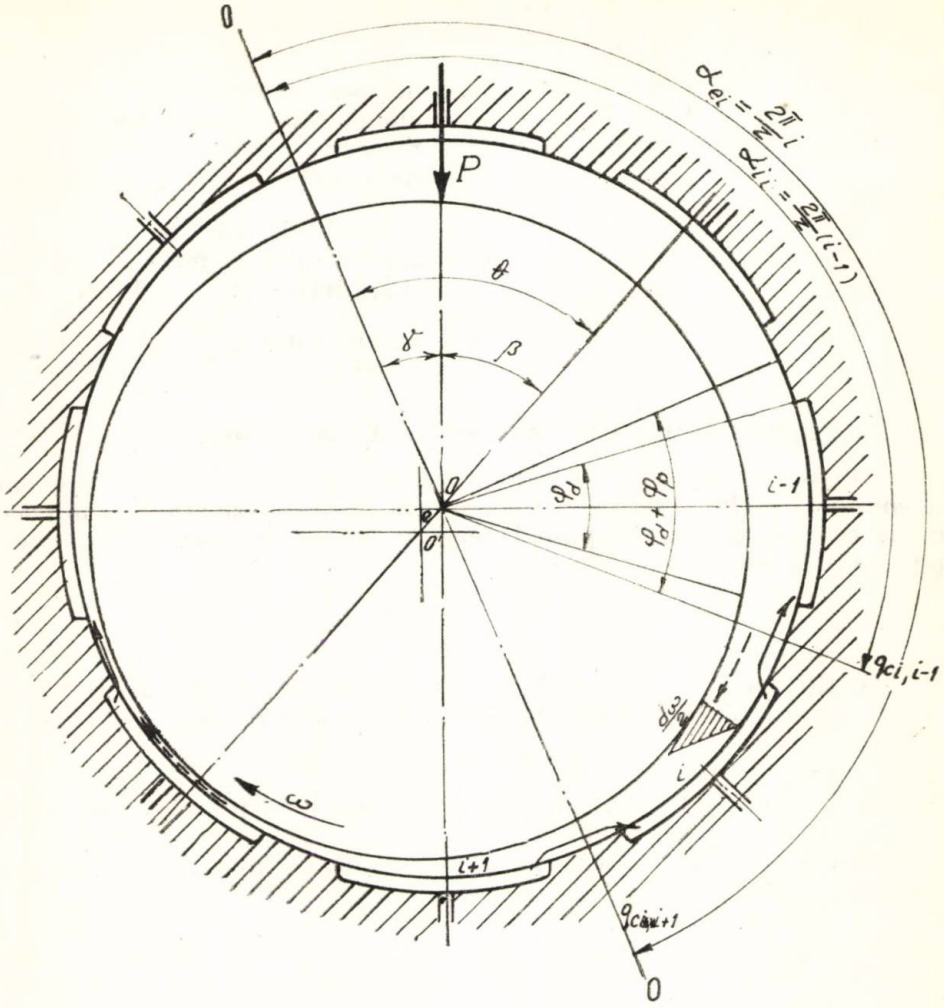


Fig. 2

2.3. PARAMETRI CARACTERISTICI ADIMENSIONALI

Parametri geometrici

— global al lagărului : $k = \frac{D}{l} \cong \frac{d}{l}$,

— de lungime : $k_l = \frac{l_d}{l}$,

— circumferenţial : $k_b = \frac{b_d}{b}$,

Parametri funcţionali

— de presiune : $\bar{p}_{di} = \frac{p_{di}}{p_a}$,

— de debit : $\bar{q}_i = \frac{q_i}{\frac{p_{di}}{6\eta} \frac{h_0^{*3} \cdot k}{1 - k_l}}$,

— jocul relativ : $\Psi = \frac{\Delta R}{R} = \frac{h_0^*}{R}$,

— de alimentare : $\lambda = \frac{32}{\pi} \frac{l_c h_0^{*3}}{d_c^4}$,

— de portanță alimentată, respectiv de viteză : $k_\omega = \frac{\eta\omega}{p_a \Psi^2}$,

— portanță relativă sau presiune medie relativă : $\overline{p} = \frac{p}{d \cdot l \cdot p_a} = \frac{p_m}{p_a}$,

— excentricitatea relativă : $\varepsilon = \frac{e}{\Delta R} = \frac{e}{h_0^*}$.

3. EXPRESII ANALITICE PENTRU ELEMENTELE FUNCȚIONALE DE BAZĂ

După cum numărul pragurilor dintre degajări este impar sau par, se consideră că linia zero $0 - 0$ trece prin centrul cuzinetului și mijlocul unuia sau a două praguri opuse. Direcția de acționare a forței este decalată față de linia centrelor cu unghiul

$$\beta = \theta - \gamma. \tag{1}$$

La fusul în repaus devine $\theta = \gamma$.

Înălțimea h a peliculei de lubrifiant, într-un punct oarecare determinat prin unghiul α față de linia $0-0$, este dată de relația

$$h = h_0^{*3}[1 + \varepsilon \cos(\alpha - \theta)], \tag{2}$$

în care h_0^* reprezintă jocul radial, respectiv grosimea filmului cînd centrul fusului coincide cu cel al cuzinetului.

În cazul de față problema a fost rezolvată folosind echilibrul de debite în interdependență de presiuni.

3.1. *Bilanțul de debite.* Spre deosebire de lagărul hidrostatic *cu* canale longitudinale, la care fiecare degajare poate fi privită, din acest punct de vedere, ca o unitate neinfluențată de presiunile din degajările vecine, pragurile continui implică dependența debitelor de presiunile din degajările din amonte și din aval, deci cuprinderea procesului în expresiile analitice cu considerarea simultană a tuturor buzunarelor.

Echilibrul de debite în fiecare degajare se exprimă în forma

$$q_a - q_i - q_{c_{i,\,i+1}} - q_{c_{i,i-1}} = 0, \tag{3}$$

n care se înlocuiesc

— debitul alimentat

$$q_a = \frac{p_a - p_{d_i}}{128\,\eta} \cdot \frac{\pi d_c^4}{l_c}, \tag{4}$$

— debitul axial corespunzător degajării i

$$q_i = \frac{1}{12\eta} \cdot \frac{k}{1 - k_l} h_0^{*3} p_{d_i} \overline{q}_i = \frac{k}{1 - k_l} \frac{p_a h_0^{*3}}{12\eta} \overline{p}_{d_i} \overline{q}_i, \tag{5}$$

în care

$$\bar{q}_i = \int_{\frac{2\pi}{z}(i-1)}^{\frac{2\pi}{z}i} 2[1 + \varepsilon \cos(\alpha - \theta)]^3 \cdot \mathrm{d}\alpha,$$

— debitele peste pragurile circumferențiale succesive

$$q_{c_{i,i+1}} = \frac{z}{\pi} \frac{k_l}{k(1-k_b)} \frac{p_{d_i} - p_{d_{i+1}}}{12\,\eta} h_0^{*3} \left[1 + \varepsilon \cos\left(\frac{(2\pi)}{z} i - \theta\right)\right]^3 +$$

$$+ \frac{\mathrm{d} \cdot \omega}{4} l_a h_0^* \left[1 + \varepsilon \cos\left(\frac{2\pi}{z} i - \theta\right)\right],$$

$$q_{c_{i,i-1}} = \frac{z}{\pi} \frac{k_l}{k(1-k_b)} \frac{p_{d_i} - p_{d_{i-1}}}{12\eta} h_0^{*3} \left\{1 + \varepsilon \cos\left[\frac{2\pi}{z}(i-1) - \theta\right]\right\}^3 -$$

$$- \frac{\mathrm{d} \cdot \omega}{4} l_d h_0^* \left\{1 + \varepsilon \cos\left[\frac{2\pi}{z}(i-1) - \theta\right]\right\}, \qquad (6)$$

După efectuarea calculelor și introducerea notațiilor

$$A_i = \frac{k}{1 - k_l} \lambda \bar{q}_i,$$

$$B_{i,i+1} = \frac{z}{\pi} \frac{k_l}{k(1-k_b)} \lambda \left[1 + \varepsilon \cos\left(\frac{2\pi}{z} i - \theta\right)\right]^3,$$

$$C_{i,i-1} = \frac{z}{\pi} \frac{k_l}{k(1-k_b)} \lambda \left[1 + \varepsilon \cos\left[\frac{2\pi}{z}(i-1) - \theta\right]\right]^3,$$

$$D_i = 1 + 24 \frac{k_\omega k_l}{k} \lambda \varepsilon \sin \frac{\pi}{z} \sin\left[\frac{\pi}{z}(2i-1) - \theta\right]$$

și

$$\bar{A}_i = 1 + A_i + B_{i,i+1} + C_{i,i-1},$$

în final, echilibrul de debite corespunzător degajării i, pentru orice număr de degajări, se exprimă prin

$$D_i - \bar{A}_i \bar{p}_{d_i} + B_{i,i+1} \bar{p}_{d_{i+1}} + C_{i,i-1} \bar{p}_{d_{i-1}} = 0. \qquad (7)$$

Acest sistem de ecuații algebrice liniare conține legătura dintre debite și presiuni.

3.2. *Presiunile din degajări.* În urma scrierii ordonate a sistemului de ecuații (7), se obțin determinanții construiți cu coeficienții aferenți, care dau soluțiile acestui sistem. Cu notația

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\overline{A}_1 & B_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & C_{1z} \\ C_{21} & -\overline{A}_2 & B_{23} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{i,i-1} & -\overline{A}_i & B_{i,i+1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & C_{z-1,z-2} & -\overline{A}_{z-1} & B_{z-1,z} \\ B_{z,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C_{z,z-1} & -\overline{A}_z \end{vmatrix}_{(i)} \quad (i), \ (8)$$

devine

$$\overline{p}_{d_i} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} -\overline{A}_1 & B_{12} & 0 & \dots & 0 & D_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & C_{1z} \\ C_{21} & -\overline{A}_2 & B_{23} & \dots & 0 & D_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{i,i-1} & D_i & B_{i,i+1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & D_{z-1} & 0 & \dots & C_{z-1,z-2} & -\overline{A}_{z-1} & B_{z-1,z} \\ B_{z-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & D_z & 0 & \dots & 0 & C_{z,z-1} & -\overline{A}_z \end{vmatrix}_{(i)} \quad (i). \ (9)$$

3.3. *Capacitate portantă, debit de ulei, rigiditate.* Pentru o anumită poziție a fusului în cuzinet, determinată prin valorile ε și θ cuprinse în în $\overline{p}_{d_i}$, capacitatea portantă relativă, adimensională, este exprimată prin relația

$$\overline{p} = \frac{1+k_l}{2} \sin\frac{\pi}{z} \sqrt{\left[\sum_{i=1}^{z} \overline{p}_{d_i} \cos\frac{\pi}{z}(2i-1)\right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{z} \overline{p}_{d_i} \sin\frac{\pi}{z}(2i-1)\right]^2}. \quad (10)$$

Forța portantă

$$P = \overline{p} p_a d \cdot l \quad (11)$$

este înclinată față de linia $0-0$ cu unghiul

$$\gamma = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sum_{i=1}^{z} \overline{p}_{d_i} \sin\frac{\pi}{z}(2i-1)}{\sum_{i=1}^{z} \overline{p}_{d_i} \cos\frac{\pi}{z}(2i-1)}. \quad (12)$$

În lagăr intră, respectiv îl părăsește pe la capete cantitatea totală de lubrifiant

$$Q = \frac{k}{1 - k_l} \frac{h_0^{*3}}{12\eta} p_a \sum_{i=1}^{z} \overline{p}_{d_i} \overline{q}_i . \tag{13}$$

Pentru rigiditatea statică

$$c_{st} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}e} = \frac{p_a dl}{h_0^*} \frac{\mathrm{d}\overline{p}}{\mathrm{d}\varepsilon} \tag{14}$$

este, în consecință, caracteristică expresia

$$\frac{\mathrm{d}\overline{p}}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{(1 + k_l)^2}{4\overline{p}} \sin\frac{2\pi}{z} \left\{ \left[\sum_{i=1}^{z} \overline{p}_{d_i} \cos\frac{\pi}{z}(2i - 1) \right] \times \right.$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^{z} \frac{\mathrm{d}\overline{p}_{d_i}}{\mathrm{d}\varepsilon} \cos\frac{\pi}{z}(2i - 1) \right] + \left[\sum_{i=1}^{z} \overline{p}_{d_i} \sin\frac{\pi}{z}(2i - 1) \right] \times$$

$$\left. \times \left[\sum_{i=1}^{z} \frac{\mathrm{d}\overline{p}_{d_i}}{\mathrm{d}\varepsilon} \sin\frac{\pi}{z}(2i - 1) \right] \right\} . \tag{15}$$

Studiul efectuat de Peeken asupra lagărelor hidrostatice radiale cu canale longitudinale de scurgere au dus la concluzia că, pentru aceleași dimensiuni de bază d și l, presiunile specifice în lagăr marchează o creștere cu numărul degajărilor pînă la $z = 8 \ldots 10$ dar, peste $z = 5 \ldots 6$, această creștere este redusă. Pe de altă parte, dependența dintre aceste presiuni și parametrul λ, caracteristic pentru alimentarea degajărilor prin restrictoare, arată un domeniu de optim pentru fiecare număr de degajări, cu un cîmp mai larg pentru valorile λ și cu diferențe mai mici pentru $\overline{p}$ în cazul valorilor $z = 5 \ldots 6$.

În plus, la acest număr de degajări, trecerea liniei de acțiune a sarcinii prin mijlocul unei degajări sau al unui prag are o influență minoră pentru portanța lagărului.

Aceste constatări, considerate orientative și pentru lagărele *fără* canale longitudinale, ne-a determinat să punem în evidență valorile numerice valabile pentru caracteristicile funcționale ale lagărului radial hidrostatic cu *6 degajări*, atît pentru cazul fusului în repaus, cît și pentru cel al fusului în rotație, parametrii geometrici avînd valori uzuale în construcția de mașini :

$$k_l = \frac{l_d}{l} = 0{,}8 ,$$

$$k = \frac{D}{l} \cong \frac{d}{l} = 1 , \quad k_b = \frac{b_d}{b} = 0{,}6 .$$

4.1. *Portanța.* În figurile 3—6 este scoasă în evidență influența parametrului de alimentare λ și a excentricității relative ε, asupra portanței $\bar{p}$, raportate la presiunea de alimentare p_a și anume, pentru fusul în repaus, $k_\omega = 0$ (fig. 3,4), și pentru fusul în rotație, $k_\omega = 1{,}86$; 3,76 (fig. 5,6), admițînd diverse înclinări γ, respectiv θ ale sarcinii.

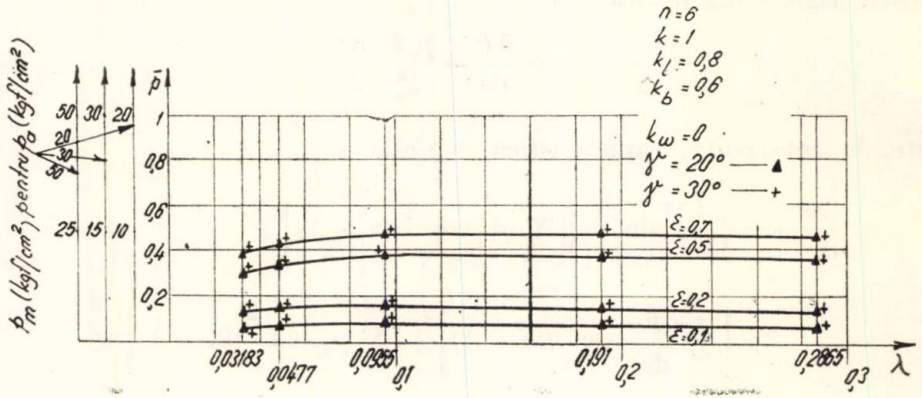


Fig. 3

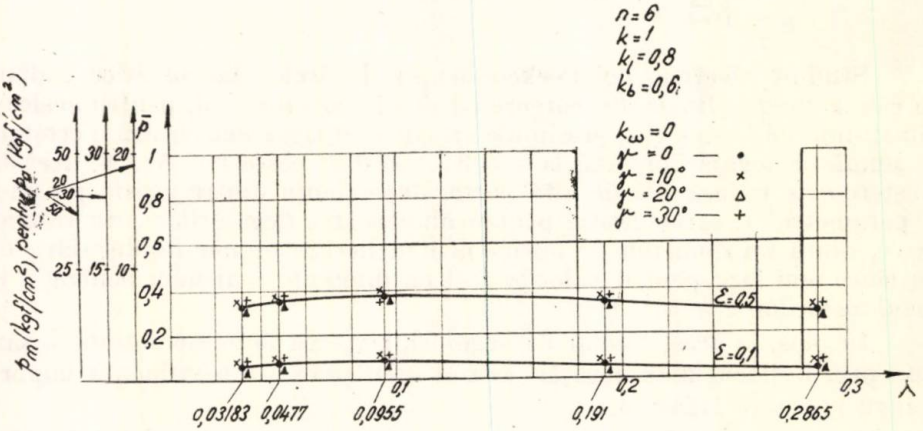


Fig. 4

Domeniul considerat pentru λ este cel interesant pentru proiectare, în zona de optimum.

Se observă :

a) În cazul fusului *fără rotație*, curbele $\bar{p}$ se plasează cu atît mai sus cu cît crește excentricitatea, ceea ce este normal, existînd coincidență între micșorarea înălțimii h_{min} a interstițiului și creșterea încărcării.

b) Alura curbelor (fig. 3,4) este asemănătoare pentru toate excentricitățile.

c) Influența unghiului γ este foarte redusă, toate valorile pentru $\gamma = 0$; 10° ; 20° ; 30°, înscriindu-se apropiat pe aceleași curbe (fig. 4).

d) Pentru fusul *în rotaţie* rămîn valabile constatările de mai sus (fig. 5,6).

În plus :

e) La variaţia excentricităţii, curbele se distanţează sensibil mai mult decît la fusul fără rotaţie.

f) În figura 7 este arătată comparativ situaţia pentru fusul în repaus şi pentru fusul în rotaţie, la aceleaşi excentricităţi. Apare pregnant

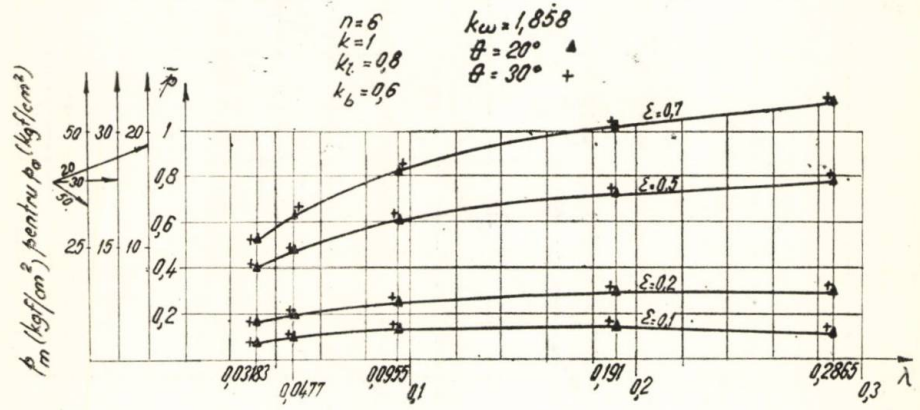


Fig. 5

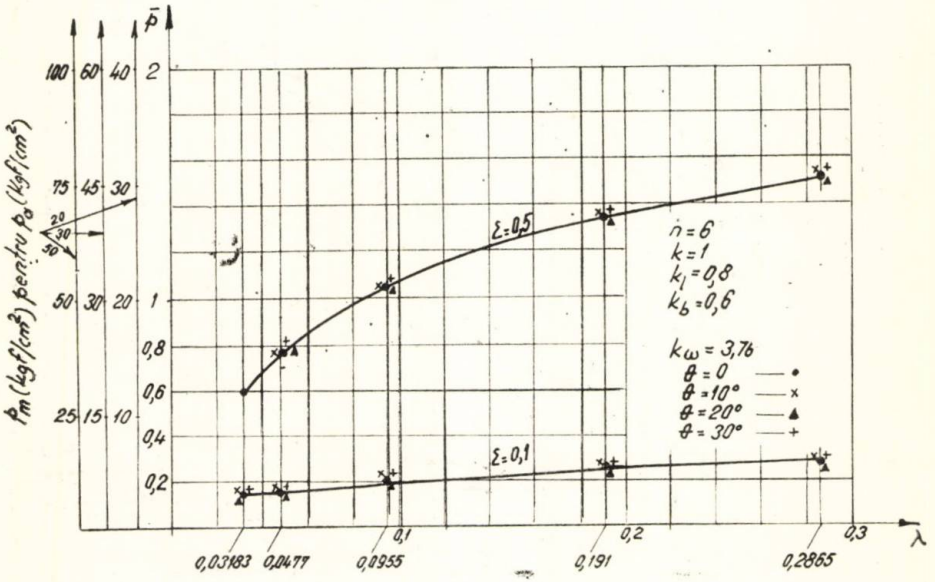


Fig. 6

în evidenţă, pentru una şi aceeaşi valoare a excentricităţii, creşterea portanţei cu k_ω. La un joc relativ Ψ dat şi o presiune de alimentare p_a stabilită, parametrul k_ω include influenţa vitezei. Se înţelege că, indirect,

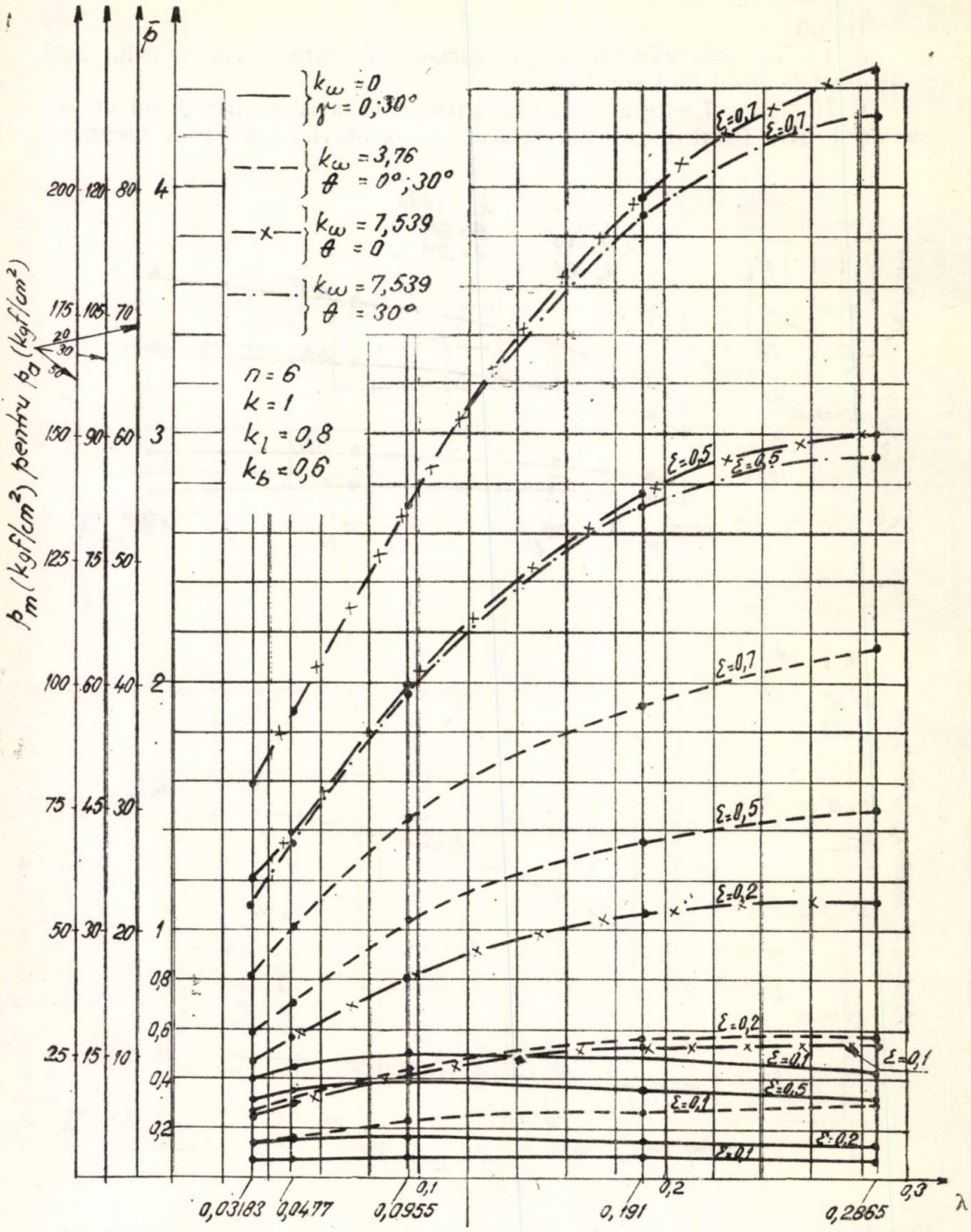

p_m (kgf/cm²) pentru p_a (kgf/cm²)
$\bar{p}$
$k_\omega = 0$ $\gamma = 0;30°$
$k_\omega = 3,76$ $\theta = 0°;30°$
$k_\omega = 7,539$ $\theta = 0$
$k_\omega = 7,539$ $\theta = 30°$
$n = 6$
$k = 1$
$k_l = 0,8$
$k_b = 0,6$
$\varepsilon = 0,7$
$\varepsilon = 0,5$
$\varepsilon = 0,2$
$\varepsilon = 0,1$
0,03183
0,0477
0,0955
0,191
0,2865
λ

Fig. 7

prin temperatură, variază și η dar, la lagărele hidrostatice, datorită debitului activ de lubrifiant, diferențele de temperaturi sînt mai reduse decît la cele hidrodinamice.

Contribuția efectului hidrodinamic în cazul fusului în rotație în lagărul hidrostatic, este, după părerea noastră, încă în măsură insuficientă abordată teoretic corect și determinată cantitativ.

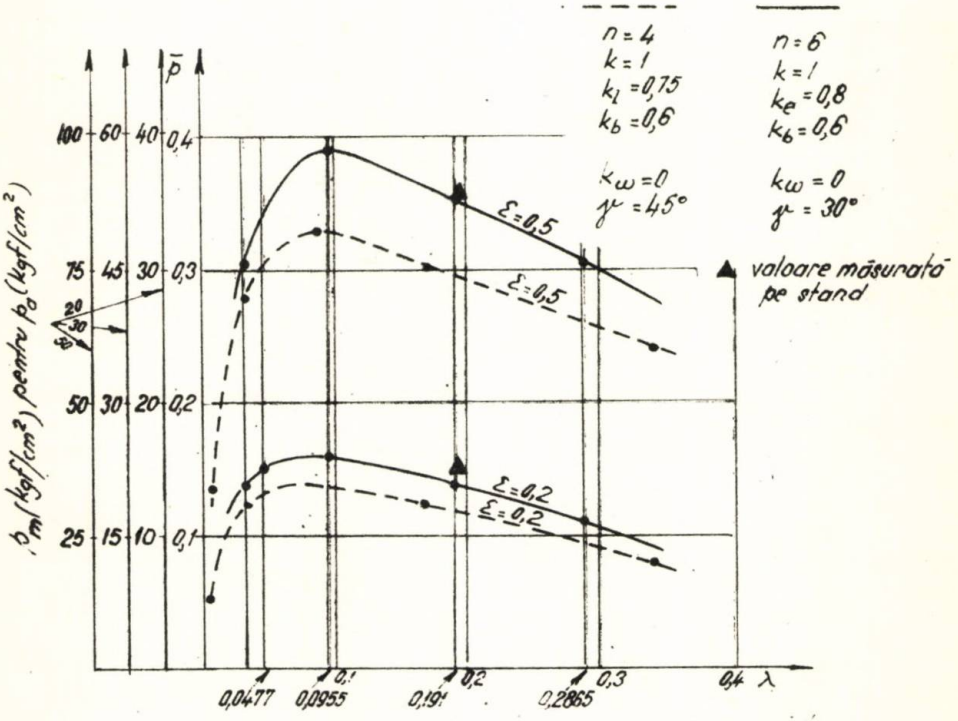


Fig. 8

g) Caracterul curbelor, îndeosebi pentru excentricități relative mari, este accentuat ascendent. Aceasta înseamnă că în condiții date de viteză, presiune de alimentare și joc relativ — deci pentru o valoare k_ω fixată — geometria restrictorului are importanță determinantă asupra portanței în interdependență cu poziția fusului în cuzinet. Se constată însă că peste valori $\lambda \cong 0{,}2$, chiar la excentricități mari, această influență se atenuează; poziția zonei de optimum în raport cu λ atîrnă de mărimea parametrului de viteză k_ω.

Este de menționat că o creștere a parametrului λ înseamnă o creștere a rezistenței hidraulice a restrictorului.

h) La excentricități și valori k_ω mari începe să devină mai evidentă influența unghiului θ, deci a direcției sarcinii.

Curbele din figura 8, valabile pentru $k_\omega = 0$, arată influența trecerii de la $z = 4$, la $z = 6$ degajări, confirmînd afirmațiile anterioare. Totodată sînt indicate punctele obținute experimental, care arată o bună concordanță cu valorile calculate.

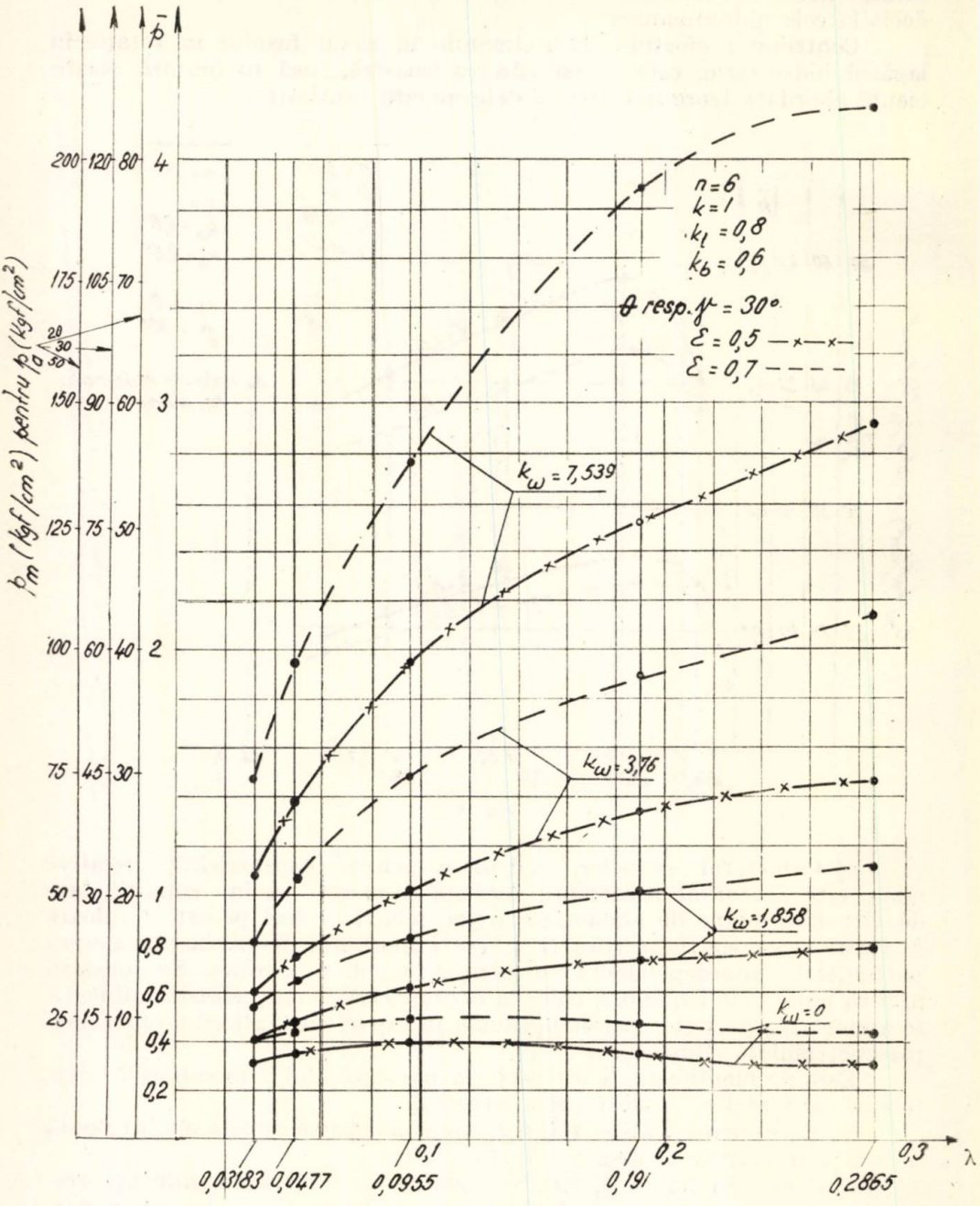

$\bar{p}$
p_m (kgf/cm²) pentru p_a (kgf/cm²)
200 120 80 4
175 105 70
20 30 30
150 90 60 3
125 75 50
100 60 40 2
75 45 30
50 30 20 1
0,8
0,6
25 15 10
0,4
0,2
n = 6
k = 1
k_1 = 0,8
k_b = 0,6
θ resp. ν = 30°
ε = 0,5 —×—×—
ε = 0,7 – – – –
k_ω = 7,539
k_ω = 3,76
k_ω = 1,858
k_ω = 0
0,03183 0,0477 0,1 0,0955 0,2 0,191 0,3 0,2865 λ

Fig. 9

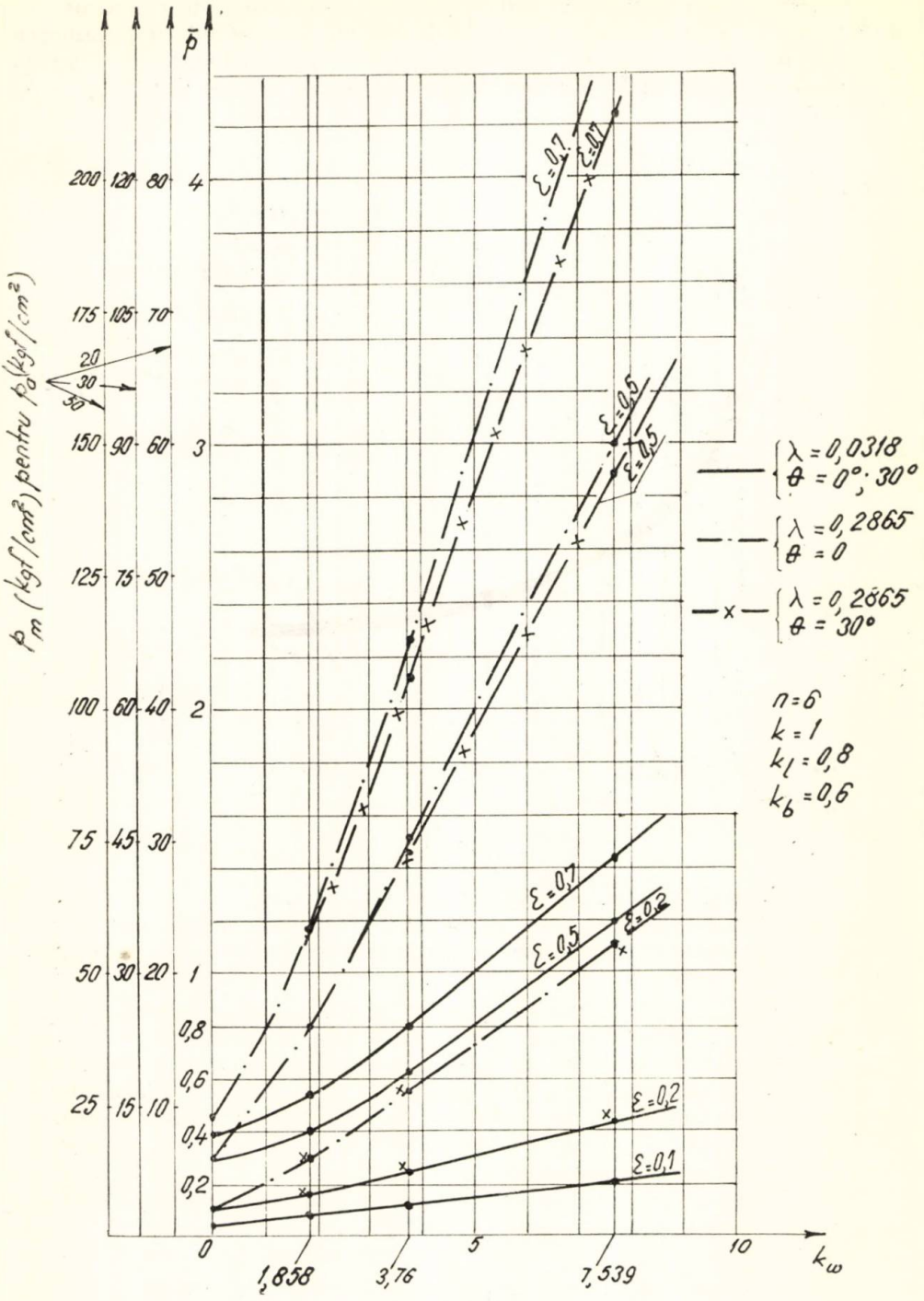

$\bar{p}$
p_m (kgf/cm²) pentru p_0 (kgf/cm²)
200 120 80
175 105 70
20
30
50
150 90 60
125 75 50
100 60 40
75 45 30
50 30 20
25 15 10
4
3
2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
ε=0,7
ε=0,7
ε=0,5
ε=0,5
ε=0,7
ε=0,5
ε=0,2
ε=0,2
ε=0,1
λ = 0,0318
θ = 0°; 30°
λ = 0,2865
θ = 0
λ = 0,2865
θ = 30°
n = 6
k = 1
k_l = 0,8
k_b = 0,6
0
1,858
3,76
5
7,539
10
k_ω

Fig. 10

Pentru a facilita interpolările şi a lărgi variantele de calcul de dimensionare, au fost trasate şi familii de curbe, considerînd ca parametru variabil al lor k_ω (fig. 9), în acelaşi sistem de coordonate $\overline{p} = \overline{p}(\lambda)$; totodată a fost făcută reprezentarea în sistemul de coordonate $\overline{p} - k_\omega$ (fig. 10).

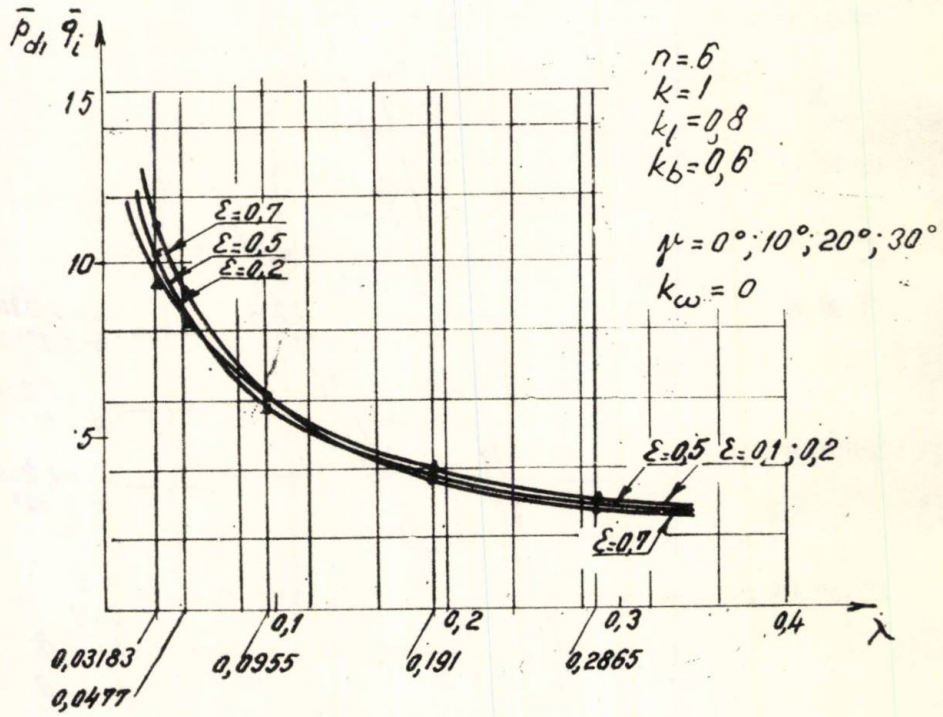


Fig. 11

Constatările rămîn aceleaşi ca mai sus.

4.2. *Debitul de lubrifiant.* În figura 11 sînt date curbe pentru produsul $\overline{p}_{di}\ \overline{q}_i$, care caracterizează debitul de lubrifiant, funcţie de parametrul de alimentare λ.

La aceeaşi excentricitate ε acest produs, deci şi debitul, scade continuu cu creşterea valorilor λ, ceea ce este explicabil, deoarece o mărire a parametrului de alimentare înseamnă creşterea lungimii sau micşorarea diametrului restrictorului capilar, deci o mărire a rezistenţei în alimentarea cu lubrifiant. În asemenea condiţii poziţia fusului în cuzinet este pe un plan de importanţă minor : curbele valabile pentru excentricităţi diferite sînt foarte apropiate.

Se observă totuşi că în zona valorilor λ mici, curbele se plasează mai sus în ordinea crescătoare a excentricităţilor relative, pe cînd în domeniul valorilor λ mai mari, situaţia se inversează.

Este cunoscut că, la lagăre, cantitatea principală de lubrifiant circulă prin zona neîncărcată a filmului.

Rezistențele hidraulice mici ale restrictorului permit folosirea interstițiului crescînd al zonei neîncărcate pentru activizarea fluxului de lubrifiant, ceea ce se dovedește a fi mai puțin posibil cînd restrictorul opune rezistență sporită alimentării.

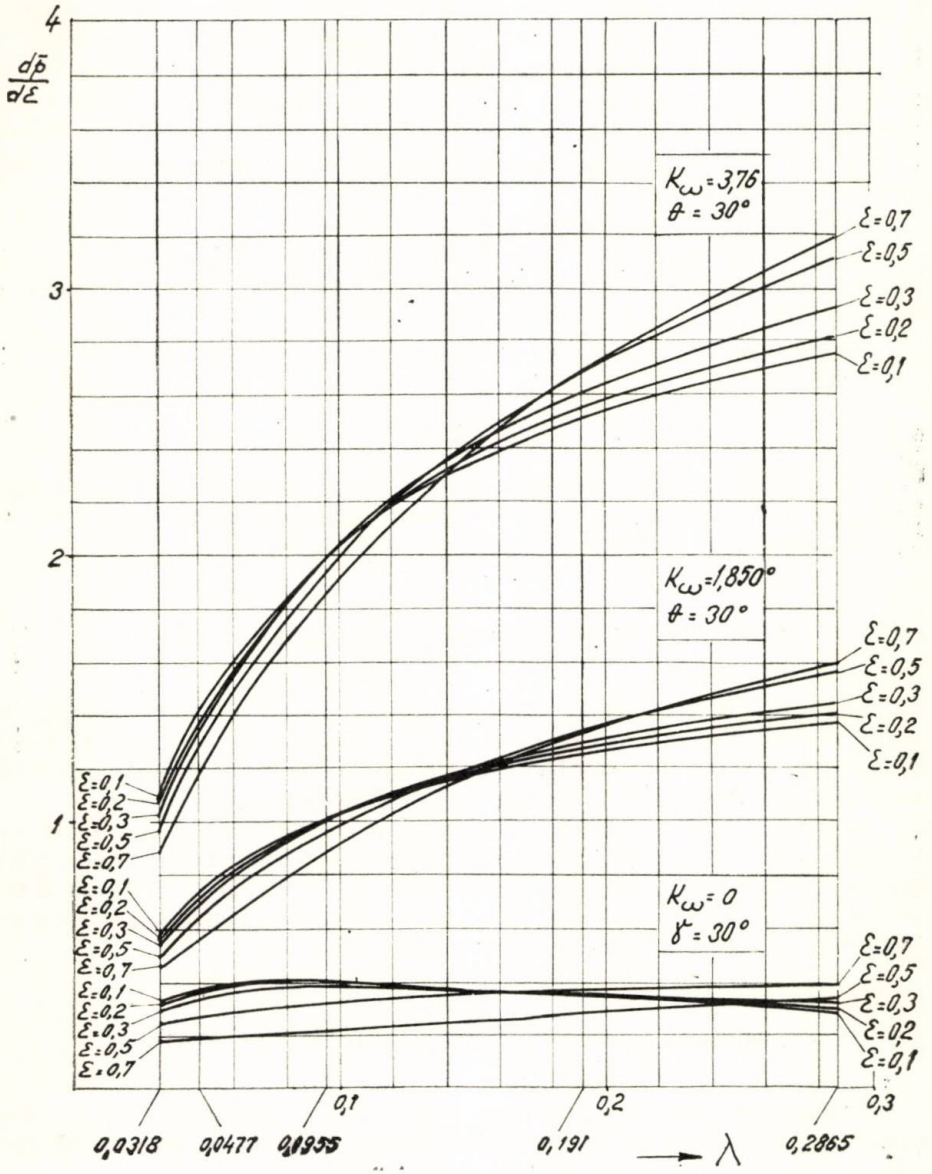


Fig. 12

În acest ultim caz, odată cu creșterea rezistențelor hidraulice în alimentare, debitul lagărului se mărește cu atît mai mult cu cît diferențele

dintre diferitele buzunare — ca presiuni şi cantităţi de lubrifiant — scad, deci cu cît centrul fusului se apropie de cel al cuzinetului.

Unghiul γ, respectiv θ nu arată vreo influenţă apreciabilă nici din acest punct de vedere.

4.3. *Rigiditatea rezemării.* Rezultatele calculelor pentru variaţia rigidităţii funcţie de λ sînt redate în figura 12, pentru $k_\omega = 0$ (fus în repaus) şi $k_\omega = 1{,}858$; 3,76 (fus în rotaţie).

a) Caracterul curbelor este în anumită măsură asemănător cu cel al curbelor de portanţă, cu deosebirea că aici apar intersecţii, constatate dealtfel şi de alţi cercetători la lagărele cu canale longitudinale.

b) Influenţa vitezei de rotaţie este evidentă, pentru aceeaşi valoare λ, rigiditatea crescînd cu k_ω.

Rotaţia fusului măreşte rigiditatea rezemării.

c) La toate valorile k_ω, în zona valorilor λ mici, aproximativ $\lambda < 0{,}1$ pentru $k_\omega = 3{,}76$, rigiditatea creşte puţin cu scăderea excentricităţii, pe cînd la valori $\sim\lambda > 0{,}2$ situaţia se inversează.

Explicaţia s-ar putea găsi prin corelarea variaţiei rigidităţii cu cea a debitului.

★

Toate constatările făcute constituie un material util proiectării nu numai sub aspect teoretic, în sensul cunoaşterii interdependenţelor dintre parametri, ci şi pentru corecta acordare a lor.

5. ORIENTĂRI ASUPRA METODICII PRACTICE DE CALCUL

Lagărele hidrostatice îşi găsesc o aplicare crescîndă în construcţia de maşini unelte. Precizia de lucru a acestor maşini impune lagărelor, cel mai adesea, alături de satisfacerea cerinţelor uzuale, condiţii speciale de rigiditate a rezemării şi de limitare a excentricităţii.

Din acest motiv, pentru exemplificare, am elaborat trei alternative de calcul (fig. 13 *a*, *c*), în care excentricitatea sau rigiditatea se consideră elemente iniţiale, fără ca prin aceasta să se înţeleagă o limitare a numeroaselor combinaţii posibile între parametrii cunoscuţi şi cei care urmează a fi determinaţi cu ajutorul curbelor date.

6. PROGRAM PENTRU CALCULUL LAGĂRELOR HIDROSTATICE

Pentru precizia prescrisă unor categorii de maşini, abaterile dimensionale sau ale valorilor parametrilor funcţionali rezultate din interpolările în curbele trasate pot deveni inacceptabile.

Aceasta ne-a determinat la elaborarea unui program complet de calcul, care să permită obţinerea rezultatelor cu rigurozitatea cerută, valabil pentru orice date valorice iniţiale.

Alternativa I.

Cunoscut : P; n; γ; ϕ_{arbore}

$\varepsilon_{max}^{prescris}$; $\frac{dp}{d\varepsilon}$ - liber

Alegere : $k = \frac{d}{l}$; $k_l = \frac{l_d}{l}$; $k_b = \frac{b_d}{b}$ (valori recomandate)

p_m ; ω

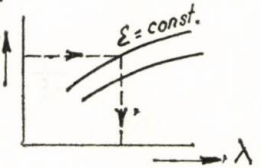
Alegere : p_a → $\frac{p_m}{p_a} = \bar{p}$; $\frac{p_{do}}{p_a} = \bar{p}_{do}$ } verificarea cu valori recomandate, sau invers

pompa de alimentare → domeniul optim de funcționare

ψ; uleiul → η la temperatura ipotetică de funcționare

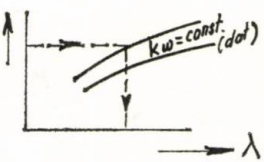
$k_\omega = \frac{\eta\omega}{p_a \psi^2}$

λ din



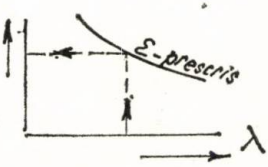
γ - dat
k_ω - calculat

sau din



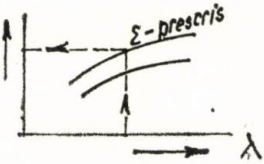
γ - dat
ε - prescris

$\bar{p}_{di}$ $\bar{q}_i$ din



Q din ec. 13 → mărimea pompei

$\frac{d\bar{p}}{d\varepsilon}$



γ - dat
k_ω - calculat

Rigiditatea

Puterea de pompare

Fig. 13 *a*

Alternativa II

Cunoscut P ; n ; γ ; ϕ arbore

ε_{max} - prescris ; $\frac{d\bar{p}}{d\varepsilon}$ - prescris

Alegere : $k = \frac{d}{l}$; $k_l = \frac{l_d}{l}$; $k_b = \frac{b_a}{b}$

↓

p_m ; ω

↓

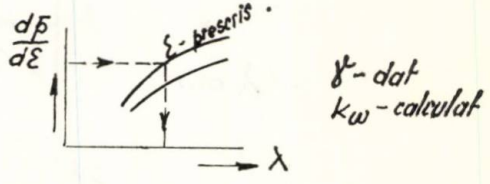
p_a ; pompa ; ψ ; η ca în alt. I

↓

$k_\omega = \frac{\eta \omega}{p_a \psi^2}$

↓

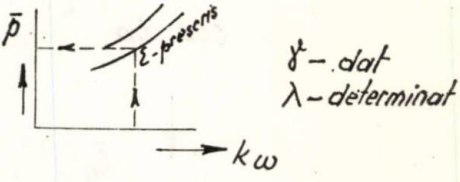
λ din



γ - dat
k_ω - calculat

↓

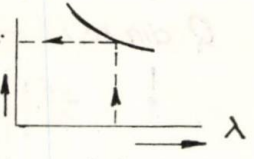
$\bar{p}$ din



γ - dat
λ - determinat

Verificarea P din ec (11) : $P = \bar{p} p_a$ dl
În caz de neconcordanță, schimbare p_a, deci și k_ω, resp. restrictor.

↓



$\bar{p}_{di}$ $\bar{q}_i$

↓

Q din ec. (13) - mărimea pompei

↓

Puterea de pompare

Fig. 13 *b*

Alternativa III

Cunoscut : P ; n ; γ ; ϕ arbore ·

$\frac{d\bar{p}}{d\mathcal{E}}$ prescris ; $\mathcal{E}_{max}$ – liber

Alegere : $k = \frac{d}{l}$; $k_l = \frac{l_d}{l}$; $k_b = \frac{b_d}{b}$

↓

p_m ; ω

↓

p_a ; pompa ; ψ ; η, ca în alt. I

↓

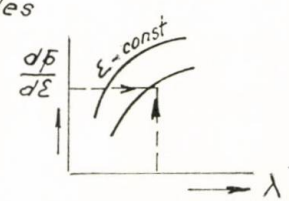
$k_\omega = \frac{\eta\omega}{p_a \psi^2}$

↓

λ sau $\mathcal{E}$ ales

↓

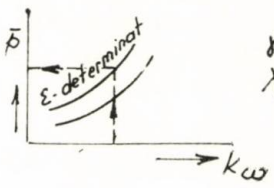
$\mathcal{E}$ sau λ din



γ – dat
k_ω – calculat

↓

$\bar{p}$ din

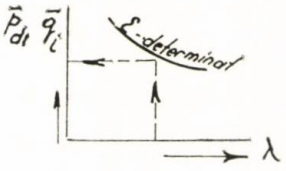


γ – dat
λ – determinat

↓

Verificarea P ca în alt. II

↓



$\bar{p}_{di}$ $\bar{q}_i$

↓

Q din ec. (13) — mărimea pompei

↓

Puterea de pompare.

Fig. 13 c

Organigrama acestui program este arătată în figura 14.

În memoria mașinii de calcul (operatorul de introducere) se introduc pe patru cartele valorile inițiale (poz. 1).

Cartela 1 : $k[K]$, $k_l\,[KL]$, $k_b\,[KB]$, $k_\omega\,[KW]$

Cartela 2 : $\overline{p}_0 = \frac{p_{d_0}}{p_a}$ $[E\ P\ O]$, respectiv λ

Cartela 3 : $\varepsilon\ [E]$,

Cartela 4 : $\theta\ [\bar{G}]$, respectiv γ pentru fusul în repaus.

Blocurile de inițializare ale contoarelor M, $I1$, $I2$, $M1$ (poz. 2 . . . 5) formează respectiv ciclurile pentru gama de valori fixate ale parametrilor :

$k = 0$; 1,86 ; 3,76 ; 7,54 (4 valori),

$\overline{p}_0 = \frac{p_{d_0}}{p_a} = 0{,}25$; 0,33 ; 0,5 ; 0,66 ; 0,75 (5 valori),

$\varepsilon = 0{,}1$; 0,2 ; 0,3 ; 0,5 ; 0,7 (5 valori),

θ, respectiv $\gamma = 0°$; 10° ; 20° ; 30° (4 valori).

Pentru $M = 1$, $I1 = 1$, $I2 = 1$, $M1 = 1$ sînt introduse în calcul primele valori ale parametrilor corespunzători.

Blocurile de decizie, pozițiile 12 . . .15, comandă reluarea calculului pentru celelalte valori, sau sfîrșitul ciclării.

Operatorul de lucru, poziția 6, calculează valorile expresiilor

$\overline{q}_i\ [Q\ (I)]$; $A_i\ [A\ (I)]$; $B_i\ [B\ (I)]$;

$C_i\ [C\ (I)]$; $D_i\ [D\ (I)]$, $\overline{A}_i\ [S\ A\ (I)]$.

Operatorii de calcul, pozițiile 7 . . .9, efectuează calculul mărimilor presiunilor din degajări $\overline{p}_{d_i}[X)$; portanței adimensionale $\overline{p}[P]$; poziției forței față de linia zero dată prin γ [DELTA].

Prin operatorul de lucru poziția 10 se calculează valorile expresiilor derivate în raport cu ε :

$$\frac{d\overline{q}_i}{d\varepsilon}\,[DQ\ (I)]\ ;\ \frac{dA_i}{d\varepsilon}\,[DA(I)]\ \ldots\ \frac{dD_i}{d\varepsilon}\,[DD(I)]\ ;$$

$$\frac{d\overline{A}_i}{d\varepsilon}\,[DSA\ (I)]\ ;\ \frac{d\overline{p}_{d_i}}{d\varepsilon}\,[DX\ (I)].$$

Operatorul de lucru, poziția 11, efectuează calculul rigidității adimensionale $\frac{d\overline{p}}{d\varepsilon}$ $[RIGI]$. Urmează, în sfîrșit, operatorul de tipărire a rezultatelor pe imprimantă (poz. 16).

Pe imprimante apar rezultatele în formă tabelată după cum urmează :

ORGANIGRAMA PENTRU LAGARE RADIALE HIDRODINAMICE

$K = k = \frac{d}{l}$

$KL = k_l = \frac{l_d}{l}$

$KB = k_b = \frac{b_d}{b}$

$KW = k_\omega = \frac{\eta\omega}{p_a \psi^2}$

START

Operator de introducere a valorilor inițiale

1. K, KL, KB, KW EPO, E, G, N

Blocurile de inițializare a contoarelor care formează ciclurile.

- M – pentru valori k_ω (4 valori)
- I1 – pentru valorile λ (5 valori)
- I2 – pentru valorile ε (5 valori)
- M1 – pentru valorile θ respectiv γ

2. M = 1
3. I1 = 1
4. I2 = 1
5. M1 = 1

Operator de lucru pentru calculul valorilor expresiilor

6. $Q(I) = \bar{q}_i = \dots$
   $A(I) = A_i = \dots$
   $B(I) = B_i = \dots$
   $C(I) = C_i = \dots$
   $D(I) = D_i = \dots$
   $SA(I) = \bar{A}_i = \dots$

Tab.1

Operatori de lucru pentru calculul valorilor derivate

$\bar{p}_{di}$ 7. $X = \bar{p}_{di} = \dots$

$\bar{p}$ 8. $P = \bar{p} = \dots$

γ 9. $DELTA = \gamma = \dots$

derivate 10.
$DQ(I) = \frac{d\bar{q}_i}{d\varepsilon} = \dots$
$DA(I) = \frac{dA_i}{d\varepsilon} = \dots$
$DB(I) = \frac{dB_i}{d\varepsilon} = \dots$
$DC(I) = \frac{dC_i}{d\varepsilon} = \dots$
$DD(I) = \frac{dD_i}{d\varepsilon} = \dots$
$DSA(I) = \frac{d\bar{A}_i}{d\varepsilon} = \dots$
$DX(I) = \frac{d\bar{p}_{di}}{d\varepsilon}$

rigidității 11. $RIGI = \frac{d\bar{p}}{d\varepsilon} = \dots$

Tab.2

Tab.3

Blocuri de decizie pentru valorile

$\gamma(\theta)$ 12. M1 = 4 — Nu → M1 = M1 + 1

Da

ε 13. I2 = 5 — Nu → I2 = I2 + 1

λ 14. I1 = 5 — Nu → I1 = I1 + 1

K_ω 15. M = 4 — Nu → M = M + 1

Operator de tipărirea rezultatelor pe imprimantă.

16. Tip. rez

STOP

$EPO = \bar{p}_{do} = \frac{p_{do}}{p_a}$

$E = \varepsilon$

$G = \gamma$

$N = z$

Un prim tabel conține semnificația notațiilor folosite în program precum și: debitul adimensional $\bar{q}_i$ coeficienții $A_i \ldots . D_i$ și $\bar{A}_i$; presiunile adimensionale din degajări $\bar{p}_{di}$; portanța adimensională $\bar{p}$.

Al doilea tabel indică unghiul γ care dă înclinarea direcției forței față de linia *0*.

Un al treilea tabel cuprinde valorile derivatelor $\frac{d\bar{q}_i}{d\varepsilon}$; ale sistemului derivat $\frac{dA_i}{d\varepsilon} \ldots . \frac{dD_i}{d\varepsilon}$, $\frac{d\bar{A}_i}{d\varepsilon}$; rigiditatea adimensională $\frac{d\bar{p}}{d\varepsilon}$.

Se menționează că numărul valorilor introduse în calculul pentru diferiții parametrii a fost ales în funcție de capacitatea calculatorului și de scopul propus. Schimbarea valorilor implică modificarea corespunzătoare a cartelelor.

★

Prezenta lucrare a fost efectuată în cadrul unui contract de colaborare între Catedra de Organe de mașini a Institutului politehnic București și ICPMUA — Institutul de cercetări și proiectări de mașini unelte și agregate, București.

Primită la redacție la 22 februarie 1972.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Kher Cowley, *The design and perfermance characteristics of a capillary compensated hydrostatic, journal bearing, Papers presented at the 8th International M.T.D.R. Conference held at the University of Manchester*, 1967.
2. G. Manea, V. Simionescu, M. Dumbravă, D. Hîncu, *Calculul lagărelor radiale hidrostatice*, G. Manea. *Organe de mașini* vol. I, București, Edit. Tehnică, 1970, 697—710.
3. H. Peeken, *Hydrostatische Querlager*, Konstruktion, 1964, H 7.
4. H. Peeken, *Tragfähigkeit und Steifigkeit von Radiallagern mit fremderzenglem Tragdruck*, Konstruktion 1966, H 10.
5. O. Pinkus, B. Sternlicht, *Theory of hydrodynamic Lubrication*, New York, Edit. Mc. Grow Hill, 1961.
6. H. Rippel, *Design of hydrostatic bearings*, Maschine Designe 1963, 35, 18—28.
7. L. Rossi, R. Ghiliazza, *Sulla dinamica delle coppie rotoidali portanti pressurizzate dall'esterne*, Apprechiature Idrauliche e Pneumatiche 1968, 55.
8. B. W. Rowe, *Eperince with four types of grinding machine spindes*, Papers presented at the 8th International M.T.D.R. Conference held at the University of Manchester, 1967.

CONTRIBUȚII ASUPRA CALCULULUI LAGĂRELOR DE ALUNECARE CU RĂCIRE NATURALĂ *)

de T. MĂDĂRĂȘAN
Institutul politehnic Cluj

În lucrare se prezintă o metodă de calcul a temperaturii filmului de lubrifiant pentru un lagăr de alunecare radial, cu răcire naturală, luîndu-se în considerare căderea de temperatură în corpul lagărului.
Pentru verificarea metodei s-au efectuat măsurători experimentale petru un lagăr DIN 118 G 110, rezultatele fiind comparate cu cele obținute pe cale teoretică.

1. INTRODUCERE

Siguranța în funcționare a lagărelor de alunecare depinde de precizia cu care se calculează, încă de la proiectare, temperatura lor de regim. Din punct de vedere al ungerii interesează în primul rînd temperatura medie a filmului de lubrifiant.

La calculul lagărelor, [2]; [4]; [8]; [10]; [11];[12]; se face ipoteza că temperatura medie a filmului de lubrifiant este aproximativ egală cu temperatura medie a suprafeței exterioare a lagărului, neglijîndu-se în acest fel căderea de temperatură în corpul lagărului.

Nu există în literatura de specialitate o deplină unitate de vederi asupra mărimii căderii de temperatură în corpul lagărului și asupra considerării acesteia în calcule, iar o determinare precisă este foarte dificilă. În lucrările [11]; [12], se arată că, în timp ce pentru transmiterea prin conducție a căldurii produsă în lagăr, de la suprafața de alunecare la suprafața exterioară a lagărului este suficientă o cădere de temperatură de cîteva grade (1—2°C), pentru transmiterea prin convecție și radiație a aceleiași cantități de căldură, de la suprafața exterioară la mediul ambiant, este necesară o diferență de temperatură de ordinul a cîtorva zeci de grade (30—40°C).

*) Lucrare elaborată la Max-Plank-Institut für Strömungsforschung, Abt. Reibungsforschung, Göttingen-R.F.G.

Evident că, în cazul lagărelor la care cele afirmate mai sus sînt valabile, ipoteza amintită este acceptabilă.

De asemenea în lucrarea [3] se afirmă că, în special la lagărele cu răcire naturală, diferența dintre temperatura filmului de ulei și a suprafeței exterioare, poate ajunge la același ordin de mărime ca și diferența dintre temperatura suprafeței exterioare și a mediului ambiant (fig.1).

Aceste neconcordanțe se datoresc, în primul rînd, tipurilor de lagăr și condițiilor practice de funcționare diferite, luate în considerare.

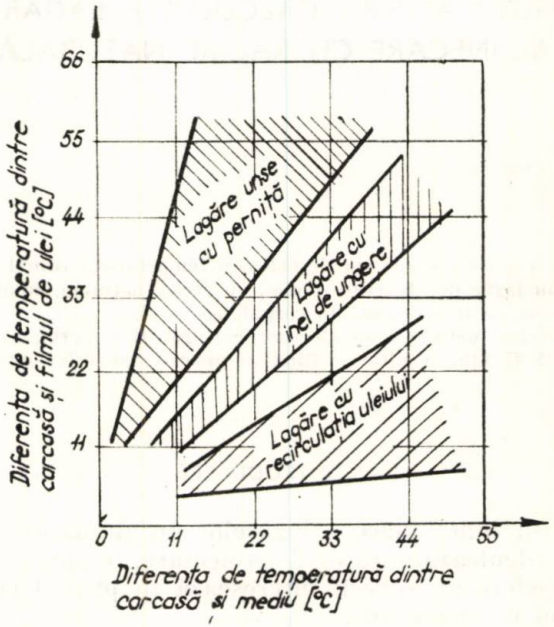


Fig. 1. — Căderea de temperatură în lagăr, după [3]

Mărimea căderii de temperatură în corpul lagărului depinde de o serie de factori, ca :

— sistemul de ungere al lagărului ;

— forma constructivă a lagărului (o suprafață de contact dintre cuzinet și corpul lagărului mică, duce la mărirea căderii de temperatură și invers) ;

— materialul cuzinetului și al corpului lagărului ;

— mărimea lagărului (în special masivitatea lagărului, grosimea pereților cuzinetului și a carcasei) ;

— cifra lui Sommerfeld S_0 (dat fiind că S_0 determină debitul de ulei ce se scurge pe la capete, înseamnă că influențează și distribuția temperaturilor în lagăr) ;

— temperatura mediului ambiant etc.

Din cele arătate mai sus rezultă că, la anumite tipuri de lagăre, în anumite condiții de funcționare, se impune calculul direct al temperaturii medii a filmului de lubrifiant.

În cele ce urmează se va arăta o metodă de calcul a temperaturii medii a filmului de lubrifiant, fără a se aproxima cu temperatura suprafeței exterioare. Pentru verificarea metodei s-au făcut măsurători experimentale, rezultatele fiind comparate cu valorile obținute pe cale teoretică.

2. CONSIDERAȚII TEORETICE

Pentru un lagăr cu răcire naturală, fluxul de căldură ce se transmite mediului înconjurător prin carcasa sa este

$$\Phi = (1 - K_a)\,\mu F v \quad [\text{daW}], \tag{1}$$

unde K_a este raportul dintre căldura transmisă prin arbore și căldura totală ce ia naștere în lagăr;

μ — coeficientul de frecare;

F — forța radială din lagăr [daN];

v — viteza periferică a fusului [m/s].

Acest flux de căldură ajunge la suprafața exterioară pe două căi: fluxul Φ_1 prin conductibilitate termică și fluxul Φ_2 transportat de către uleiul

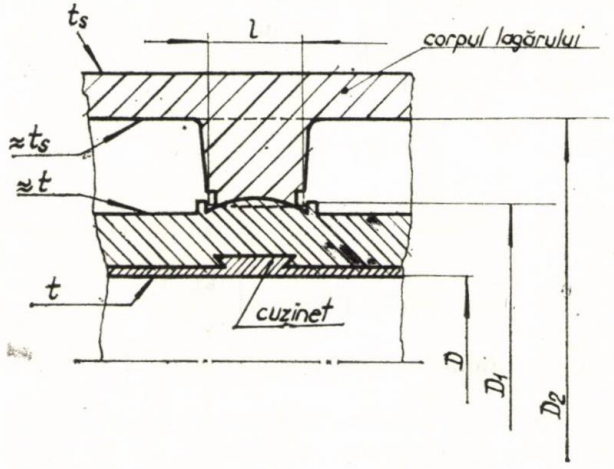


Fig. 2. — Fixarea cuzinetului în corpul lagărului

de ungere pînă la suprafața interioară a carcasei, de unde se transmite mai departe, înspre exterior, prin conductibilitate:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2. \tag{2}$$

Pentru calculul fluxului de căldură Φ_1 se admit următoarele ipoteze simplificatorii:

— temperatura suprafeței interioare a carcasei este aproximativ egală cu temperatura suprafeței exterioare, t_s;

— căderea de temperatură pe grosimea cuzinetului este neglijabilă;

— proeminența din corpul lagărului, pe care se reazemă cuzinetul, este de formă simplă, reprezentată punctat în figura 2 :

— suprafețele izoterme în această proeminență sînt suprafețe cilindrice, concentrice cu axa cuzinetului ;

— schimbul convectiv de căldură prin intermediul aerului, din interiorul lagărului, este neglijabil.

În acest fel, procesul de transmitere a căldurii de la suprafața de frecare la suprafața exterioară a lagărului prin conductibilitate, este asemănător cu acela al unui cilindru gol în interior cu dimensiunile D_1, D_2, l, (fig. 2), pentru care se poate scrie

$$\Phi_1 = \frac{\pi l}{\frac{1{,}15}{\lambda} \lg \frac{D_2}{D_1}} (t - t_s) = W(t - t_s) \quad [\text{daW}], \tag{3}$$

unde λ este coeficientul de conductibilitate termică a materialului carcasei $\left[\frac{\text{daW}}{\text{m grd}}\right]$,

W — o mărime caracteristică pentru un lagăr dat.

În ipoteza că temperatura uleiului ce se scurge pe la capetele fusului este egală cu temperatura medie a filmului de lubrifiant, t, iar temperatura băii de ulei este aproximativ egală cu temperatura suprafeței exterioare t_s, fluxul Φ_2 se exprimă astfel

$$\Phi_2 = C_v \gamma Q (t - t_s) \quad [\text{daW}], \tag{4}$$

unde C_v este căldura specifică a uleiului la volum constant $\left[\frac{\text{daNm}}{\text{kg°C}}\right]$;

γ — greutatea specifică a uleiului $\left[\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}\right]$;

Q — debitul de ulei ce se scurge pe la capete $\left[\frac{\text{dm}^3}{\text{s}}\right]$.

De la suprafața exterioară a lagărului fluxul de căldură Φ se transmite mediului ambiant prin convecție și radiație :

$$\Phi = \alpha A (t_s - t_e) \quad [\text{daW}], \tag{5}$$

unde α este coeficientul mediu de convecție termică, ce include și radiația [daW/m²grd] ;

A — suprafața exterioară a lagărului [m²] ;

t_e — temperatura mediului ambiant.

Din relațiile (1) — (5) rezultă sistemul de ecuații :

$$(1 - K_a)\, \mu\, Fv = (C_v\, \gamma\, Q + W)\, (t - t_s), \tag{6}$$

$$(1 - K_a)\, \mu\, Fv = \alpha A\, (t_s - t_e). \tag{7}$$

Acest sistem de două ecuaţii cu două necunoscute, t şi t_s, se mai poate scrie sub forma :

$$t = t_e + (1 - K_a)\,\mu\, Fv \left[\frac{1}{\alpha A} + \frac{1}{C_v\,\gamma Q + W}\right], \tag{8}$$

$$t_s = t_e + (1 - K_a)\frac{\mu\, Fv}{\alpha A}. \tag{9}$$

Determinarea soluţiilor acestor ecuaţii este dificilă întrucît cele două necunoscute t şi t_s nu sînt independente, iar coeficientul de frecare şi debitul de ulei ce se scurge pe la capete depind, prin intermediul viscozităţii, de temperatura filmului de lubrifiant. Mai jos se vor trata două metode de rezolvare : metoda grafică şi metoda analitică.

Metoda grafică constă în a trasa variaţia fluxului de căldură Φ funcţie de temperatura filmului lubrifiant, t_i, precum şi variaţia fluxului de căldură transmis prin suprafaţa exterioară mediului înconjurător, tot funcţie de t_i. Intersecţia celor două curbe determină temperatura căutată, t.

Pentru aceasta se presupun cunoscute mărimile : K_a ; F ; v ; C_v ; γ ; α ; A ; t_e ; λ ; D_1 ; D_2 ; l ; precum şi diametrul nominal al lagărului D, lăţimea cuzinetului L, jocul relativ Ψ, presiunea medie p_m, variaţia viscozităţii η cu temperatura şi variaţia debitului specific q funcţie de excentricitatea relativă, ε :

$$q = \frac{4Q}{D\,L\,v\,\Psi}, \tag{10}$$

unde D, L se înlocuiesc în dm, iar v în dm/s. Se adoptă pentru temperatura filmului de lubrifiant o serie de valori t_i (practic $i = 3 - 5$) ; pentru fiecare t_i se determină viscozitatea dinamică corespunzătoare η_i, după care se calculează numărul lui Sommerfeld :

$$\mathcal{S}o_i = \frac{p_m \Psi^2}{\eta_i \omega}. \tag{11}$$

Pentru fiecare $\mathcal{S}o_i$ se calculează coeficientul de frecare din relaţia

$$\mu_i = \frac{3\Psi}{\mathcal{S}o_i^m}, \tag{12}$$

unde, pentru $\mathcal{S}o_i < 1$, $m = 1$, iar pentru $\mathcal{S}o_i > 1$, $m = \frac{1}{2}$.

Cu valorile astfel obţinute se calculează fluxul de căldură $\Phi_i = (1 - K_a)\,\mu_i Fv = f_1(t_i)$ şi se trasează grafic funcţia $(1 - K_a)\,\mu\, Fv = f_1(t)$, (fig. 3, curba a).

Pentru a trasa cea de a doua curbă trebuie cunoscută constanta W, definită de relația (3):

$$W = \frac{\pi \lambda l}{1{,}15 \lg \frac{D_2}{D_1}} \tag{13}$$

și debitul de ulei ce se scurge pe la capete Q_i corespunzător fiecărui t_i. Pentru calculul lui Q_i se determină mai întîi mărimea excentricității relative ε_i aferentă fiecărui $\delta\sigma_i$, după care se scoate, din tabele sau diagrame (de preferat experimentale), valorile debitului specific q_i, iar din relația (10) rezultă Q_i.

Din ecuația (6) rezultă temperatura suprafeței exterioare t_{si} funcție de t_i:

$$t_{si} = t_i - \frac{(1 - K_a)\,\mu_i\, Fv}{C_v\, \gamma\, Q_i + W}, \tag{14}$$

unde s-a considerat că C_v și γ sînt independente de temperatură.

Cu valorile lui t_{si} astfel calculate se determină fluxul de căldură ce se transmite mediului ambiant $\Phi_i = \alpha A(t_{si} - t_e) = f_2(t_i)$ și se trasează grafic funcția $\alpha A\,(t_s - t_e) = f_2(t)$ (fig. 3, curba b).

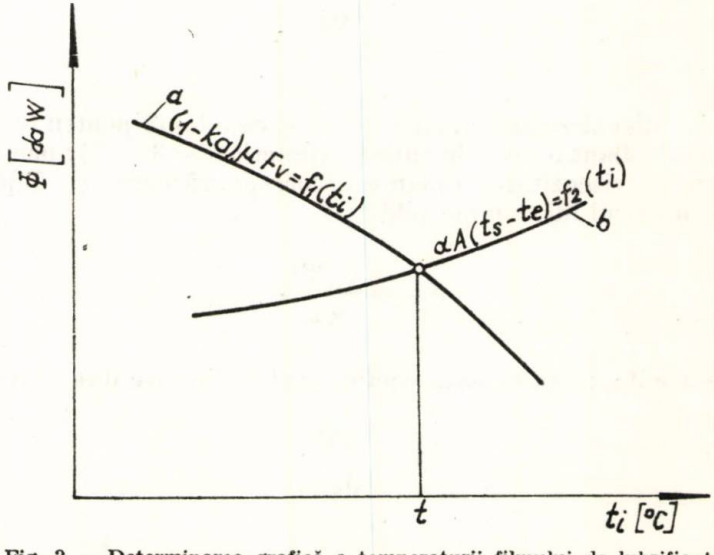


Fig. 3. — Determinarea grafică a temperaturii filmului de lubrifiant

Temperatura corespunzătoare punctului de intersecție al celor două curbe *a* și *b*, este temperatura medie a filmului de lubrifiant în regim termic

staţionar. Temperatura suprafeţei exterioare se calculează din relaţia (9), unde se înlocuieşte coeficientul de frecare aferent temperaturii t mai sus obţinută.

Metoda grafică este suficient de precisă, simplă şi nu reclamă calcule complicate care ar putea fi surse de erori.

Pentru determinarea temperaturii filmului de lubrifiant şi a temperaturii suprafeţei exterioare, prin metoda analitică, se folosesc ecuaţiile (8) şi (9), în care se înlocuieşte valoarea coeficientului de frecare μ din (12) şi se obţine

$$t = t_e + (1 - K_a) \frac{3\,\Psi\, Fv}{\left(\frac{p_m \Psi^2}{\eta\omega}\right)^m} \left[\frac{1}{\alpha A} + \frac{1}{C_v \gamma Q + W}\right] \tag{15}$$

şi

$$t_s = t_e + (1 - K_a) \frac{3\Psi\, Fv}{\alpha A \left(\frac{p_m \Psi^2}{\eta\omega}\right)^m}. \tag{16}$$

În vederea rezolvării analitice a ecuaţiilor de mai sus se exprimă variaţia viscozităţii η şi a debitului Q funcţie de temperatură, neglijînd totodată variaţia lui η cu presiunea. Variaţia viscozităţii cu temperatura e dată de relaţia lui Vogel [7]:

$$\eta_t = 0{,}18\, e^{\left[a \lg \frac{\eta_{50}}{0{,}18}\left(\frac{1}{t+b} - c\right)\right]}, \text{ [c.P.]}, \tag{17}$$

unde η_{50} este viscozitatea dinamică la 50°C în c.P; $a = 400$; $b = 95$; $c = 0{,}00114008899$.

Pentru utilizarea rezultatelor experimentale privind debitul specific q, rezultate ce se găsesc în literatura de specialitate sub formă de tabele sau diagrame în funcţie de excentricitatea relativă ε, s-au dedus formule empirice care să exprime cît mai fidel valorile debitului q. În acest scop s-au luat valorile lui q funcţie de excentricitatea relativă, iar excentricitatea la rîndul ei funcţie de numărul lui Sommerfeld şi s-au încercat mai multe funcţii, ca de exemplu: polinom Newton, funcţii de forma $q = A - e^{-K\delta\sigma^n}$; $q = A + B\ \text{th}\ K\,\delta\sigma$; $q = \Sigma A_i\ \text{th}_i\ \delta\sigma$.

Funcţiile găsite, care aproximează cel mai bine valorile experimentale, sînt

$$q = \sum_{i=1}^{3} D_i \,\text{th}\left(\frac{1}{i}\sqrt[4]{\delta\sigma}\right) \tag{18}$$

și

$$q = \frac{\mathcal{S}a^2}{A_1 + B_1\mathcal{S}a^2 + C_1\mathcal{S}a^4}. \tag{19}$$

Determinarea constantelor D_i; A_1; B_1 și C_1 s-a făcut prin metoda celor mai mici pătrate, astfel încît abaterile maxime ale valorilor obținute din formulele empirice să fie minime în comparație cu mărimile experimentale.

Întrucît verificarea acestor relații și deducerea constantelor a reclamat un volum mare de calcule, s-a recurs la o mașină electronică de calcul (de tip Wank) care a permis, pe baza unor programe întocmite în acest sens, calculul mai multor variante și determinarea abaterilor prezentate de fiecare funcție.

În tabela 1 se dau valorile constantelor din relațiile (18) și (19) în funcție de raportul L/D și locul de introducere a uleiului.

Se menționează că la determinarea acestor constante s-au utilizat valorile lui q din [11] și din lucrările lui E. Wenger, citate în [11].

În figura 4 s-a reprezentat curba $q = f(\mathcal{S}a)$ dată de relația (19), precum și valorile experimentale ale lui q pentru un lagăr cu raportul $L/D = 1,20$ alimentat în planul orizontal ce trece prin axa cuzinetului.

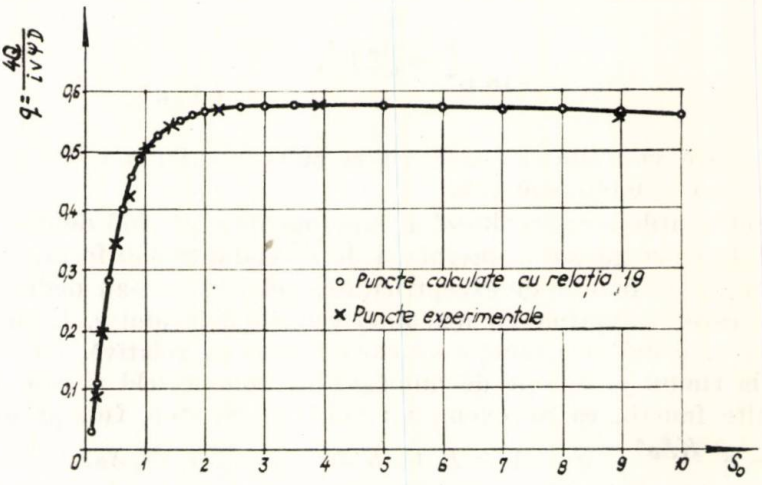


Fig. 4. — Variația debitului specific q funcție de $\mathcal{S}a$

Din figura 4 se observă că, formula empirică (19) aproximează foarte bine valorile experimentale ale lui q.

Tabela 1

$\frac{L}{D}$	Locul de alimentare în planul orizontal ce trece prin axa cuzinetului									
	A_1	B_1	C_1	Domeniul de valabilitate	Abaterea maximă față de valorile experimentale	D_1	D_2	D_3	Domeniul de valabilitate	Abaterea maximă față de valorile experimentale
1,00	0,145719	1,562085	0,001260	$\mathcal{S}_0 > 0{,}2$	3 %	−9,288067	71,296110	−78,670509	$\mathcal{S}_0 = 0{,}3-4$	3 %
1,20	0,287089	1,682004	0,001605	$\mathcal{S}_0 > 0{,}1$	0,5 %	−4,452656	30,261152	−31,533659	$\mathcal{S}_0 = 0{,}3-10$	5 %
	Locul de alimentare la 180° față de poziția grosimii minime									
1,25	0,906975	1,216987	0,012392	$\mathcal{S}_0 > 0{,}2$	3 %	−5,229300	33,285910	−33,980050	$\mathcal{S}_0 = 0{,}2-10$	5 %
1,50	2,692496	1,153330	0,052787	$\mathcal{S}_0 > 0{,}2$	3 %	−6,442871	36,727879	−36,706161	$\mathcal{S}_0 = 0{,}3-10$	5 %

Din (10) și (19) rezultă pentru debit formula

$$Q = \frac{\Psi D L v}{4} \frac{\mathcal{S}\sigma^2}{A_1 + B_1 \mathcal{S}\sigma^2 + C_1 \mathcal{S}\sigma^4}. \tag{20}$$

Introducînd în ecuațiile (15) și (16) valorile viscozității și a debitului din formulele (17), respectiv (20), rezultă

$$t = t_e + \frac{(1 - K_a)\,\pi\,\Psi\,DFn}{20\left\{\dfrac{F\Psi^2}{6{,}12\cdot 10^{-7}\pi DLn e^{\left[a \lg \frac{\eta_{50}}{0{,}18}\left(\frac{1}{t+b} - c\right)\right]}}\right\}^m} \left\{\frac{1}{\alpha A} + \frac{1}{\dfrac{Cv\gamma\pi\Psi D^2 Ln}{0{,}24}} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{\left\{\dfrac{\left(\dfrac{F\Psi^2}{6{,}12\cdot 10^{-7}\pi DLn e^{\left[a \lg \frac{\eta_{50}}{0{,}18}\left(\frac{1}{t+b} - c\right)\right]}}\right)^2}{A_1 + B_1\left(\dfrac{F\Psi^2}{6{,}12\cdot 10^{-7}\pi DLn e^{\left[a \lg \frac{\eta_{50}}{0{,}18}\left(\frac{1}{t+b} + c\right)\right]}}\right)^2 + C_1\left(\dfrac{F\Psi^2}{6{,}12\cdot 10^{-7}\pi DLn e^{\left[a \lg \frac{\eta_{50}}{0{,}18}\left(\frac{1}{t+b} - c\right)\right]}}\right)^4}\right\} + W \right. \tag{21}$$

$$t_s = t_e + \frac{1 - K_a}{20\alpha A} \left\{\frac{\pi\Psi DFn}{\dfrac{F\Psi^2}{6{,}12\cdot 10^{-7}\pi DLn\ e^{\left[a \lg \frac{\eta_{50}}{0{,}18}\left(\frac{1}{t+b} - c\right)\right]}}}\right\}^m, \tag{22}$$

unde turația n se înlocuiește în rotații/minut ; lungimile în m ; iar restul mărimilor în dimensiunile specificate mai sus.

Coeficientul $6{,}12 \times 10^{-7}$ include și transformarea viscozității în daN.S/m², întrucît din formula (17) rezultă în c.P., iar cifra 0,24 ține seama de faptul că debitul Q trebuie introdus în dm³, iar D și L se înlocuiesc în m.

Introducînd notațiile

$$M_1 = \frac{1 - K_a}{20}\pi\Psi D\,;\ M_2 = \frac{\pi\Psi D^2 L C_v \gamma}{0{,}240};\ \varphi(t) = e^{\left[a \lg \frac{\eta_{50}}{0{,}18}\left(\frac{1}{t+b} - c\right)\right]},$$

$$N = \frac{\Psi^2}{6{,}12\pi \times 10^{-7} DL}, \tag{23}$$

ecuaţiile (21) şi (22) se pot scrie sub formă mai uşor de urmărit :

$$t = t_e + M_1 \frac{Fn}{\left[\frac{NF}{n\,\varphi(t)}\right]^m}\left\{\frac{1}{\alpha A} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{M_2\, n\left[\frac{\left[\frac{NF}{n\varphi(t)}\right]^2}{A_1 + B_1\left(\frac{NF}{n\varphi(t)}\right)^2 + C_1\left(\frac{NF}{n\varphi(t)}\right)^4}\right] + W}\right\}, \tag{24}$$

$$t_s = t_e + \frac{M_1}{\alpha A}\frac{Fn}{\left(\frac{NF}{n\varphi(t)}\right)^m}. \tag{25}$$

În figura 5 se dă schema logică pentru rezolvarea acestor ecuaţii pe maşina electronică de calcul (de exemplu Felix C—256) prin metoda căutării punctului nul. În schema logică s-au introdus următoarele notaţii : t_0 — temperatura de începere a calculului ; K-variabilă de programare ; Δt_0 — pasul cu care creşte t_0 la reluarea calculului ; $F\,(t)$ — membrul drept al ecuaţiei (24) ; $t_s(t)$ membrul doi al ecuaţiei (25) ; $\Delta(K)$ diferenţa dintre cei doi membri ai ecuaţiei (24) corespunzătoare temperaturii de calcul şi $\Delta\,(K)_0$ valoarea lui $\Delta\,(K)$ pentru care calculul se opreşte, aceasta reprezintă, de altfel, precizia de calcul a lui t.

În acest fel se pot determina soluţiile ecuaţiilor (24) şi (25) cu o precizie oricît de mare.

3. VERIFICAREA METODEI DE CALCUL

Pentru verificarea metodei de calcul s-a determinat, prin metoda analitică descrisă mai sus, temperatura filmului de lubrifiant şi temperatura suprafeţei exterioare a unui lagăr, făcîndu-se totodată măsurători practice asupra aceluiaşi lagăr, comparîndu-se, în final, rezultatele.

Lagărul utilizat în acest scop a fost de tip DIN 118 G 110, (fig. 6), cu următoarele caracteristici dimensionale şi funcţionale :
$D = 110$ mm ; $L = 132$ mm ; $L/D = 1{,}20$; $\Psi = 2{,}64\,‰$; $A = 0{,}2\text{m}^2$; $D_2 = 325$ mm ; $D_1 = 150$ mm ; $l = 40$ mm (fig. 2) ; ungere cu inel fix ; locul de alimentare în planul orizontal ce trece prin axa cuzinetului ; uleiurile utilizate ; *DTE* Extraschwer 60 cu $\eta_{50°C} = 59{,}96$ c.P (echivalentul aproximativ al uleiului *I* 72, STAS 383—70), şi ulei Wakumm 1199 cu $\eta_{50} = 3{,}13$ c.P, (echivalent cu *I* 10 STAS 383—70).

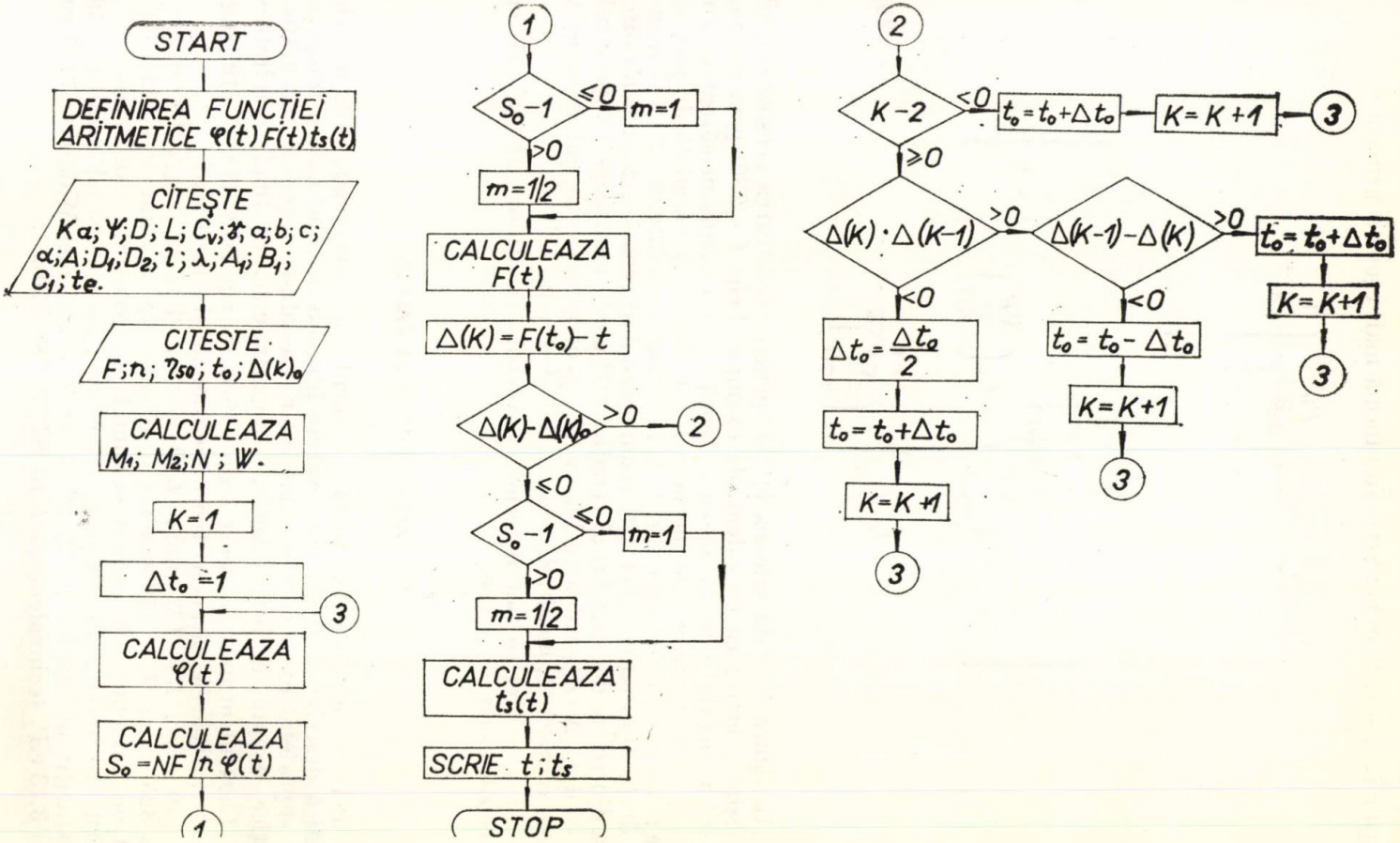


Fig. 5. — Schema logică pentru rezolvarea ecuațiilor (24) și (25)

S-a adoptat $\alpha = 2\,\frac{\text{daW}}{\text{m}^2\text{grd}}$; [11]; $\lambda = 5{,}21$; $\frac{\text{daW}}{\text{m grd}}$ [11]; $K_a = 0{,}2$ (din măsurători proprii); $F = 250$; 500; 750; 900; 1 200 daN; $n = 300$; 600; 800; 1 000; 1 250; 2 000 rot/min; temperatura mediului ambiant $t_e = 23°C$; produsul $C_v\ \gamma = 180$, $\frac{\text{daNm}}{\text{dm}^3}$ [11].

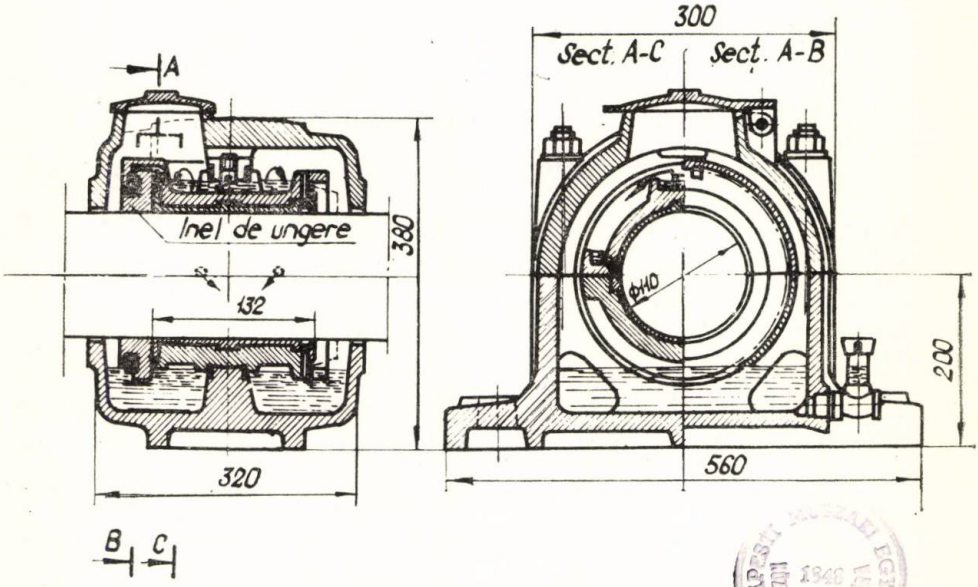


Fig. 6. — Lagărul experimental

Cu aceste valori constantele din ecuaţiile (24) şi (25) au mărimea: $W = 1{,}896742$; $M_1 = 3{,}647424 \times 10^{-5}$; $M_2 = 9{,}930112 \times 10^{-3}$; $N = 249{,}7814$; iar din tabela 1 rezultă $A_1 = 0{,}287089$; $B_1 = 1{,}682004$; $C_1 = 0{,}001605$.

Temperatura filmului de lubrifiant şi a suprafeţei exterioare s-a determinat prin rezolvarea ecuaţiilor (24) şi (25) cu ajutorul unei maşini electronice de calcul de tip Wank folosind metoda căutării punctului nul, rezultatele obţinute fiind date în tabela 2.

Precizia de determinare a soluţiilor ecuaţiilor mai sus amintite a fost $\Delta(K)_0 = 10^{-4}$, iar $\Delta t_0 = 1°C$.

Măsurătorile practice s-au efectuat pe standul din figura 2.6 [11]. Temperaturile s-au determinat prin intermediul unor termoelemente cupru-konstantan şi a unui milivoltmetru înregistrator de tip Comprecorder 288.

Termoelementele au fost plasate astfel: la 0,5 mm de suprafaţa de alunecare; pe suprafaţa exterioară a cuzinetului, pe suprafaţa interioară a carcasei, pe suprafaţa exterioară a lagărului; în baia de ulei.

Tabela 2

F_{daN}	n rot/min	Ulei D.T.E. Ex.S. 60 η_{50} = 59,59 c.P.				Ulei Vakumm 1199, η_{50}=3,13 c.P.			
		t °C	t_s °C	$\mathcal{S}_0$	η_t c.P.	t °C	t_s °C	$\mathcal{S}_0$	η_t c.P.
250	300	41,896	39,522	0,4139	90,521	26,085	25,776	6,0662	6,176
	600	57,453	54,152	0,4390	42,667	30,814	30,270	3,5387	5,293
	800	65,781	62,309	0,4639	30,284	34,272	33,618	2,9496	4,763
	1 000	73,149	69,653	0,4886	23,003	37,834	37,094	2,6158	4,296
	1 250	81,432	77,998	0,5181	17,355	42,346	41,524	2,3661	3,800
	2 000	102,531	99,434	0,5964	9,4312	55,254	54,887	2,0442	2,749
500	300	41,709	39,691	0,8194	91,442	27,296	26,847	12,6354	5,930
	600	57,173	54,535	0,8674	43,191	33,603	32,851	7,7102	4,859
	800	65,490	62,758	0,9173	30,630	38,096	37,210	6,5878	4,265
	1 000	72,865	70,128	0,9674	23,273	42,655	41,670	5,9634	3,769
	1 250	81,567	78,864	1,0407	17,280	48,360	47,284	5,5074	3,265
	2 000	105,715	103,169	1,2936	8,688	65,195	63,968	4,9539	2,268
750	600	59,707	57,070	1,4505	38,745	35,645	34,707	12,2848	4,574
	800	69,147	66,443	1,5859	26,577	40,848	39,758	10,6576	3,954
	1 250	87,825	85,045	1,8989	14,209	52,597	51,299	9,1250	2,956
900	300	44,139	42,005	1,6780	80,380	28,706	28,044	23,8214	5,662
	600	61,603	58,877	1,8836	35,804	30,686	35,633	15,1915	4,439
	800	71,474	68,632	2,0700	24,434	47,801	41,022	13,2709	3,811
	1 000	80,473	77,593	2,2597	17,906	54,708	46,471	12,2249	3,309
	1 250	90,853	87,977	2,4924	12,987	74,908	53,273	11,4820	2,819
1 200	600	64,773	61,862	2,8540	31,506	38,517	37,215	21,3306	4,215
	800	75,275	72,244	3,1599	21,342	44,655	43,168	18,8394	3,579
	1 000	84,850	81,778	3,4656	15,586	50,776	49,157	17,4988	3,083

Măsurătorile s-au făcut pentru sarcinile, turaţiile şi uleiurile arătate mai sus. O parte din rezultatele experimentale sînt reprezentate în figurile 7—11, unde s-au trasat şi temperaturile calculate din ecuaţiile (24) şi (25), precum şi temperatura lagărului obţinută prin metoda Vogelpohl [11].

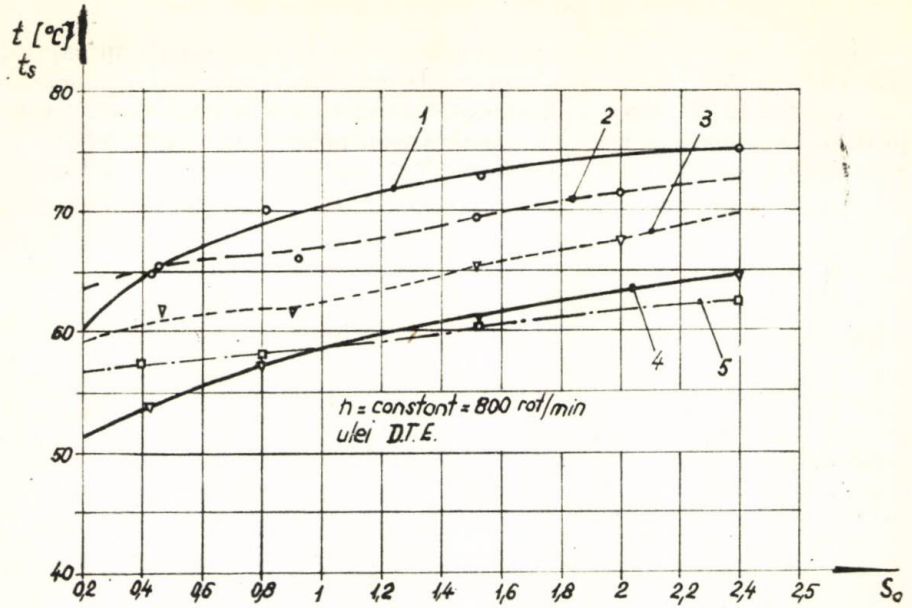


Fig. 7. — Variația temperaturilor calculate și a celor măsurate funcție de S_o, la turație constantă ; $n = 800$ rot/min ; ulei DTE ; 1 — t determinat experimental ; 2 — t calculat din ecuația (24) ; 3 — t_s calculat din ecuația (25) ; 4 — t_s măsurat experimental ; 5 — temperatura lagărului după [11].

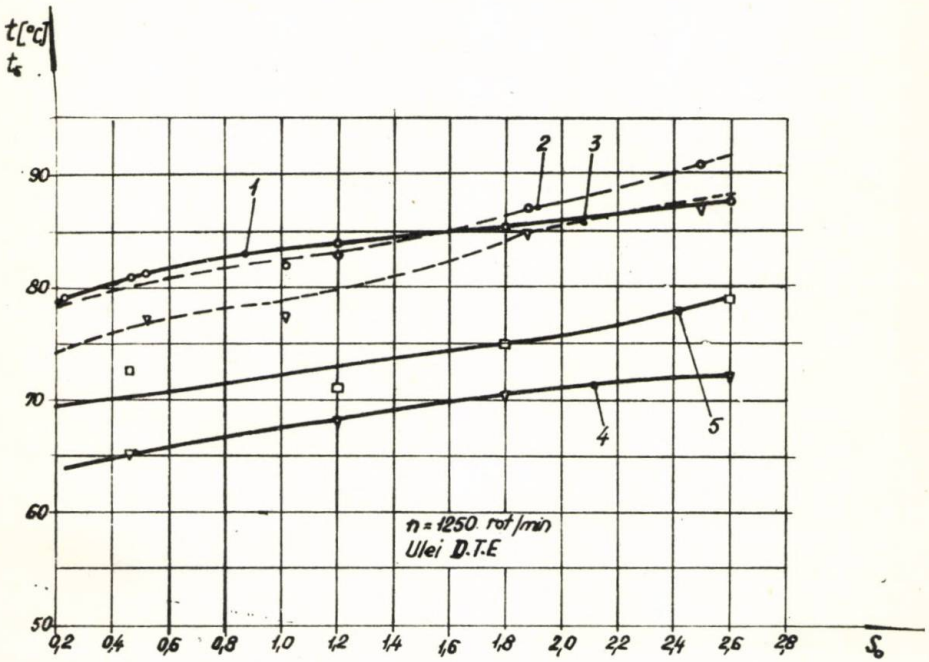


Fig. 8. — Variația temperaturilor calculate și a celor măsurate funcție de S_o, la turație constantă : $n = 1\,250$ rot/min ; ulei DTE ;
1 — t determinat experimental ; 2 — t calculat din ecuația (24) ; 3 — t_s calculat din ecuația (25) ; 4 — t_s măsurat experimental 5 — temperatura lagărului după [11].

Rezultatele experimentale au arătat că ipotezele făcute în capitolul 1 pentru calculul lui W sînt acceptabile. Diferențele de temperatură dintre suprafața de frecare și suprafața exterioară a cuzinetului; dintre suprafața exterioară și interioară a carcasei, precum și dintre baia de ulei și suprafața exterioară a lagărului, au fost cuprinse între 0,5 și 2°C.

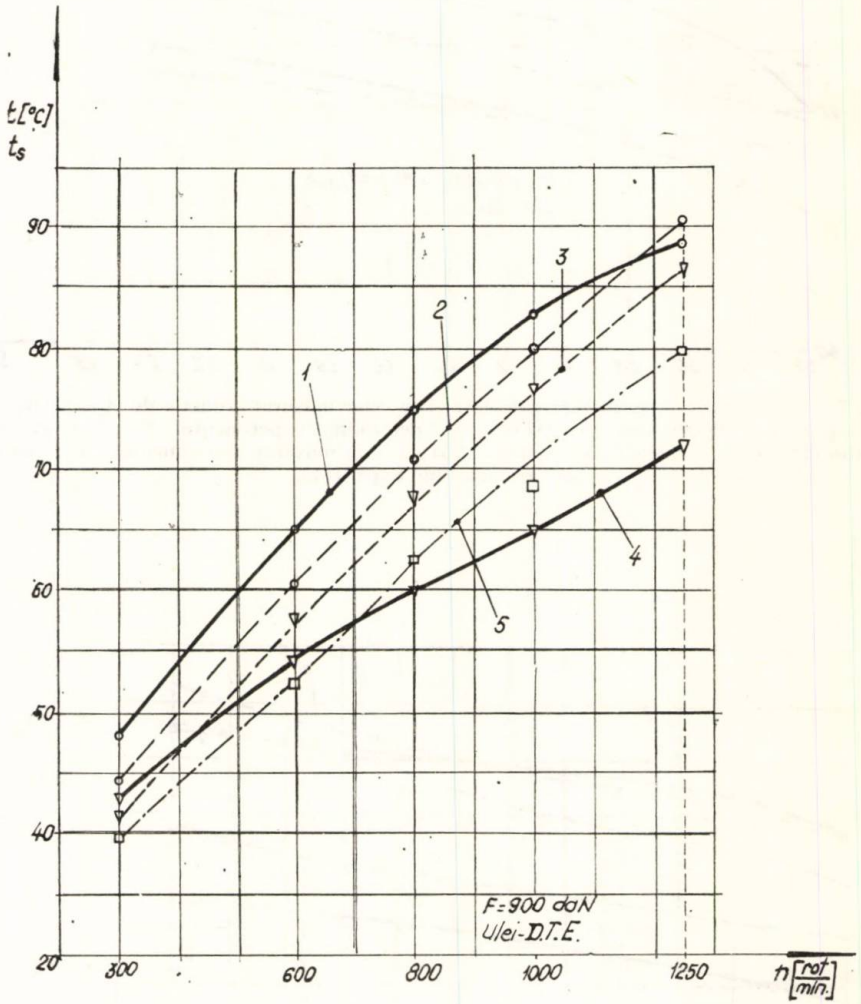


Fig. 9. — Variația temperaturilor calculate și a celor măsurate funcție de turație la sarcină constantă: $F = 900$ daN; ulei DTE.
1 — t determinat experimental; 2 — t calculat din ecuația (24); 3 — t_s calculat din ecuația (25); 4 — t_s măsurat experimental; 5 — temperatura lagărului după [11].

Analizînd figurile 7 — 11 se observă că:

— diferența dintre temperatura suprafeței exterioare și temperatura filmului de lubrifiant, determinată experimental pentru uleiul vîscos, (DTE) este de circa 8 — 14°C;

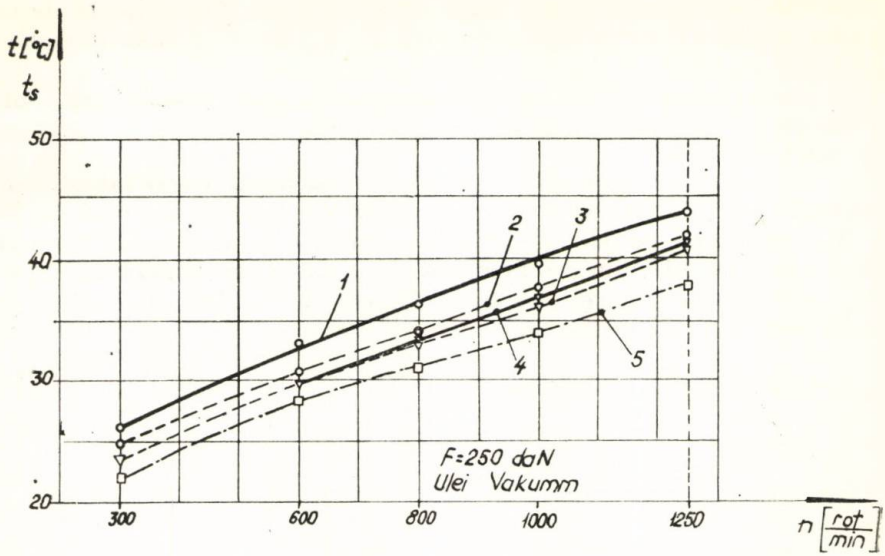


Fig. 10. — Variaţia temperaturilor calculate şi a celor măsurate funcţie de turaţie la sarcină constantă: $F = 250$ daN; ulei Vakumm;
1 — t determinat experimental; 2 — t calculat din ecuaţia (24); 3 — t_s calculat din ecuaţia (25); 4 — t_s măsurat experimental; 5 — temperatura lagărului după [11].

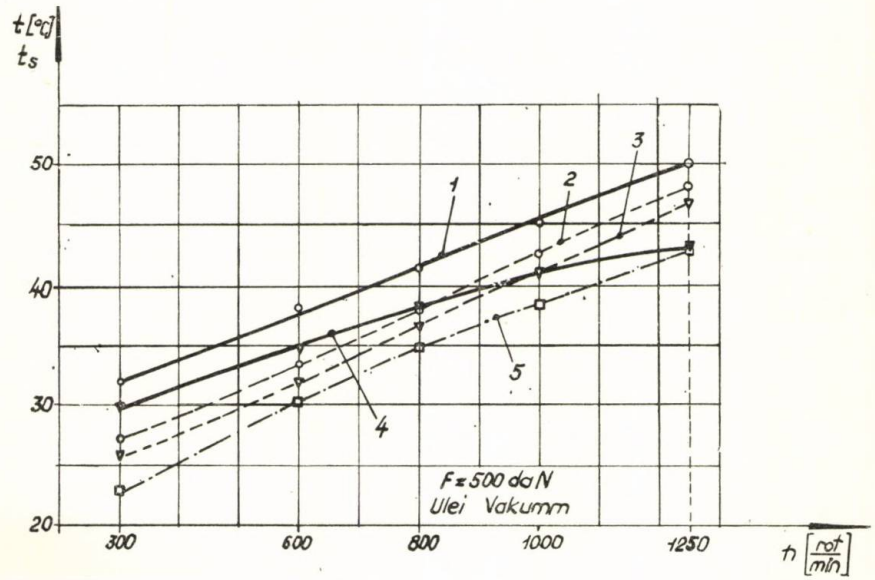


Fig. 11. — Variaţia temperaturilor calculate şi a celor măsurate funcţie de turaţie la sarcină constantă: $F = 500$ daN; ulei Vakumm 1 — t determinat experimental; 2 — t calculat din ecuaţia (24); 3 — t_s calculat din ecuaţia (25); 4 — t_s măsurat experimental; 5 — temperatura lagărului după [11].

— temperatura calculată după, [11], este foarte aproplată de temperatura suprafeței exterioare a lagărului; de altfel la baza metodei stă ipoteza $t = t_s$;

— din ecuația (24) rezultă temperaturi ce aproximează suficient de bine temperatura reală a filmului de lubrifiant; abaterea maximă constată fiind de 6 %;

— temperatura suprafeței exterioare calculată cu ecuația (25), în comparație cu valorile experimentale, prezintă abateri de pînă la 18%.

În concluzie, metoda descrisă mai sus permite determinarea temperaturii medii a filmului de lubrifiant cu o aproximație acceptabilă și ea prezintă interes la lagărele la care căderea de temperatură din corpul lor este considerabil de mare.

Primită la redacție la 6 martie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. A. Cernavski: *Rodșipniki scoljenia.* Moskva, Mașghiz, 1963.
2. A. Chișiu, Dorina Matieșan, A. Antal, A. Dali, T. Mădărășan, D. Pop, *Curs de Organe de mașini.* Vol. I, Litografia învățămîntului, Cluj, 1968.
3. D. D. Fuller, *Theorie und Praxis der Schmierung,* Berliner Union-Stuttgart, 1960.
4. Gh. Manea, *Organe de mașini.* Vol. I. București, Editura tehnică, 1970.
5. G. Noack, *Zur Ermittlung der Betriebstemperatur eines Gleitlagers,* Schmiertechnick **6**, *4*, 173—179 (1959).
6. B. Popa, *Termotehnică.* Vol. III, Litografia învățămîntului, Cluj, 1957.
7. U. Rost, *Das Viscosität — Temperatur — Verhalten von Schmierölen,* Erdöl und Kohle **8**, *9*, 650—651 (1955).
8. H. Sassenfeld, A. Walther, *Gleitlagerberechnung.* V.D.I., Forschungsheft *441.* **B. 20** (1954).
9. K. Spiegel, J. Fricke, *Zur Entwicklung einfacher Axial — Gleitlager für hohe Belastungen,* Schmiertechnik und Tribologie. **16**, *5*, 214—222 (1969).
10. N. Tipei, V. N. Constantinescu, Al. Nica, Olga Biță, *Lagăre de alunecare.* Editura Academiei, 1961.
11. G. Vogelpohl, *Betriebssichere Gleitlager,* 1. Band. 2. Auflage. Springer-Verlag, Berlin, 1967.
12. G. Vogelpohl, *Betriebssichere Gleitlager.* 1. Auflage. Springer-Verlag. Berlin, 1958.

CALCULUL FRECVENȚELOR PROPRII PENTRU SISTEMUL ARBORE-LAGĂRE CU AJUTORUL MATRICELOR DE TRANSFER

de N. GRĂDINARU şi R. IOVĂNESCU
Centrul de mecanică a solidelor

Se prezintă aplicarea metodei elementului finit într-o problemă unidimensională, cu caracter dinamic. Poate fi determinat întreg spectrul frecvenţelor proprii ale unei bare cu reazeme elastice.

Metoda de calcul adoptată în lucrare este metoda elementului finit, care permite folosirea matricilor de transfer.

Spre deosebire de metodele clasice de abordare ale aceleiaşi probleme, cu ajutorul cărora se determină frecvenţele proprii prin tatonări, în lucrarea de faţă această problemă este redusă la cea a determinării valorilor proprii ale unei matrici.

Împărţirea sistemului arbore-lagăr în elemente finite se face după procedeele cunoscute [1], adică acestea sînt delimitate de secţiunile în care se produc modificări ale diametrului arborelui sau de cele în care

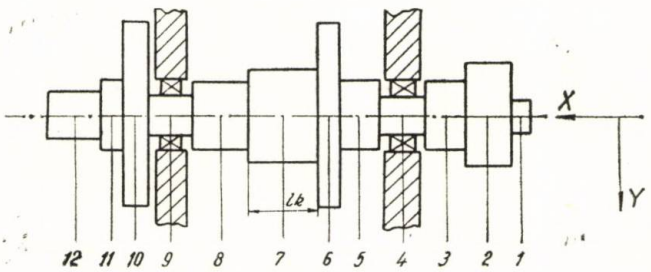


Fig. 1

acţionează reacţiunile datorate lagărelor. Un astfel de element finit îl vom numi în cele ce urmează cîmp. Împărţirea unui sistem arbore-lagăr în cîmpuri este arătată în figura 1.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 32, NR. 1. 1973, P. 123–129

Să considerăm cîmpul k de lungime l_k (fig. 2).

Momentul de inerţie este constant în lungul acestui cîmp. Considerînd sensul de parcurgere de la dreapta la stînga, secţiunea din dreapta unui element este secţiunea anterioară, secţiunea din stînga fiind posterioară.

Secţiunea din dreapta şi din stînga ale cîmpului k vor fi notate deci cu a şi p (anterior, posterior).

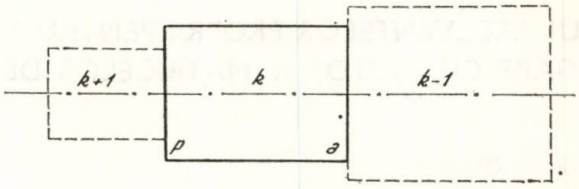


Fig. 2

În secţiunea a vom nota săgeata cu y_a şi rotirea cu φ_a; tot în această secţiune acţionează pe elementul k momentul încovoietor M_a şi forţa tăietoare Q_a. Cele patru mărimi y_a, φ_a, M_a, Q_a caracterizează starea elementului k pe faţa lui de început în secţiunea lui a. Aceste mărimi vor fi interpretate în cele ce urmează, drept componentele unui vector, numit *vectorul de stare la începutul cîmpului k*. Vom nota acest vector cu Z_{ka}.

În mod analog, în secţiunea p a elementului k starea elementului este dată de vectorul de stare Z_{kp}, componentele acestui vector fiind săgeata y_p, rotirea φ_p, momentul încovoietor M_p şi forţa tăietoare Q_p în această secţiune (fig. 3).

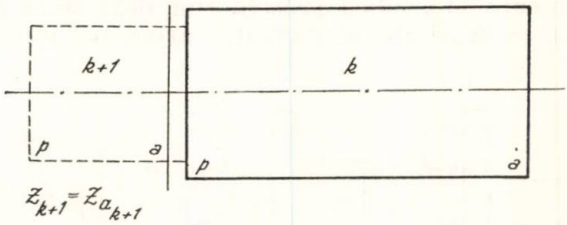


Fig. 3

Presupunînd că deformaţiile arborelui sînt mici, se pot aplica ecuaţiile stabilite în cadrul teoriei rezistenţei materialelor şi în consecinţă putem scrie

$$Z_{kp} = F_k \cdot Z_{ka}, \tag{1}$$

unde F_k este o matrice denumită *matricea cîmpului k*. Domeniul de valaqilitate a unei asemenea matrice este determinat de limitele cîmpului

pentru care ea a fost stabilită. Elementele matricii F_k sînt

$$F_k = \begin{bmatrix} 1 & -l_k & \frac{l_k^2}{2E \cdot I_k} & \frac{l_k^3}{6E\, I_k} \\ 0 & 1 & -\frac{l_k}{E \cdot I_k} & -\frac{l_k^2}{2E \cdot I_k} \\ 0 & 0 & 1 & l_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

unde E este modulul de elasticitate iar I_k este momentul de inerție ale elementului k.

Lagărul este introdus în calcul printr-o *matrice de punct*, care va fi notată de aici înainte cu P_k, deci la sfîrșitul elementului k (atîta timp cît Z_k lucrează la începutul lui). Elementele matricei p_k sînt

$$P_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -C_t & 1 & 0 \\ -C_s & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

unde C_s și C_t sînt constante ale lagărului.

Masa distribuită a arborelui este concentrată în mai multe puncte de-a lungul axei mediane a arborelui (fig. 4).

Admițînd că deplasările $y\,(x)$ respectă o lege de forma

$$y\,(x) = y_A(x) \cos \omega\, t,$$

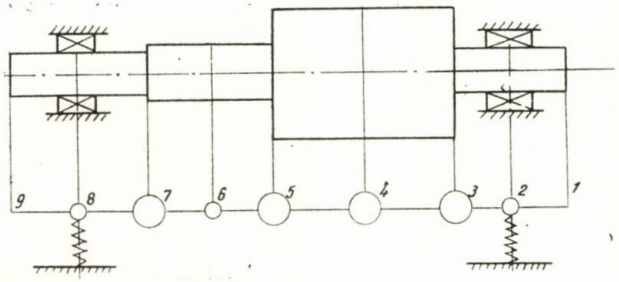


Fig. 4

unde ω este una dintre frecvențele proprii ale sistemului arbore-lagăre, calculul dinamic se reduce la calculul static al sistemului respectiv, avînd drept încărcări exterioare forțele inerțiale maxime aplicate în punctele de concentrare a masei distribuite a arborelui.

Astfel, în punctul k, corespunzător masei concentrate m_k acționează forțele inerțiale de amplitudine :

$$Q_{in} = m_k \cdot y_k \cdot \omega^2, \tag{4}$$

$$M_{in} = m_k \cdot \frac{I_k}{A_k} \varphi_k \omega^2, \tag{5}$$

unde A_k este aria secțiunii în punctul k.

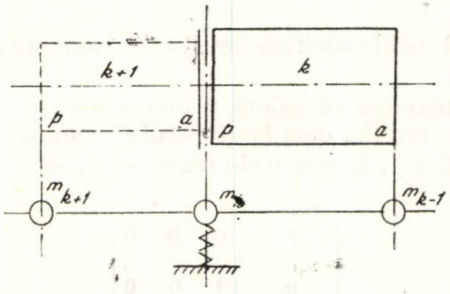


Fig. 5

Revenind la noțiunile de element, față „anterioară" și față „posterioară" a elementului vector de stare, amplitudinile componentelor vectorului de stare care acționează pe fața posterioară a elementului se exprimă în funcție de amplitudinile componentelor vectorului de stare de la începutul elementului, prin relația matricială (fig. 5)

$$Z_{kp} = (U_k + \omega^2 R_k) Z_{ka}, \tag{6}$$

unde

$$U_k = P_k \cdot F_k, \tag{7}$$

$$R_k = T_k \cdot F_k, \tag{8}$$

$$Z_k = \begin{pmatrix} y_k \\ \varphi_k \\ M_k \\ Q_k \end{pmatrix}, \tag{9}$$

iar

$$T_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_k \frac{I_k}{A_k} & 0 & 0 \\ m_k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Cunoscînd modul de trecere de la un vector de stare de început de element la un vector de stare de sfîrșit de element, poate fi obținut direct vectorul de stare de sfîrșit al elementului k. Relațiile de recurență sînt:

$$\begin{aligned} Z_2 &= (U_1 + \omega^2 R_1) Z_1, \\ Z_3 &= (U_2 + \omega^2 R_2) Z_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ Z_k &= (U_{k-1} + \omega^2 R_{k-1}) Z_{k-1}, \end{aligned} \tag{11}$$

de unde

$$Z_k = \prod_j^{1,k-1} (U_j + \omega^2 R_j) Z_1. \tag{12}$$

Efectuînd produsul de matrice din relația de mai sus obținem

$$Z_k = (A_0^{(k)} \omega^{2k-2} + A_2^{(k)} \omega^{2k-4} + \ldots + A_{2k-4}^{(k)} \omega^2 + A_{2k-2}^{(k)}) Z_1, \tag{13}$$

unde matricele $A_{2k-2j}^{(k)}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ sînt matrice pătrate de ordinul patru care se exprimă în funcție de matricile U_j, R_j cu ajutorul formulei de recurență

$$A_{2k-2j}^{(k)} = U_{k-1} \cdot A_{2k-2-2j}^{(k-1)} + R_{k-1} \cdot A_{2k-2j}^{(k-1)} \qquad (j = 1,2, \ldots, k). \tag{14}$$

Vectorul de stare de sfîrșit de arbore se obține cu ajutorul relației (13) pentru $k = n$. El are expresia

$$Z_n = \left(\sum_j^{1,n} A_{2n-2j}^{(n)} \omega^{2j-2} \right) Z_1. \tag{15}$$

Vectorii de stare, de început și de sfîrșit de arbore trebuie să satisfacă condițiile de margine. Acestea sînt:

$$(CO)\, Z_1 = 0, \tag{16}$$

$$(KO)\, Z_n = 0, \tag{17}$$

unde CO și KO sînt matrice dreptunghiulare de ordinul (2,4). Relațiile (15), (16), (17), formează un sistem de opt ecuații cu opt necunoscute y_1, φ_1, M_1, Q_1, y_n, φ_n, M_n, Q_n omogen. Acest sistem poate fi redus la un sistem de două ecuații cu două necunoscute în modul următor. Cu ajutorul relației (17), relația (15) devine

$$\left(\sum_j^{1,n} (KO) \cdot A_{2n-2j} \cdot \omega^{2j-2} \right) Z_1 = 0. \tag{18}$$

Relaţiile (16) scrise dezvoltat sînt :

$$\begin{aligned} C_{11}y_1 + C_{12}\varphi_1 + C_{13}M_1 + C_{14}Q_1 &= 0, \\ C_{21}y_1 + C_{22}\varphi_1 + C_{23}M_1 + C_{24}Q_1 &= 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Modificînd convenabil ordinea în care apar elementele y_1, φ_1, M_1, Q_1 în vectorul de stare Z_1, relaţiile precedente pot fi scrise, dacă presupunem că determinantul

$$\begin{vmatrix} C_{1\alpha} & C_{1\beta} \\ C_{2\alpha} & C_{2\beta} \end{vmatrix},$$

este nenul, astfel :

$$\begin{aligned} C_{1\alpha}Z_{1\alpha} + C_{1\beta}Z_{1\beta} + C_{1\gamma}Z_{1\gamma} + C_{1\delta}Z_{1\delta} &= 0, \\ C_{2\alpha}Z_{1\alpha} + C_{2\beta}Z_{1\beta} + C_{2\gamma}Z_{1\gamma} + C_{2\delta}Z_{1\delta} &= 0, \end{aligned} \tag{20}$$

unde $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta$ şi $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1, 2, 3, 4)$, iar $Z_{1\alpha}$, $Z_{1\beta}$, $Z_{1\gamma}$, $Z_{1\delta}$ sînt elementele vectorului de stare Z_1 scrise într-o altă ordine. Acum putem exprima două elemente ale vectorului Z_1 în funcţie de celelalte două :

$$\begin{pmatrix} Z_{1\alpha} \\ Z_{1\beta} \end{pmatrix} = (s) \begin{pmatrix} Z_{1\gamma} \\ Z_{1\delta} \end{pmatrix}, \tag{21}$$

cu

$$(s) = -\begin{pmatrix} C_{1\alpha} & C_{1\beta} \\ C_{2\alpha} & C_{2\beta} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C_{1\gamma} & C_{1\delta} \\ C_{2\gamma} & C_{2\delta} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Cu notaţiile

$$\overline{\overline{Z}}_1 = \begin{pmatrix} Z_{1\alpha} \\ Z_{1\beta} \end{pmatrix}; \quad \overline{Z}_1 = \begin{pmatrix} Z_{1\gamma} \\ Z_{1\delta} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Vectorul de stare Z_1 poate fi partiţionat (într-o altă ordine a elementelor) astfel

$$\begin{pmatrix} \overline{\overline{Z}}_1 \\ \overline{Z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (s)\overline{Z}_1 \\ \overline{Z}_1 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Ţinînd seama de noul mod de scriere a vectorului de stare Z_1 relaţia (18) devine :

$$\left[\sum_j^{1,n} ((s) \cdot A^{(n)}_{\alpha\beta,2n-2j} + A^{(n)}_{\gamma\delta,2n-2j}) \cdot \omega^{2j-2} \right] \overline{Z}_1 = 0, \tag{25}$$

matricile $A^{(n)}_{\alpha\beta,2n-2j}$, $A^{(n)}_{\gamma\delta,2n-2j}$ fiind matrice pătrate de ordinul doi formate din coloanele α şi β, respectiv γ şi δ ale matricei (KO). $A^{(n)}_{2n-2j}$. Relaţia (25) reprezintă chiar sistemul căutat. Condiţia ca acest sistem să admită soluţii nebanale este ca

$$\det \left| \sum_j^{1,n} ((s) \cdot A^{(n)}_{\alpha\beta,2n-2j} + A^{(n)}_{\gamma\delta,2n-2j}) \omega^{2j-2} \right| = 0, \tag{26}$$

care mai poate fi scrisă și sub forma

$$\det|I - \lambda S_1 - \lambda^2 S_2 - \ldots - \lambda^{n-1} S_{n-1}| = 0, \tag{27}$$

cu

$$S_j = -[(s)\cdot A^{(n)}_{\alpha\beta,2n-2} + A_{\gamma\delta,2n-2}]^{-1}[(s)\cdot A^{(n)}_{\alpha\beta,2n-2j-2} + A^{(n)}_{\gamma\delta,2n-2j-2}] \tag{28}$$

$$(j = 1,2,\ldots,n-1),$$

$$\lambda = \omega^2. \tag{29}$$

Rezolvarea ecuației scalare (27) este echivalentă cu aflarea valorilor proprii ale matricei [2]

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \ldots S_{n-1} \\ I & 0 \ldots 0 \\ 0 & I \ldots 0 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 0 & 0 \quad I \; 0 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

În acest mod, aflarea frecvențelor proprii ale unui sistem arbore-lagăre împărțit în n elemente, cu $n-1$ mase concentrate se reduce la determinarea valorilor proprii ale unei matrici de ordinul $2n-2$.

Deoarece fiecare punct de concentrare a masei arborelui prezintă 2 grade de libertate (datorită considerării atît a forțelor, cît și a cuplurilor de inerție Q_{in}, M_{in}), întregul sistem arbore-lagăre are $2n-2$ grade de libertate, cu alte cuvinte numărul gradelor de libertate coincide cu ordinul matricei S.

Determinarea uneia dintre frecvențele proprii permite apoi deducerea coeficienților sistemului (25), deci determinarea cu excepția unei constante a vectorului $\overline{Z}_1$. Vectorul $\overline{Z}_1$ se găsește cu ajutorul relației (21), prin urmare vectorul de stare de început de arbore Z_1, este astfel perfect determinat. Ceilalți vectori de stare se află cu ajutorul relației (13), unde de astă dată vectorul de stare Z_1 conține elementele sale în ordinea inițială (y, φ, M, Q).

Metoda prezentată a fost transpusă într-un program de calcul în limbaj FORTRAN.

Primită la redacție la 25 martie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. E. C. Pestel, E. A. Leckie, *Matrix Methods in Elastomechanics*, Mc. Graw Hill Inc. N. Y., 1963.
2. R. Bellman, *Introducere în analiza matricială*, Edit. tehnică, București, 1969.

INFLUENȚA VARIAȚIEI DE TEMPERATURĂ ASUPRA ÎMBINĂRILOR PRIN FLANȘE

de MAGDALENA POSEA
Institutul de construcții București

Cu ajutorul metodei elementului finit s-a alcătuit un algoritm corespunzător pentru stabilirea influenței variației de temperatură asupra eforturilor și deformațiilor unei îmbinări prin flanșe pentru cazul cel mai general al variației de temperatură.
Acest algoritm folosește sistemul de ecuații stabilit pentru cazul acțiunii sarcinilor exterioare în ceea ce privește necunoscutele și coeficienții acestora.
Variația de temperatură intervine sub forma unor termeni liberi a căror expresie este stabilită în această lucrare atît pentru diferența de temperatură dintre flanșă și șuruburi, cît și pentru variația de temperatură pe grosimea și în lungul flanșei și mantalei.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

În timpul exploatării vaselor și aparatelor prevăzute cu îmbinări prin flanșe pot interveni, față de montaj, mari variații de temperatură, ceea ce provoacă în sistemul de îmbinare apariția unor eforturi suplimentare importante.

Determinarea exactă a acestor eforturi contribuie atît la stabilirea optimă a dimensiunilor elementelor îmbinării, cît și la fixarea unor condiții raționale de exploatare.

În cadrul metodei generale de calcul a îmbinărilor prin flanșe bazată pe teoria elementului finit [4], [5] este posibil să se evalueze influența variației de temperatură în mod exact, pentru toate elementele îmbinării.

În continuare se va detalia un procedeu de calcul al eforturilor și deplasărilor produse de o variație de temperatură simetrică față de axul îmbinării.

Se analizează cazul general al unei flanșe cu gît supusă la creșterile de temperatură față de montaj, pentru gît, taler, șuruburi și garnitură, indicate în figura 1 și acționată de forțele din șuruburi p_s, considerate uniform repartizate pe circumferința de distribuție a șuruburilor și reac-

ţiunea garniturii p_g. Toate încărcările flanşei sînt simetrice în raport cu axul de rotaţie al aparatului. În scopul aplicării metodei elementului finit întreaga secţiune a flanşei (fig. 1 *b*) se împarte, prin linii imaginare, în

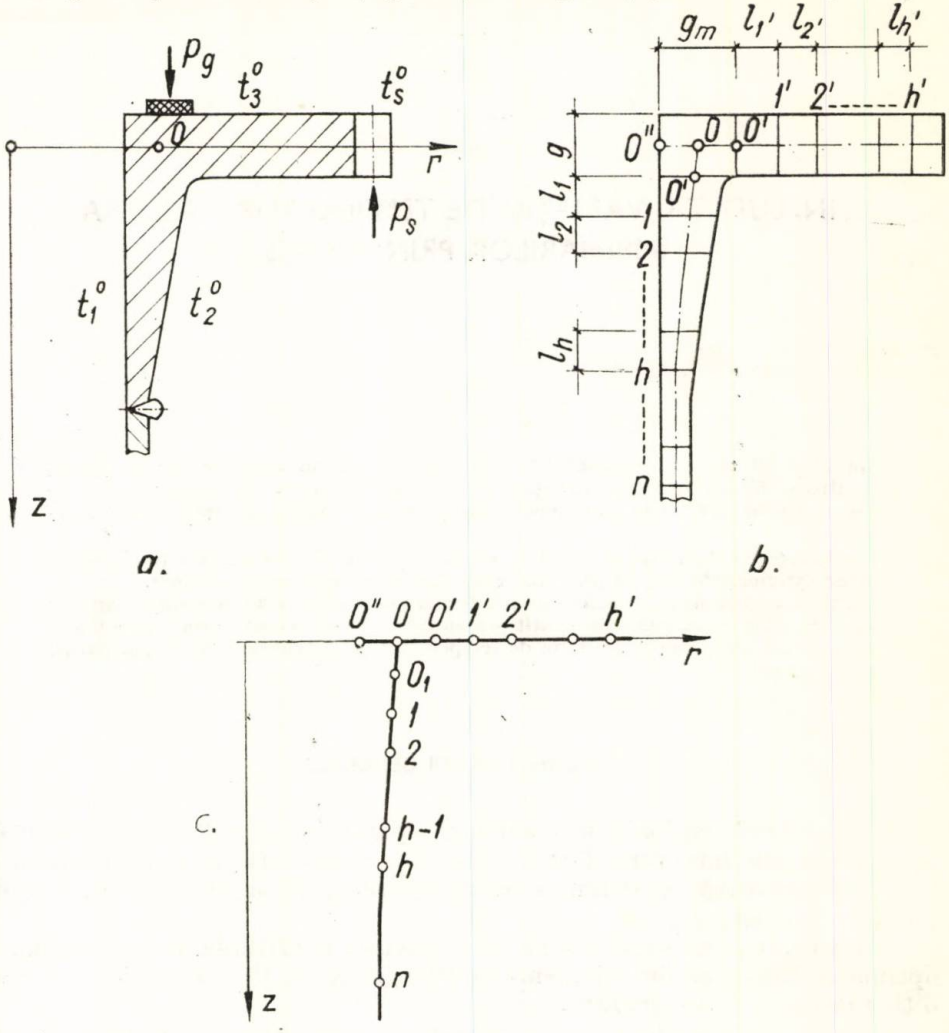


Fig. 1

elemente finite. Considerîndu-se ca necunoscute de bază deplasările punctelor de separaţie dintre elemente, denumite noduri (fig. 1 *c*), etapele principale de calcul sînt;

a) alegerea unei funcţii care defineşte în mod unic deplasările pe lungimea fiecărui element, în funcţie de deplasările celor două noduri, reprezentînd capetele elementului finit considerat;

b) exprimarea eforturilor în interiorul elementului în funcţie de deformaţiile considerate şi de caracteristicile elastice şi geometrice ale elementului respectiv;

c) determinarea unui sistem de forțe nodale (forțe și cuple) care echilibrează tensiunile de margine și sarcinile exterioare de pe elementul finit analizat ;

d) alcătuirea unui sistem de ecuații algebrice prin scrierea echilibrului forțelor din punctele nodale, a cărui soluție reprezintă tocmai deplasările nodurilor ;

e) determinarea stării de deformație și de eforturi în orice punct al secțiunii, cu expresiile stabilite la punctul b).

2. ECUAȚIILE DE CONDIȚIE PENTRU GÎTUL FLANȘEI

2.1. DEFORMAȚII SPECIFICE LIBERE DIN VARIAȚIA DE TEMPERATURĂ

Pentru un element infinitezimal de pe gît (fig. 2 *b*) deformațiile specifice libere ($\varepsilon_s^{t^0}$ după direcția generatoarei și $\varepsilon_\theta^{t^0}$ după inel) din variația de temperatură într-un punct curent al grosimii sînt

$$\varepsilon_s^{t^0} = \varepsilon_\theta^{t^0} = \alpha t^0 - \alpha \frac{t'^0}{g} y, \tag{1}$$

în care

$$t^0 = \frac{t_1^0 + t_2^0}{2}, \tag{2}$$

reprezintă creșterea de temperatură a suprafeței mediane, iar

$$t'^0 = t_1^0 - t_2^0$$

diferența de temperatură dintre fețe.

Pe figura 2 *b* s-a considerat $t_1^0 > t_2^0$.

Legea generalizată a lui Hooke capătă în acest caz forma

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{1}{E}(\sigma_s - \mu\sigma_\theta) + \alpha t^0 - \frac{\alpha t'^0}{g} y, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \mu\sigma_s) + \alpha t^0 - \frac{\alpha t'^0}{g} y. \end{aligned} \tag{3}$$

2.2. EXPRIMAREA DEFORMAȚIILOR SPECIFICE ȘI A EFORTURILOR SECȚIONALE FUNCȚIE DE DEPLASĂRILE NODURILOR

Pentru un element finit $i - j$ (fig. 3 *a*) se aleg ca necunoscute deplasările nodurilor (u_i, w_i, φ_i, u_j, w_j, φ_j).

Vectorul necunoscutelor pentru elementul considerat este

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix}, \tag{4}$$

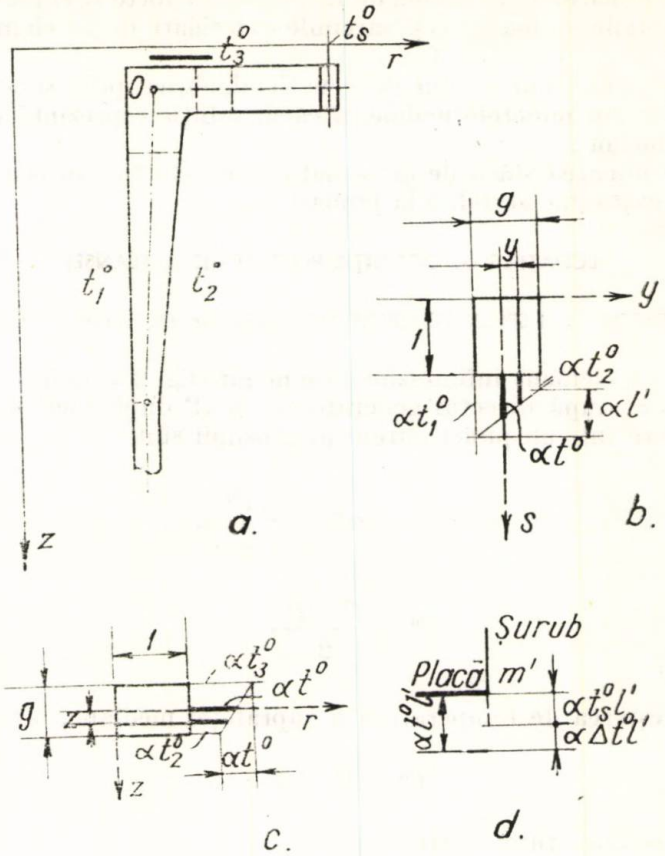

t_s^o
t_3^o
r
0
t_1^o
t_2^o
z
a.
g
y
y
l
αt_2^o
αt_1^o
$\alpha l'$
αt^o
s
b.
l
αt_3^o
αt^o
g
z
r
αt_2^o
αt^o
z
c.
Şurub
Placă
m'
$\alpha t_1^o l'$
$\alpha t_s^o l'$
$\alpha \Delta t l'$
d.

Fig. 2

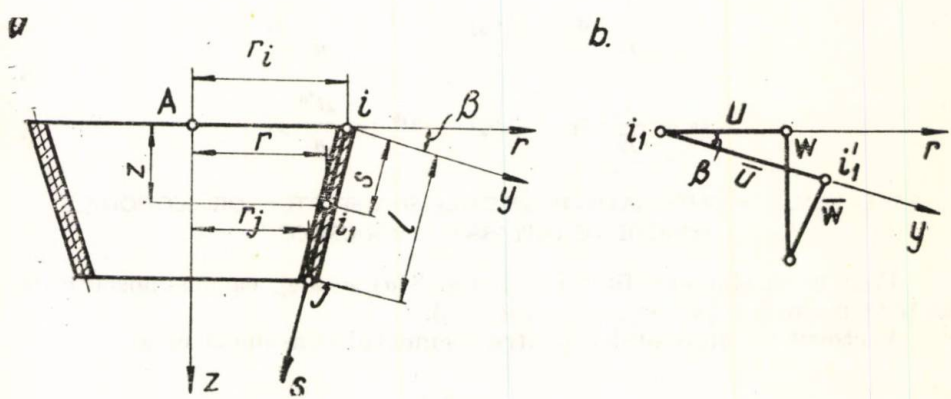

a
r_i
A
i
β
r
r
y
z
s
r_j
i_1
l
j
z
s
b.
i_1
U
W
r
β
$\bar{U}$
i_1'
$\bar{W}$
y

Fig. 3

în care

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \varphi_i \end{Bmatrix}; \quad \{\delta_j\} = \begin{Bmatrix} u_j \\ w_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix}. \tag{5}$$

Raportat la sistemul de axe $r - z$, într-un punct curent vectorul necunoscutelor este

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \varphi \end{Bmatrix}, \tag{6}$$

iar în sistemul $y - s$

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \overline{u} \\ \overline{w} \\ \overline{\varphi} \end{Bmatrix} = [\lambda]\{\delta\}, \tag{7}$$

în care

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

este matricea de transformare a deplasărilor din sistemul $r - z$ în sistemul $y - s$.

Deplasările $\overline{u}$ și $\overline{w}$ se pot alege în funcție de șase parametri sub forma

$$\begin{aligned} \overline{u} &= \alpha_1 + \alpha_2 s + \alpha_3 s^2 + \alpha_4 s^3, \\ \overline{w} &= \alpha_5 + \alpha_6 s. \end{aligned} \tag{a}$$

Valorile parametrilor $\alpha_1 \ldots \alpha_6$ se determină din condițiile la limită din punctele i $(s = 0)$ și j $(s = l)$ în funcție de deplasările nodurilor și expresiile (a) capătă forma

$$\overline{u} = \overline{u}_i\left(1 - 3\frac{s^2}{l^2} + \frac{s^3}{l^3}\right) + \overline{\varphi}_i l\left(\frac{s}{l} - 2\frac{s^2}{l^2} + \frac{s^3}{l^3}\right) + \overline{u}_j\left(3\frac{s^2}{l^2} - 2\frac{s^3}{l^3}\right) +$$

$$+ \overline{\varphi}_j l\left(-\frac{s^2}{l^2} + \frac{s^3}{l^3}\right),$$

$$\overline{w} = \overline{w}_i\left(1 - \frac{s}{l}\right) + \overline{w}_j\frac{s}{l},$$

notînd $s' = \dfrac{s}{l}$, deplasările $\overline{u}$ și $\overline{w}$ pot fi constituite în vectorul

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} \overline{u} \\ \overline{w} \end{Bmatrix} = [H_i H_j]\begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} = [H]\{\delta\}^e, \tag{9}$$

în care

$$[H_i] = [H_i'][\lambda]; \quad [H_j] = [H_j'][\lambda]; \quad [H] = [H_i, H_j], \tag{10}$$

$$[H_i'] = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 - 3s'^2 + 2s'^3 & 0 & l(s' - 2s'^2 + s'^3) \\ 0 & 1 - s' & 0 \end{array}\right], \tag{11}$$

$$[H_j'] = \left[\begin{array}{c|c|c} 3s'^2 - 2s'^2 & 0 & l(-s'^2 + s'^3) \\ 0 & s' & 0 \end{array}\right]. \tag{12}$$

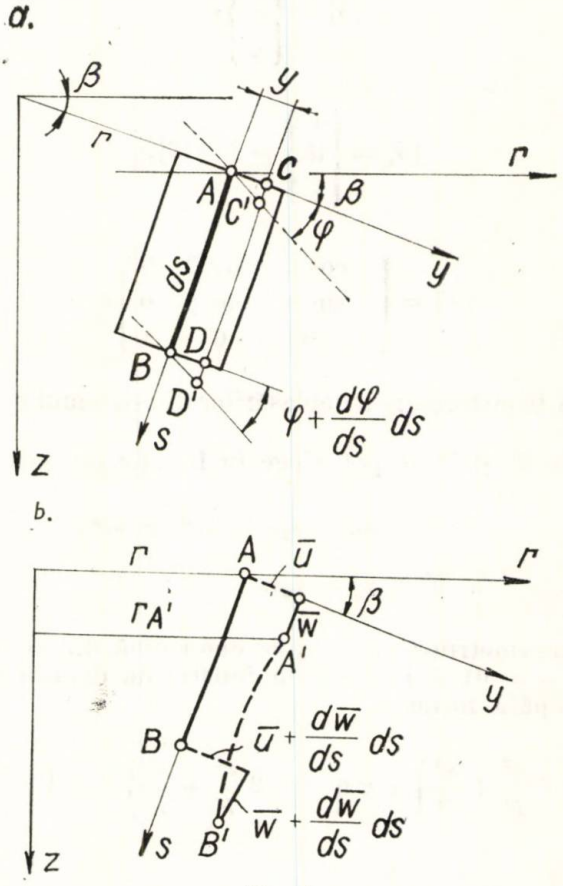


Fig. 4

Pentru un element de lungime ds, după generatoare (fig. 4) deformațiile specifice în funcție de deplasări se pot scrie sub forma [5]:

$$\varepsilon_{sy} = \frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}s} + y\frac{\mathrm{d}^2\bar{u}}{\mathrm{d}s^2}, \tag{13}$$

$$\varepsilon_{\theta y} = \frac{\bar{u}\cos\beta - \bar{w}\sin\beta}{r} - y\frac{\sin\beta}{r}\frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}s}. \tag{14}$$

Explicitînd pe σ_s și σ_θ din expresiile (3) și scriind relațiile de echivalență dintre eforturile unitare normale și cele secționale, rezultă vectorul eforturilor secționale funcție de deplasări

$$\{N\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^{t^0}\}) = [D]\{\varepsilon^*\}, \tag{15}$$

în care

$$[D] = \frac{Eg}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 & 0 \\ \mu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^2/12 & \mu g^2/12 \\ 0 & 0 & \mu g^2/12 & g^2/12 \end{bmatrix} \tag{16}$$

este matricea elementelor elastice și geometrice,

$$\{\varepsilon^*\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s^* \\ \varepsilon_\theta^* \\ \chi_s^* \\ \chi_\theta^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{d\overline{w}}{ds} + \alpha t^0 \\ (\overline{u}\cos\beta - \overline{w}\sin\beta)/r + \alpha t^0 \\ -\dfrac{d^2\overline{u}}{ds^2} - \dfrac{\alpha t'^0}{g} \\ \dfrac{\sin\beta}{r}\dfrac{d\overline{u}}{ds} - \dfrac{\alpha t'^0}{g} \end{Bmatrix} \tag{17}$$

reprezintă vectorul deformațiilor specifice, luîndu-se în considerație atît sarcinile exterioare efectiv aplicate, cît și variația de temperatură,

$$\{\varepsilon^{t^0}\} = \left\{\alpha t^0,\ \alpha t^0,\ -\frac{\alpha t'^0}{g},\ -\frac{\alpha t'^0}{g}\right\}^T \tag{18}$$

este vectorul deformațiilor specifice numai din variația de temperatură, iar

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\}^e = [B_i, B_j]\{\delta\}^e \tag{19}$$

reprezintă vectorul deformațiilor specifice într-un punct de pe un element finit oarecare în funcție de deplasările nodurilor elementului [5].

Matricele $[B]$, $[B_i]$ și $[B_j]$ din (19) sînt date de

$$[B_i] = [B_i'][\lambda]; \quad [B_j] = [B_j'][\lambda]; \quad [B] = [B_i, B_j]. \tag{20}$$

Prin $[B_i']$ și $[B_j']$ s-a notat [5]

$$[B_i'] = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & -1/l & 0 \\ \hline (1-3s'^2+2s'^3)\dfrac{\cos\beta}{r} & -\dfrac{1-s'}{r}\sin\beta & \dfrac{l}{r}(s'-2s'^2+s'^3)\cos\beta \\ \hline \dfrac{6}{l}(1-2s') & 0 & \dfrac{2}{l}(2-3s') \\ \hline \dfrac{6\sin\beta}{lr}(1-2s') & 0 & (1-4s'+3s'^2)\dfrac{\sin\beta}{r} \end{array}\right], \tag{21}$$

$$[B_i'] = \begin{bmatrix} 0 & 1/l & 0 \\ \dfrac{3s'^2 - 2s'^3}{r}\cos\beta & -\dfrac{s'}{r}\sin\beta & \dfrac{l}{r}(-s'^2 + s'^3)\cos\beta \\ -\dfrac{6}{l^2}(1-2s') & 0 & \dfrac{2}{l}(1-3s') \\ \dfrac{6}{lr}(s'-s'^2)\sin\beta & 0 & \dfrac{1}{r}(-2s' + 2s'^2)\sin\beta \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Introducînd pe (9) în (17) se obţine vectorul eforturilor secţionale în funcţie de deplasările nodurilor

$$\{N\} = [D]([B]\{\delta\}^e - \{\varepsilon^{t^0}\}) = [D]([B_i, B_j]\{\delta\}^e - \{\varepsilon^{t^0}\}). \quad (23)$$

Vectorul forţelor nodale corespunzător sarcinilor exterioare efectiv aplicate, fără considerarea temperaturii este [5]

$$\{F\}^e = [k]^e\{\delta\}^e - \{F\}_p^e. \quad (24)$$

Pe baza relaţiei (23) şi ţinînd seama de (24) forţele nodale pentru cazul analizat în lucrarea de faţă devine

$$\{F\}^e = [k]^e\{\delta\}^e - \{F\}_p^e - \{F\}_{t^0}^e, \quad (25)$$

în care vectorul

$$\{F\}_{t^0}^e = \int_{(e)} [B]^T [D]\{\varepsilon^{t^0}\}\, 2\pi rl\, ds', \quad (26)$$

reprezintă forţele nodale datorită variaţiei de temperatură.

Folosind expresia (25) a forţelor nodale, sistemul ecuaţiilor de condiţie va fi

$$[k_{h,h-1}]^h\{\delta_{h-1}\} + ([k_{hh}]^h + [k_{hh}]^{h+1})\{\delta_h\} + [k_{h,h+1}]^{k+1}\{\delta_{h+1}\} - \\ - (\{F_h\}_p^h + \{F_h\}_p^{h+1} + \{F_h\}_{t^0}^h + \{F_h\}_{t^0}^{h+1}) = 0, \quad (27)$$

$$h = 1, 2, \ldots n.$$

Acesta diferă de sistemul ecuaţiilor de condiţie stabilit în (5) pentru cazul în care nu se ia în considerare variaţia de temperatură prin prezenţa forţelor nodale :

$$\{F_h\}_{t^0}^h = \int [B_j]^T [D]\{\varepsilon^{t^0}\}_h\, 2\pi rl\, ds', \quad (28)$$

$$\{F_h\}_{t^0}^{h+1} = \int [B_i]^T [D]\{\varepsilon^{t^0}\}_{h+1}\, 2\pi rl\, ds', \quad (29)$$

care s-au stabilit prin utilizarea relaţiei (20) şi particularizarea pentru nodul h a relaţiei (26).

3. ECUAȚIILE DE CONDIȚIE PENTRU TALERUL FLANȘEI

3.1. DEFORMAȚII SPECIFICE LIBERE DIN VARIAȚIA DE TEMPERATURĂ

Pentru un element de pe taler (fig. 2 *c*), notînd temperatura în ax (t^0) și diferența de temperatură dintre fețe (t'^0)

$$t^0 = \frac{t_3^0 + t_2^0}{2}; \quad t'^0 = t_3^0 - t_2, \tag{30}$$

deformațiile specifice din variația de temperatură, considerînd $t_3^0 > t_2^0$, sînt

$$\varepsilon_r^{t^0} = \varepsilon_\theta^{t^0} = \alpha t^0 - \frac{\alpha t'^0}{g} z. \tag{31}$$

Legea generalizată a lui Hooke în acest caz este :

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_\theta) + \alpha t^0 - \frac{\alpha t'^0}{g} z, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \mu\sigma_r) + \alpha t^0 - \frac{\alpha t'^0}{g} z. \end{aligned} \tag{32}$$

3.2. EXPRIMAREA DEFORMAȚIILOR SPECIFICE ȘI A EFORTURILOR SECȚIONALE FUNCȚIE DE DEPLASĂRILE NODURILOR

La o placă circulară încărcată simetric față de axul central cu sarcini normale [2], [3] eforturile secționale M_r, M_θ, T_r, se exprimă în funcție de deplasarea $w = w(r)$ normală pe planul plăcii, iar eforturile secționale N_r, N_θ în funcție de deplasarea după rază $u = u(r)$ prin relațiile :

$$\begin{aligned} M_r &= -\frac{Eg^3}{(1-\mu^2)}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} + \mu\frac{\varphi}{r}\right) = -\frac{Eg^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}r^2} + \mu\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right), \\ M_\theta &= -\frac{Eg^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{\varphi}{r} + \mu\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{Eg^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} + \mu\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}r^2}\right), \\ T_r &= -\frac{Eg^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} - \frac{\varphi}{r^2}\right) = \\ &= -\frac{Eg^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}r^3} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}r^2} - \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right), \\ N_r &= \frac{Eg}{1-\mu^2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} + \mu\frac{u}{r}\right), \\ N_\theta &= \frac{Eg}{1-\mu^2}\left(\frac{u}{r} + \mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right). \end{aligned} \tag{33}$$

Eforturile secţionale şi deplasările se constituie în cîte o matrice coloană astfel :

$$\{N\} = \{N_r N_\theta M_r M_\theta T_r\}^T, \tag{34}$$

$$\{\delta\} = \{uw\varphi\}^T. \tag{35}$$

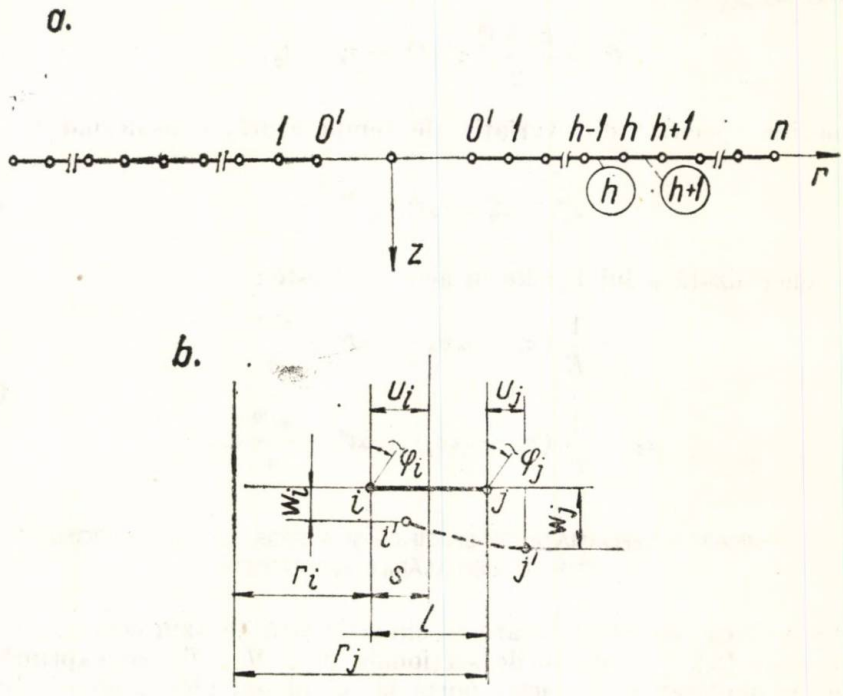


Fig. 5

Alegînd un element finit $i - j$ de lungime l, deplasările de la capete (fig. 5) :

$$\{\delta_i\} = \{u_i w_i \varphi_i\}; \quad \{\delta_j\} = \{u_j w_j \varphi_j\}, \tag{36}$$

vor forma vectorul coloană

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix}. \tag{37}$$

Deplasările u, w într-un punct curent s al elementului, se constituie în vectorul

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix}, \tag{38}$$

care este denumit funcţia deplasărilor.

Deplasările u și w dependente de parametrul s (fig. 5) și de șase constante [5] se aleg sub forma :

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 s,$$

$$w = \alpha_3 + \alpha_4 s + \alpha_5 s^2 + \alpha_6 s^3.$$

Procedînd identic ca la punctul 2.2 se ajunge la forma

$$\{f\} = [H_i H_j]\{\delta\}^e = [H]\{\delta\}^e, \tag{39}$$

în care s-a notat

$$[H_i] = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 - s' & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 - 3s'^2 + 2s'^3 & l(s' - 2s'^2 + s'^3) \end{array}\right], \tag{40}$$

$$[H_j] = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3s'^2 - 2s'^3 & l(-s'^2 + s'^3) \end{array}\right]. \tag{41}$$

Explicitînd pe σ_r și σ_θ din (32) și utilizînd relațiile de echivalență dintre eforturile unitare normale și eforturile secționale, rezultă vectorul eforturilor secționale funcție de deplasări

$$\{N\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^{t^0}\}) = [D]\{\varepsilon^*\}, \tag{42}$$

în care

$$[D] = \frac{Eg}{1 - \mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^2/12 & \mu g^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & \mu g^2/12 & g^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g^2/12 \end{bmatrix} \tag{43}$$

este matricea elementelor elastice și geometrice,

$$\{\varepsilon^*\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r^* \\ \varepsilon_\theta^* \\ \chi_r^* \\ \chi_\theta^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} + \alpha t^0 \\ \dfrac{u}{r} + \alpha t^0 \\ -\dfrac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} - \dfrac{\alpha t'^0}{g} \\ -\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} - \dfrac{\alpha t'^0}{g} \\ -\left(\dfrac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}r^3} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right) \end{Bmatrix} \tag{44}$$

reprezintă vectorul deformaţiilor specifice dacă se ţine seama atît de sarcinile exterioare efectiv aplicate, cît şi de variaţia de temperatură ;

$$\{\varepsilon^{t^0}\} = \left\{\alpha t^0,\ \alpha t^0,\ -\frac{\alpha t'^0}{g},\ -\frac{\alpha t'^0}{g},\ 0\right\}^T \tag{45}$$

este vectorul deformaţiilor specifice numai din variaţia de temperatură şi are cinci componente corespunzătoare celor cinci componente ale lui $\{N\}$ din (34),

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\}^e = [B_i B_j]\{\delta\}^e \tag{46}$$

reprezintă vectorul deformaţiilor specifice dintr-un punct oarecare de pe elementul finit funcţie de deplasările nodurilor elementului finit studiat [5].

Matricele $[B]$, $[B_i]$, $[B_j]$ din (46) se obţin cu uşurinţă explicitînd componentele vectorului deformaţiilor specifice (44), în funcţie de deplasările nodurilor (37) prin intermediul funcţiei deplasărilor (39) :

$$[B_i] = \begin{bmatrix} 1/l & 0 & 0 \\ (1-s')/l & 0 & 0 \\ 0 & 6(1-2s')/l^2 & 2(2-3s')/l \\ 0 & 6s'(1-s')\,lr & -(1-4s'+3s'^2)/r \\ 0 & \begin{matrix}6(1-2r/l)/l^2r + \\ +6s'(s'-2r/l-1)/lr^2\end{matrix} & \begin{matrix}(4-6r/l+l/r)/lr + \\ +s'(3s'l/r-4l/r-6)\,lr\end{matrix} \end{bmatrix}, \tag{47}$$

$$[B_j] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/r & 0 & 0 \\ 0 & -6(1-2s')/l^2 & 2(1-3s')/l \\ 0 & -6s'(1-s')/lr & s'(2-3s')/r \\ 0 & \begin{matrix}6(2r/l-1)/l^2r + \\ +6s'(1+2r/l-s')/lr^2\end{matrix} & \begin{matrix}2(1-3r/l)/lr + \\ +s'(3s'-2-6r/l)/r^2\end{matrix} \end{bmatrix}, \tag{48}$$

$$[B] = [B_i B_j]. \tag{49}$$

În continuare se poate obţine vectorul eforturilor secţionale în funcţie de deplasările nodurilor introducînd (39) în (44)

$$\{N\} = [D]([B]\{\delta\}^e - \{\varepsilon^{t^0}\}). \tag{50}$$

Forțele nodale date de o expresie identică ca formă cu (25) devin

$$\{F\}^e = [k]^e\{\delta\}^e - \{F\}^e_p - \{F\}^e_{t^0}, \tag{51}$$

în care termenul

$$\{F\}^e_{t^0} = \int [B]^T[D]\{\varepsilon^{t^0}\}\, 2\pi r\, dr \tag{52}$$

reprezintă forțele nodale datorită variației de temperatură.

Din echilibrul nodurilor rețelei de elemente finite, utilizînd (51) rezultă sistemul ecuațiilor de condiție sub forma

$$[k_{h,h-1}]^h\{\delta_{h-1}\} + ([k_{hh}]^h + [k_{hh}]^{h+1})\{\delta_h\} + [k_{h,h+1}]\{\delta_{h+1}\} -$$

$$- (\{F_h\}^h_p + \{F_h\}^{h+1}_p + \{F_h\}^h_{t^0} + \{F_h\}^{h+1}_{t^0}) = 0 \quad (h=1', 2', \ldots m'-1), \tag{53}$$

în care

$$\{F_h\}^h_{t^0} = \int [B_j]^T[D]\{\varepsilon^{t^0}\}\, 2\pi r\, dr, \tag{54}$$

$$\{F_h\}^{h+1}_{t^0} = \int [B_i]^T [D]\{\varepsilon^{t^0}\}\, 2\pi r\, dr. \tag{55}$$

Ecuația de echilibru corespunzător nodului m în care se aplică și forțele corespunzătoare eforturilor din șuruburi pentru cazul în care nu există variație de temperatură între faza de montaj și cea de regim [5] are forma

$$[k_{m',m'-1}]^{m'}\{\delta_{m'-1}\} + ([k_{m'm'}]^{m'} + [\overline{k}_s])\{\delta_{m'}\} - \{F_{m'}\}^{m'}_p + [\overline{k}_s]\{\delta^0_{m'}\} = 0, \tag{56}$$

în care s-a notat

$$\{\delta^0_{m'}\} = \{0,\ w^0_{m'},\ 0\}^T \tag{57}$$

vectorul de cedare inițială ($2\ w^0_m$ reprezintă diferența între distanța dintre fețele flanșei și lungimea activă a tijei șurubului);

$$[\overline{k}_s] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{58}$$

matricea de rigiditate a șuruburilor (k_s fiind rigiditatea șuruburilor).

Pentru situația analizată a existenței unei variații de temperatură, ecuația corespunzătoare nodului m' (fig. 2 *d*) se scrie pornind de la (56).

Din figura 2 *d*, considerînd $t_p^0 > t_s^0$, se obține o diferență de alungire între flanșă și șurub egală cu $\alpha\, \Delta t^0 l'$, unde l' reprezintă jumătate din lungimea șurubului iar $\Delta t^0 = t_p^0 - t_s^0$.

Această diferență de alungire în situația că flanșa și șuruburile nu sînt legate, este similară unei cedări inițiale. Constituind vectorul

$$\{\delta_{m'}^{t_0}\} = \{0,\ \alpha \Delta t^0\, l',\ 0\}^T, \tag{59}$$

corespunzător vectorului cedare inițială (57) și ținînd sema de (52) ecuația de echilibru a nodului m' are o formă asemănătoare ecuației (56)

$$[k_{m',m'-1}]^{m'}\{\delta_{m'-1}\} + ([k_{m'm'}]^{m'} + [\bar{k}_s])\{\delta_{m'}\} -$$

$$- (\{F_{m'}\}_p^{m'} + \{F_{m'}\}_{t_0}^{m'} + [\bar{k}_s]\{\delta_{m'}^{t_0}\}) = 0. \tag{60}$$

Asamblarea sistemului de ecuații de condiție corespunzător nodurilor de pe gît (27) cu sistemul de ecuații de condiție de la taler compus din (53) și (60) se face prin ecuațiile de echilibru ale elementului de legătură 0. Cu notațiile din figura 6 ținînd seama de relația geometrică

$$\{\delta_{0_1}\} = [G]\{\delta\}^0 = [G]\begin{Bmatrix}\delta_{0'}\\ \delta_{0''}\end{Bmatrix}, \tag{61}$$

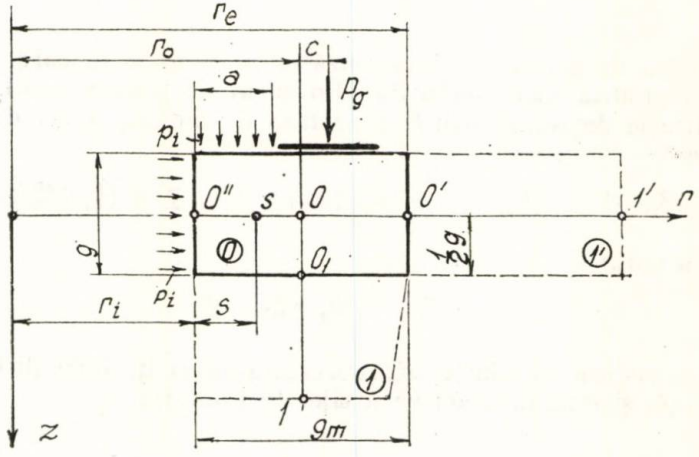


Fig. 6

în care [G] reprezintă o matrice de transformare 3 × 6 [5], aceste ecuații completate cu forțele nodale corespunzătoare variației de temperatură au forma :

$$[\bar{k}_{0''1}]^1\{\delta_1\} + ([\bar{k}_{0''0''}]^0 - [\bar{k}_{0''0''}]_g)\{\delta_{0''}\} +$$

$$+ ([\bar{k}_{0''0'}]^0 - [\bar{k}_{0''0'}]_g)\{\delta_{0'}\} - \{F_{0''}\}_p^0 - \{F_{0''}\}_{t_0}^0 = 0, \tag{62}$$

$$[\bar{k}_{0'1}]^1\{\delta_1\} + ([\bar{k}_{0'0''}]^0 - [\bar{k}_{0'0''}]_g)\{\delta_{0''}\} + ([\bar{k}_{0'0'}]^0 + [\bar{k}_{0'0'}]^{1'} - [\bar{k}_{0'0'}]_g)\{\delta_{0'}\} +$$

$$+ [\bar{k}_{0'1'}]^{1'}\{\delta_{1'}\} - (\{F_{0'}\}_p^0 + \{F_{0'}\}_p^{1'} + F_{0'}\}_{to}^0 + \{F_{0'}\}_{to}^{1'}) = 0. \qquad (63)$$

în care $\{F_{0''}\}_{to}^0$, $\{F_{0'}\}_{to}^0$, $\{F_{0'}\}_{to}^{1'}$ se determină prin particularizarea corespunzătoare a relației (52).

În acest fel pentru determinarea eforturilor în toate elementele unei flanșe din sarcini și din variația de temperatură se folosește sistemul de ecuații compus din :

— sistemul (27) complect,
— sistemul (53) fără ultima ecuație,
— ecuația (56),
— relația (61),
— ecuațiile (62) și (63). (64)

Dacă în toate ecuațiile sistemului (64) se neglijează termenii liberi corespunzători sarcinilor exterioare se obține un sistem de ecuații (64') a cărui soluție reprezintă deplasările nodurilor produse numai de variația de temperatură. După determinarea acestora se calculează eforturile cu cu expresia (23) pentru gît și cu expresia (50) pentru taler. Efortul din șuruburi apărut după montaj datorită sarcinilor exterioare și variației de temperatură se determină cu relația

$$\{P_s\} = [\bar{k}_s](\{\delta_{m'}\} + \{\delta_{m'}^{t'}\}). \qquad (65)$$

Se înțelege că $\{\delta_{m'}\}$ din (65) reprezintă valoarea ce se obține din rezolvarea sistemului (64). Dacă în (65) se introduce soluția $\{\delta_{m'}\}$ din (64') ai cărui termeni liberi sînt numai din variația de temperatură, se obține variația efortului total din șuruburi datorită influenței temperaturii.

4. CONCLUZII

1. În literatura tehnică de specialitate influența variației de temperatură asupra comportării îmbinării prin flanșe este analizată numai în ceea ce privește diferența de temperatură dintre flanșe și șuruburi, neluîndu-se în considerare variația temperaturii pe grosimea flanșelor sau în sens radial.

2. Metoda prezentată pentru determinarea eforturilor din variația de temperatură într-o îmbinare prin flanșe folosește sistemul de ecuații stabilit pentru acțiunea sarcinilor exterioare în ceea ce privește necunoscutele și coeficienții acestora.

Stabilirea influenței temperaturii necesită suplimentar numai calculul termenilor liberi specifici variației de temperatură. Aceștia se determină cu ușurință cu expresiile (28) și (29) pentru elementele de pe gît, cu (54) și (55) pentru elementele de pe taler și cu (59) pentru diferența de temperatură dintre taler și șuruburi. Formulele stabilite permit obținerea deplasărilor și eforturilor din orice variație de temperatură atît concomitent pe toate elementele, cît și independent, pe oricare din elementele componente ale acesteia.

3) Introducînd variații de temperatură diferite de la un element finit la altul se poate stabili de asemenea influența temperaturii la o variație a acesteia în direcția razei talerului sau în direcția axului de simetrie al îmbinării.

Primită la redacție la 27 iunie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. O. C. Zienkiewicz, *The finite element method in structural and continuum mechanics*, London, 1967.
2. S. D. Ponomariov, ș.a. *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, vol *II*, Edit. tehnică, București, 1963
3. S. Timoșhenko, *Theorie des plaques et des coques*, Libraire pôlytechnique CH Beranger, Paris, 1951.
4. M. Posea, *Utilizarea elementelor finite în calculul flanșelor*, Comunicare la sesiunea științifică a Inst. de petrol Ploiești, octombrie, 1971.
5. — *O metodă nouă pentru calculul flanșelor*, St. cerc. mec. apl. *6*(1971).

FRECAREA SUPERFICIALĂ DINTRE PNEUL DE AUTOMOBIL ŞI CALEA NEDEFORMABILĂ

de CHIRIAC VASILIU
Institutul politehnic Bucureşti

În timpul rostogolirii roţilor de automobil pe o cale nedeformabilă, pneul suferă deformaţii în zona de contact cu solul, deformaţii care produc microalunecări ale elementelor bandajului elastic pe calea de rulare.
Această „pseudoalunecare" se produce chiar dacă momente motoare sau rezistente nu acţionează asupra roţii.
Fenomenul are drept urmare un consum de putere, încălzirea şi uzarea pneurilor etc.
În lucrare se evidenţiază fenomenul şi folosind ipoteze simplificatoare se prezintă unele relaţii dintre elementele cinematico-geometrice ale pneului în timpul rulării sale precum şi pentru estimarea puterii (pierdute) sau forţei necesare desfăşurării acestui fenomen parazit.

1. MICROALUNECĂRILE PNEULUI PE SUPRAFAŢA DE CONTACT

Roata de automobil în timpul rostogolirii pe o cale nedeformabilă produce alunecări locale pe suprafaţa de contact cu calea, datorită deformării bandajului elastic. Acest fenomen, cunoscut sub denumirea de *pseudoalunecare*, are o deosebită însemnătate în circulaţia automobilelor, deoarece condiţionează, în acelaşi timp, ţinuta de drum şi uzura pneurilor şi influenţează mărimea rezistenţei la înaintare a automobilului.

Rulind, fără alunecare, pe o cale cu suprafaţă netedă şi nedeformabilă (fig. 1*a*), pneul, a cărui rază liberă este r_0, se deformează, în zona contactului cu calea, după coarda $\overline{N_1N_3}$, cu unghiul la centru $2\alpha_0$. Datorită sarcinei G şi rulării pneului, distanţa dintre centrul roţii şi planul de sprijin este mai mică decît raza liberă şi se numeşte rază dinamică, r_d.

Viteza V de translaţie a centrului roţii (a automobilului) şi turaţia n_r a pneului, ce se rostogoleşte fără alunecare, ne dă mărimea razei de rulare

$$r_r = \frac{V}{\omega_r} = \frac{60V}{2\pi n_r}, \tag{1}$$

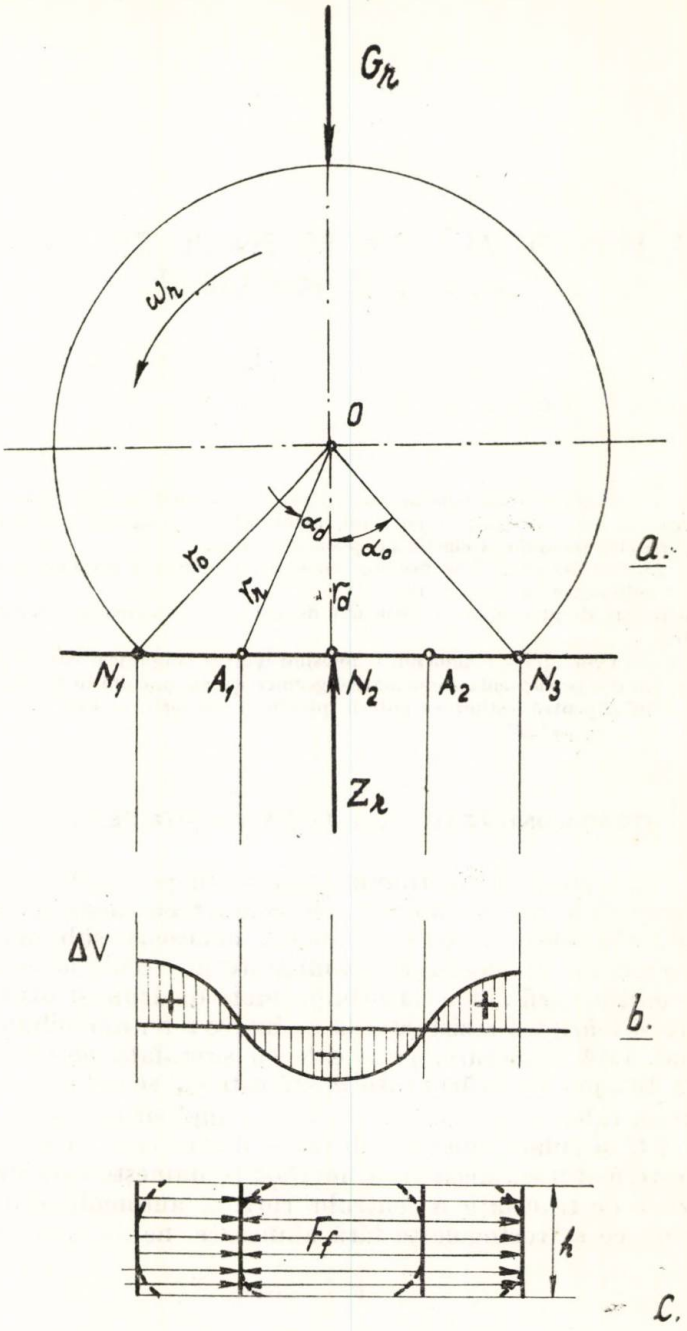


Fig. 1

care este situată între mărimile celorlalte două raze caracteristice ale pneului de automobil

$$r_0 > r_r > r_d. \tag{2}$$

Relaţiile geometrice între cele trei raze sînt

$$r_d = r_r \cdot \cos \alpha_d = r_0 \cdot \cos \alpha_0. \tag{3}$$

Datorită deformării radiale a pneului, un punct de pe periferia bandajului elastic va căpăta viteze diferite, în lungul zonei de contact, faţă de viteza de deplasare a automobilului:

în punctul N_1

$$V_0 = \omega_r \cdot r_0 = \omega_r \cdot r_r \cdot \frac{\cos \alpha_d}{\cos \alpha} = V \cdot \frac{\cos \alpha_d}{\cos \alpha_0}, \tag{4}$$

— în punctul N_2

$$V_d = \omega_r \cdot r_d = \omega_r \cdot r_r \cdot \cos \alpha_d = V \cdot \cos \alpha_d. \tag{5}$$

Variaţiile de viteză, în valoare absolută şi relativă, vor fi deci:

— între punctele N_1 şi A_1

$$\Delta V_0 = V_0 - V = V \cdot \frac{\cos \alpha_d - \cos \alpha_0}{\cos \alpha_0},$$

$$\frac{\Delta V_0}{V} = \frac{\cos \alpha_d}{\cos \alpha_0} - 1 > 0, \tag{6}$$

— între punctele N_2 şi A_1

$$\Delta V_d = V_d - V = V(\cos \alpha_d - 1), \tag{7}$$

$$\frac{\Delta V_d}{V} = \cos \alpha_d - 1 < 0.$$

Aceste diferenţe de viteze produc diferenţe de deplasări între elementele bandajului elastic din zona de contact cu calea $\overline{N_1 N_3}$, diferenţe ce nu pot fi compensate decît prin microdeformări tangenţiale ale materialului pneului, de acelaşi sens în zonele $\overline{N_1 A_1}$ şi $\overline{A_2 N_3}$ şi de sens contrar în zona centrală $\overline{A_1 A_2}$ (fig. 1*b*); aceste microdeformări se produc odată cu microalunecările elementelor bandajului elastic faţă de suprafaţa căii de rulare, fenomen denumit „pseudoalunecare".

Se poate aproxima că suprafaţa de contact cu calea a pneului deformat este rectangulară, că punctul de aplicaţie N_2 al reacţiunii solului Z_r se află pe verticala centrului 0 al pneului şi că presiunea specifică pe suprafaţa de contact este constantă.

Dacă lăţimea petei de contact este h, elementul de suprafaţă de contact va fi : $\mathrm{d}A = h \cdot \mathrm{d}s$, iar forţa de frecare elementară va fi dată de relaţia

$$|\mathrm{d}F_f| = \mu \cdot \mathrm{d}Z_r = \mu \cdot p_c \cdot \mathrm{d}A = \mu \cdot p_c \cdot h \cdot \mathrm{d}s = k \cdot \mathrm{d}s, \tag{8}$$

în care

μ este coeficientul de frecare,
p_c — presiunea de contact între pneu şi cale,
$\mathrm{d}s$ — elementul de lungime de contact,
k — frecarea elementară pe unitatea de lungime.

Forţele elementare de frecare sînt de sens contrar microalunecărilor, fiind îndreptate în sens invers rotirii pneului în zonele periferice, $\overline{N_1A_1}$ şi $\overline{A_2N_3}$ şi în acelaşi sens în zona centrală $\overline{A_1A_2}$.

În punctele de intersecţie A_1 şi A_2 ale cercului de rulare, de rază r_r, cu planul căii de rulare, nu avem nici microalunecări şi nici forţe de frecare, ele fiind „puncte de alunecare nulă" din „faţă" şi, respectiv, din „spate".

Deoarece pneul se rostogoleşte fără alunecare, rezultă că forţele de frecare, respectiv, microalunecările se anulează dealungul zonei de contact

$$\int_{N_1}^{N_3} \mathrm{d}F_f = k \int_{N_1}^{N_3} \mathrm{d}s = 0. \tag{9}$$

Pentru satisfacerea acestei condiţii rezultă relaţia

$$\overline{N_1A_1} + \overline{A_2N_3} = \overline{A_1A_2} \tag{10}$$

ceea ce, ţinînd seama de simetria fenomenului, rezultă că

$$\overline{N_1A_1} = \overline{A_1N_2} = \overline{N_2A_2} = \overline{A_2N_3} = \frac{1}{4}\,\overline{N_1N_3}. \tag{11}$$

Mărimea razei de rulare r_r poate fi determinată, deci, şi din consideraţii geometrice asupra triunghiului A_1ON_2

$$\overline{A_1O}^2 = \overline{ON_2}^2 + \overline{A_1N_2}^2 = \overline{ON_1}^2 \cdot \cos^2\alpha_0 + \frac{1}{16} \cdot \overline{N_1N_3}^2$$

sau

$$r_r^2 = r_0^2 \cos^2\alpha_0 + \frac{1}{4} r_0^2 \sin^2\alpha_0 = r_0^2 \left(\cos^2\alpha_0 + \frac{1}{4}\sin^2\alpha_0\right). \tag{12}$$

Relația prin care se exprimă raza de rulare, devine

$$r_r = \frac{r_0}{2}\sqrt{4 - 3\sin^2\alpha_0}. \tag{13}$$

Folosind această relație și relația (1), se determină mărimea unghiului α_0

$$\sin^2\alpha_0 = \frac{4}{3} - \frac{3600\,V^2}{3\pi^2 n_r^2 \cdot r_0^2}$$

sau

$$\sin\alpha_0 \simeq \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{120\,V^2}{n_r^2 \cdot r_0^2}}. \tag{14}$$

Ținînd seama de relația (3), se determină mărimea razei dinamice cu relația

$$r_d = r_0 \cdot \cos\alpha_0 = r_0 \cdot \sqrt{\frac{120\,V^2}{n_r^2 \cdot r_0^2} - \frac{1}{3}}, \tag{15}$$

stabilindu-se astfel relațiile geometrice, care leagă mărimile caracteristice „pseudoalunecării" pneului pe calea de rulare.

2. MĂRIMEA FRECĂRILOR DE „PSEUDOALUNECARE" DINTRE PNEU ȘI CALE

Forțele elementare de frecare se pot considera constante (relația 8), astfel că suma acestora se determină cu ușurință, ceea ce dă posibilitatea determinării puterii pierdute prin frecarea locală, provocată de microalunecările ce se produc în zona de contact a pneului cu calea.

Ținînd seama că pseudoalunecările de-a lungul contactului dintre pneu și cale au în cele patru zone sensuri diferite (fig. 1*c*) puterea totală pierdută prin frecare va fi suma valorilor absolute ale puterilor pierdute de-a lungul zonelor $\overline{N_1A_1}$, $\overline{A_1N_2}$, $\overline{N_2A_2}$, $\overline{A_2N_3}$

$$P_{f_{\overline{N_1N_3}}} = 2P_{f_{\overline{N_1A_1}}} + 2P_{f_{\overline{A_1N_2}}} = 2F_{f_{\overline{N_1A_1}}} \cdot V_{m_{\overline{N_1A_1}}} + 2F_{f_{\overline{A_1N_2}}} \cdot V_{m_{\overline{A_1N_2}}}, \tag{16}$$

unde

F_f este forța de frecare în zona respectivă,

V_m — viteza medie a „pseudoalunecării" (media diferenței vitezelor ce le capătă un punct de pe bandajul elastic al pneului, de-a lungul zonei respective).

Avînd în vedere relația (8), vom avea

$$P_{f_{\overline{N_1N_3}}} = 2\mu \cdot p_c \cdot h \cdot \overline{N_1N_2}\,(V_{m_{\overline{N_1A_1}}} + V_{m_{\overline{A_1N_2}}}). \tag{17}$$

Pentru a determina valoarea medie a variației vitezei de-a lungul segmentelor $\overline{N_1A_1}$ și $\overline{A_1N_2}$ ne vom folosi de relațiile (6) și (7) și de cunoscuta teoremă a mediilor

$$V_{m\overline{N_1A_1}} = \frac{\int_{N_1}^{A_1} \Delta V_0 \cdot ds}{\int_{N_1}^{A_1} ds} = \frac{V.r_r \int_{\alpha_0}^{\alpha_d} \left(\frac{\cos\alpha_d}{\cos\alpha} - 1\right) \cdot d\alpha}{\overline{N_1A_1}}$$

sau

$$V_{m\overline{N_1A_1}} = \frac{V.r_r.\cos\alpha_d}{\overline{N_1A_1}} \cdot \int_{\alpha_0}^{\alpha_d} \frac{d\alpha}{\cos\alpha} - \frac{V.r_r}{\overline{N_1A_1}} \cdot \int_{\alpha_0}^{\alpha_d} d\alpha, \tag{18}$$

în care

$$\overline{N_1A_1} = \overline{N_1N_2} - \overline{A_1N_2} = r_0.\sin\alpha_0 - r_r.\sin\alpha_d$$

sau

$$\overline{N_1A_1} = r_r \cdot \frac{\cos\alpha_d}{\cos\alpha_0} \cdot \sin\alpha_0 - r_r \cdot \sin\alpha_d = r_r \cdot \frac{\mathrm{tg}\alpha_0 - \mathrm{tg}\alpha_d}{\sec\alpha_d}. \tag{19}$$

Cunoscîndu-se că

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_d} \frac{d\alpha}{\cos\alpha} = \left[\ln \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\right]_{\alpha_0}^{\alpha_d}, \text{ iar } \int_{\alpha_0}^{\alpha_d} d\alpha = -(\alpha_0 - \alpha_d)$$

rezultă că

$$V_{m\overline{N_1A_1}} = V \cdot \frac{\sec\alpha_d}{\mathrm{tg}\alpha_0 - \mathrm{tg}\alpha_d} \cdot \left[(\alpha_0 - \alpha_d) - \ln \frac{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_0}{2}\right)}{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_d}{2}\right)} \cdot \cos\alpha_d\right]. \tag{20}$$

Folosind același raționament, vom avea

$$V_{m\overline{A_1N_2}} = \frac{\int_{A_1}^{N_2} \Delta V_d \cdot ds}{\int_{A_1}^{N_2} ds} = \frac{V._r \int_{\alpha_d}^{0} (\cos\alpha - 1)\, d\alpha}{\overline{A_1N_2}}$$

sau

$$V_{m\overline{A_1N_2}} = \frac{V.r_r}{\overline{A_1N_2}} \cdot \int_{\alpha_d}^{0} \cos\alpha \cdot d\alpha - \frac{V.r_r}{\overline{A_1N_2}} \int_{d}^{0} d\alpha, \tag{21}$$

în care

$$\overline{A_1N_2} = r_r \cdot \sin\alpha_d. \tag{22}$$

În consecinţă

$$V_{m\overline{A_1N_2}} = V\left(\frac{\alpha_d}{\sin\alpha_d} - 1\right). \tag{23}$$

Dacă se ţine seama de relaţia (11), se poate înlocui, în relaţia (20), mărimea $\overline{N_1A_1}$ cu $\overline{A_1N_2}$, deci

$$V_{m\overline{N_1A_1}} = \frac{V}{\sin\alpha_d}\left[(\alpha_0 - \alpha_d) - \ln\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha_0}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha_d}{2}\right)}\cdot\cos\alpha_d\right]. \tag{24}$$

Puterea pierdută prin „frecarea de alunecare locală" a pneului de automobil care rulează fără alunecare pe o cale nedeformabilă va fi dată, deci, de relaţia

$$P_{f\overline{N_1N_2}} = 2\mu \cdot p_c \cdot h \cdot \overline{N_1N_2} \cdot V \cdot \left[\frac{\alpha_0 - \alpha_d}{\sin\alpha_d} - \ln\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha_0}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha_d}{2}\right)} \times \right.$$

$$\left. \times \operatorname{ctg}\alpha_d + \frac{\alpha_d}{\sin\alpha_d} - 1\right].$$

Dar

$$\overline{N_1N_2} = r_0 \cdot \sin\alpha_0 = r_r \cdot \frac{\cos\alpha_d}{\cos\alpha_0} \cdot \sin\alpha_0 = r_r \cdot \operatorname{tg}\alpha_0 \cdot \cos\alpha_d.$$

În urma simplificărilor necesare, relaţia pentru determinarea puterii pierdute datorită fenomenului de „pseudoalunecare" se va prezenta, în final, astfel

$$P_{fpa} = 2\mu \cdot p_c \cdot h \cdot V \cdot r_r \frac{\operatorname{tg}\alpha_0}{\operatorname{tg}\alpha_d} \cdot \left[\alpha_0 - \sin\alpha_d - \ln\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha_0}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha_d}{2}\right)}\cdot\cos\alpha_d\right], \tag{25}$$

unghiul α_d putîndu-se determina cu relaţia

$$\cos\alpha_a = \frac{r_0}{r_r} \cdot \cos\alpha_0$$

sau, ţinînd seama de relaţiile (13) şi (15),

$$\cos\alpha_d = \frac{\pi \cdot n_r \cdot r_0 \sqrt{\frac{120V^2}{n_r^2 \cdot r_0^2} - \frac{1}{3}}}{30V}. \tag{26}$$

Pentru aflarea forţei rezistente, ce se produce asupra bandajului elastic al pneului datorită acestui fenomen parazit, este suficient ca relaţia (25) să fie raportată la viteza de deplasare a automobilului, astfel că

$$F_{fpa} = 2\mu \cdot p_c \cdot h \cdot r_r \frac{\operatorname{tg}\alpha_0}{\operatorname{tg}\alpha_d} \cdot \left[\alpha_0 - \sin\alpha_d - \ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_0}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_d}{2}\right)} \cdot \cos\alpha_d \right]. \tag{27}$$

3. CONCLUZII

Potrivit celor arătate, se constată că elementele bandajului elastic al pneurilor de automobil, care circulă pe o cale nedeformabilă, au o viteză relativă între ele, dirijată spre spate la cele două extremităţi ale suprafeţei de contact şi spre faţă în mijlocul acesteia. Aceasta explică aruncarea pietricelelor de către roţile neantrenate ale automobilului, în sens invers înaintării.

În consecinţă, este necesară luare aîn consideraţie a existenţei unor forţe de frecare tangenţiale la suprafaţa de contact, chiar în absenţa unui moment motor sau de frînare. Aceste forţe care provoacă microalunecări locale, de acelaşi sens cu sensul variaţiei vitezelor constatate, vor avea drept efect mărirea puterii pierdute prin celelalte fenomene ce se produc la rularea roţilor automobilului.

De asemenea, aceste micro-forţe, tangenţiale la suprafaţa de contact, sînt generatoare de zgomot, de uzură (a anvelopelor şi a drumului), de încălzire a pneurilor etc., ceea ce susţine afirmaţia, general întîlnită, că rularea pneului este un fenomen de ridicată complexitate.

Primită la redacţie la 24 mai 1972

BIBLIOGRAFIE

1. G. Jeuffroy, *Actions réciproques des vehicules et des chaussées*, Revue g-rale des routes *358* (1961).
2. P. Thirion, R. Chasset, *Le frottement du caouchouc*, Bull. de liaison des laboratoires routières, (1966).

UN PRINCIPIU GENERAL DE FORMARE A MECANISMELOR

de C. DUCA şi I. SIMIONESCU
Institutul politehnic Iaşi

Principiul lui Assur de formare a mecanismelor, pe care se bazează clasificarea structurală a lui I. I. Artobolevski, presupune că parametrii de poziţie independenţi caracterizează poziţia unor elemente legate direct la batiu, în raport cu acesta (elemente conducătoare).
În practică se întîlnesc, însă, şi mecanisme care nu îndeplinesc această condiţie (fig. 2).
Autorii propun următorul principiu de formare a mecanismelor, aplicabil indiferent de modul de alegere a parametrilor de poziţie independenţi :
Orice mecanism poate fi format prin legarea succesivă, la batiu, a unor grupe conducătoare şi a unor grupe Assur.
Prin grupă conducătoare se înţelege un lanţ cinematic cu grad de libertate $L > 0$, avînd impuse legile de variaţie în raport cu timpul, pentru un număr de parametri de poziţie independenţi, egal cu gradul de libertate.
Se face, apoi, sinteza structurală a grupelor conducătoare ale mecanismelor plane articulate cu $L_3 = 1$, $e = 1, 3{,}5$ şi $L_3 = 2$, $e = 2, 4, 6$ (tabelele 3 şi 4).
În final se analizează cîteva exemple de mecanisme, arătîndu-se grupele conducătoare şi grupele Assur componente.

1. În cadrul clasificării structurale a mecanismelor, elaborată de I. I. Artobolevski, plecînd de la cunoscutul principiu al formării mecanismelor stabilit de Assur, se presupune că elementele conducătoare, ale căror legi de mişcare se cunosc, sînt legate direct de batiu. Cu alte cuvinte, se admite ipoteza că parametrii de poziţie independenţi caracterizează numai elemente adiacente bazei. În practică se întîlnesc, însă, şi mecanisme care nu îndeplinesc această condiţie (fig. 2) şi, deci, nu pot fi studiate unitar şi sistematic din punct de vedere structural, cinematic şi cinetostatic.

În cazul general, fiecare parametru de poziţie independent şi derivatele sale în raport cu timpul pot caracteriza (complet sau parţial) poziţia şi mişcarea unui element, în raport cu un sistem de referinţă solidar cu oricare alt element al mecanismului. Din motive de realizare practică

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 32, NR. 1, 1973, P. 155–171

a acţionării, nu se iau în considerare situaţiile în care cele două elemente sînt mobile şi nelegate direct. Rămîn, deci, în discuţie cazurile :

a) cele două elemente sînt legate direct, iar parametrii independenţi sînt relativi ;

b) sistemul de referinţă este solidar cu batiul, iar parametrii independenţi sînt absoluţi.

Primul caz se întîlneşte frecvent în acţionările hidraulice [7]. Cel de-al doilea caz reclamă o acţionare mai dificilă. Totuşi, prof. Manolescu indică în [4] modul de realizare al acestei acţionări într-un caz particular, iar în [2], planşa I—1, unde face o sistematizare a mecanismelor motor, admite elemente conductătoare nelegate la batiu.

Se remarcă faptul că acţionarea clasică, cu elemente conducătoare legate direct la batiu, se poate încadra în oricare din cele două cazuri.

2. În vederea realizării unui studiu structural, cinematic şi cinetostatic unitar, pentru orice mecanism, indiferent de alegerea parametrilor independenţi, adică de modul de acţionare, se propune un principiu de formare a mecanismelor, bazat pe noţiunea de grupă conducătoare.

Prin *grupă conducătoare* se înţelege *un lanţ cinematic cu gradul de libertate* $L > 0$, *avînd impuse legile de variaţie în raport cu timpul, pentru un număr de parametri de poziţie independenţi, egal cu gradul de libertate.*

Principiul de formare a mecanismelor propus de autori este următorul :

Orice mecanism poate fi format prin legarea succesivă, la batiu, a unor grupe conducătoare şi a unor grupe Assur. Gradul de mobilitate al mecanismului format este egal cu suma gradelor de libertate ale grupelor conducătoare componente.

Este evident că studiul cinematic şi cinetostatic se poate face fără dificultăţi, cunoscînd procedeele specifice fiecărei grupe conducătoare şi fiecărei grupe Assur.

Trebuie de subliniat că grupa conducătoare, ca şi grupa Assur, are o mişcare determinată, funcţie de legile de variaţie ale parametrilor de poziţie independenţi.

3. În cele ce urmează se prezintă modul de alcătuire a grupelor conducătoare ale mecanismelor plane articulate.

Lanţurile cinematice cu $L > 0$, din care sînt formate grupele conducătoare, se pot obţine din lanţuri cinematice închise sau deschise cu gradul de libertate mai mare cu 3 unităţi, prin extragerea unui element. Cuplele libere, rămase în urma acestei extrageri constituie cuplele exterioare, potenţiale ale grupei conducătoare.

Procedeul, se observă, este analog sintezei grupelor Assur din grinzile Baranov.

Sinteza structurală a lanţurilor cinematice închise cu $L_3 \geqslant 4$, de care avem nevoie, este rezolvată în documentatele lucrări ale prof. Manolescu [2] [3] [4].

Sistematizarea lanţurilor cinematice deschise nu a fost, însă, efectuată şi , de aceea, trebuie să ne ocupăm, mai întîi, de această problemă.

Un lanţ cinematic deschis este alcătuit dintr-un lanţ cinematic închis, la care se leagă, prin cîte o cuplă cinematică, un număr de elemente de rang egal cu 1. Gradul de libertate L'_3 al lanţului cinematic închis,

inițial se calculează, în funcție de gradul de libertate L_3 al lanțului cinematic deschis rezultat, cu relația

$$L_3' = L_3 - e_1, \tag{1}$$

unde e_1 este numărul de elemente de rang egal cu 1, legate. Deoarece $L_3' \geqslant 3$, din (1) rezultă

$$e_1 \leqslant L_3 - 3. \tag{2}$$

Pe baza ecuației (1) s-a întocmit tabela 1, care cuprinde o parte din oluțiile lui L_3', în funcție de L_3 și e_1.

Tabela 1

L_3	4	5		6			7			
e_1	1	1	2	1	2	3	1	2	3	4
L_3'	3	4	3	5	4	3	6	5	4	3

Pornind de la aceste soluții s-au alcătuit, în tabela 2, lanțurile cinematice deschise cu $L_3 = 4$ ($e = 2$) (un singur lanț) și $L_3 = 5$ ($e = 3$, 5, 7). Fiecare lanț are un simbol de forma $e/n\ d$, unde e este numărul de elemente, iar n — un număr de ordine.

Lanțurile cinematice închise și deschise cu $L_3 = 4$ și $e = 2$, 4, 6 conduc, prin extragerea unui element, la obținerea lanțurilor cinematice ale grupelor conducătoare cu $L_3 = 1$ și $e = 1$, 3, 5 (tabela 3). Prin același procedeu s-au alcătuit lanțurile cinematice ale grupelor conducătoare cu $L_3 = 2$ și $e = 2$, 4, 6 (tabela 4), folosind lanțurile cinematice închise și deschise cu $L_3 = 5$ și $e = 3$, 5, 7. Lanțurile cinematice ale grupelor conducătoare poartă simbolul $e/n\ c$ (e și n au aceleași semnificații ca mai sus).

O grupă conducătoare se individualizează prin precizarea lanțului cinematic din care este formată și a parametrilor de poziție independenți. În coloana 3 din tabelele 3 și 4 se indică toate variantele de acționare, adică toate posibilitățile de alegere a parametrilor independenți. Fiecare parametru independent se notează prin P_{kr}^{-}, unde k indică elementul a cărui poziție (mișcare) este caracterizată de parametrul respectiv, iar r — elementul de referință. Batiul se notează prin indicele 0 (zero). Simbolul grupei conducătoare se compune din simbolul lanțului său cinematic, la care se adaugă numărul de ordine al variantei de acționare (coloana 3, tabelele 3 și 4).

Se observă că elementul conducător clasic, împreună cu cupla de legătură la batiu, formează o grupă conducătoare de tip 1/1 *c* 2 sau 1/1*c*1. Rezultă că principiul lui Assur, de formarea mecanismelor, care operează cu un singur tip de grupă conducătoare, este un caz particular al principiului propus în această lucrare.

Tabela 2

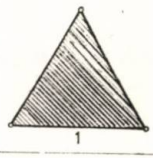
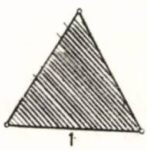
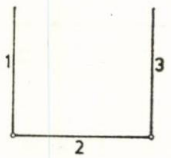
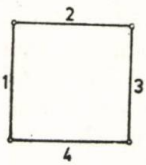
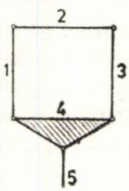
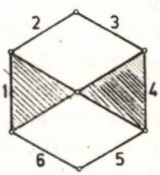
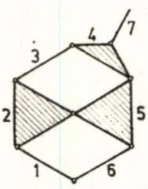
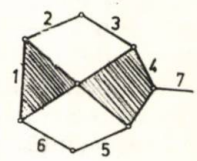
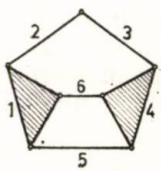
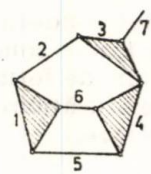
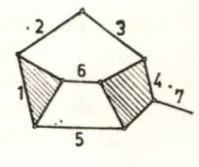
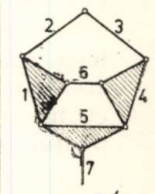
Lanțul cinematic închis				Lanțurile cinematice deschise rezultate			
L_3	e	c_5	Schema	L_3	e	c_5	Schemele
3				1	4	2	1	2/1d
3				2	5	3	2	 3/1d
4	4	4	 4/1	1	5	5	5	 5/1d
4	6	7	 6/1	1	5	7	8	 7/1d  7/2d
4	6	7	 6/2	1	5	7	8	 7/3 d  7/4d  7/5d

Tabela 3

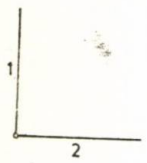
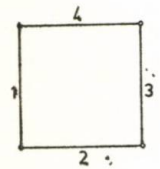
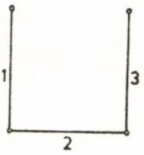
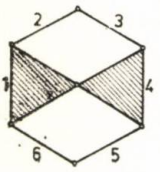
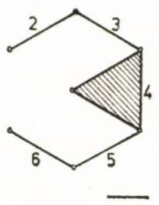
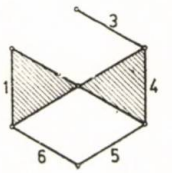
Lanţul cinematic iniţial $L_3 = 4$	Lanţurile cinematice ale grupelor conducătoare, rezultate $L_3 = 1$	Variantele de acţionare
1	2	3
 2/1d	1/1c	1) P_{10}; 2) P_{12}
 4/1	 3/1c	1) P_{20}; 2) $P_{12}(P_{23})$
 6/1		Se descompune
	 5/1c	1) p_{50}; 2) P_{60}; 3) P_{16}; 4) P_{56}; 5) P_{45}

Tabela 3 (continuare)

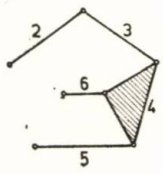
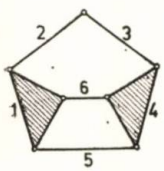
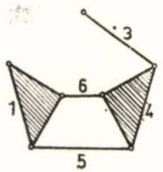
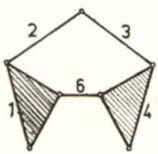
Lanțul cinematic inițial $L_3 = 4$	Lanțurile cinematice ale grupelor conducătoare, rezultate $L_3 = 1$	Variantele de acționare
1	2	3
	 5/2 c	1) p_{30}; 2) P_{23}; 3) P_{34}
 6/2	 5/3 c	1) P_{40}; 2) P_{50}; 3) P_{60}; 4) P_{15}; 5) P_{16}; 6) P_{34}; 7) P_{45}; 8) P_{46}
	 5/4 c	1) P_{20} (P_{30}); 2) P_{12} (P_{34}); 3) P_{23}

Tabela 4

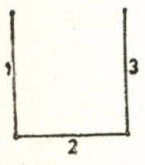
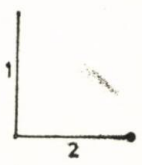
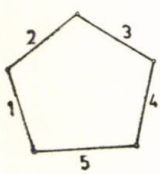
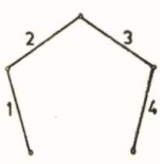
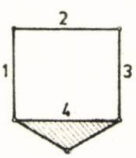
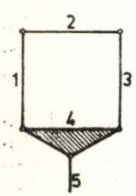
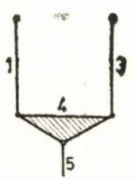
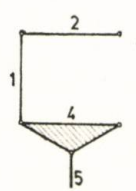
Lanţul cinematic iniţial $L_3 = 5$	Lanţurile cinematice ale grupelor conducătoare, rezultate $L_3 = 2$	Variantele de acţionare
1	2	3
 3/1d	 2/1c	1) P_{10}, P_{12}
 5/1	 4/1c	1) P_{20}, P_{30} ; 12) P_{12}, P_{23} (P_{34}, P_{23}) ; 3) P_{12}, P_{34} ; 4) P_{20}, P_{12}(P_{30}, P_{34}) ; 5) P_{20}, P_{23} (P_{30}, P_{23}) ; 6) P_{20}, P_{34} (P_{30}, P_{12})
	 4/2c	1) P_{10}, P_{30} ; 2) P_{10}, P_{20} (P_{30}, P_{20}) ; 3) P_{10}, P_{14} (P_{30}, P_{34}) ; 4) P_{10}, P_{12} (P_{30}, P_{23}) ; 5) P_{10}, P_{23}(P_{30}, P_{12}) ; 6) P_{10}, P_{34} (P_{30}, P_{14}) ; 1) P_{20}, P_{12} (P_{20}, P_{23}) ; 8) P_{20}, P_{14}(P_{20}, P_{34})
 5/1d	 4/3c	1) P_{50}, P_{45}
		Se descompune

Tabela 4 (continuare

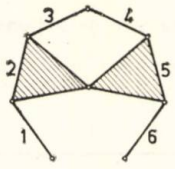
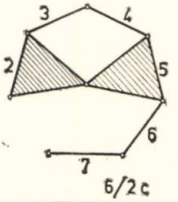
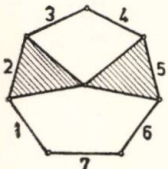
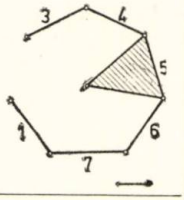
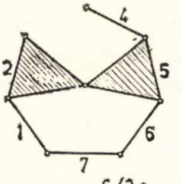
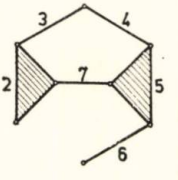
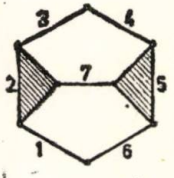
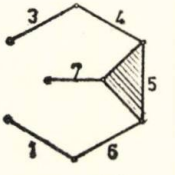
1	2	3
	 6/1c	1) P_{20}, $P_{30}(P_{50}, P_{04})$; 2) P_{20}, $P_{40}(P_{50}, P_{30})$; 3)P_{30}, P_{40}; 4) P_{12}, $P_{23}(P_{56}, P_{45})$; 5)P_{12}, $P_{34}(P_{56}, P_{34})$; 6)P_{12}, $P_{45}(P_{56}, P_{23})$; 7) P_{20}, P_{23} $(P_{50}P_{45})$; 8) P_{20}, $P_{34}(P_{50}, P_{34})$; 9) P_{20}, $P_{45}(P_{50}, P_{23})$; 10) P_{30}, $P_{12}(P_{40}, P_{56})$; 11) P_{30}, P_{23} (P_{40}, P_{45}); 12) P_{30}, P_{34} (P_{40}, P_{34}); 13) P_{30}, $P_{45}(P_{40}, P_{23})$; 14) P_{30}, $P_{56}(P_{40}, P_{12})$; 15) P_{30}, $P_{25}(P_{40}, P_{25})$
	 6/2c	1) P_{30}, P_{60}; 2) P_{40}, P_{60}; 3) P_{23}, P_{56}; 4) P_{23}, P_{67}; 5) P_{34}, P_{56}; 6) P_{34}, P_{67}; 7) P_{45}, P_{56}; 8) P_{46}, P_{67}; 9) P_{30}, P_{56}; 10) P_{30}, P_{67}; 11) P_{40}, P_{56}; 12) P_{40}, P_{67}; 13) P_{60}, P_{23}; 14) P_{60}, P_{34}; 15) P_{60}, P_{45}
 7/1		Se descompune
	 6/3c	1) P_{10}, P_{70}; 2) P_{10}, P_{60}; 3) P_{60}, P_{70}; 4) P_{12}, P_{17}; 5) P_{12}, P_{67}; 6) P_{12}, P_{56}; 7) P_{17}, P_{67}; 8) P_{17}, P_{56}; 9) P_{67}, P_{56}; 10) P_{10}, P_{12}; 11) P_{10}, P_{17}; 12) P_{10}, P_{67}; 13) P_{10}, P_{56}; 14) P_{70}, P_{12}; 15) P_{70}, P_{17}; 16) P_{70}, P_{67}; 17) P_{70}, P_{56}; 18) P_{60}, P_{12}; 19) P_{60}, P_{17}; 20) P_{60}, P_{67}; 21) P_{60}, P_{56}
	 6/4c	1) P_{30}, P_{40}; 2) P_{30}, P_{50}; 3) P_{30}, P_{70} 4); P_{40}, P_{50}; 5) P_{40}, P_{70}; 6) P_{23}, P_{34}; 7) P_{23}, P_{45}; 8) P_{23}, P_{56}; 9) P_{23}, P_{27}; 10) P_{23}, P_{57}; 11) P_{34}, P_{45}; 12) P_{34}, P_{56}; 13) P_{34}, P_{27}; 14) P_{34}, P_{57}; 15) P_{45}, P_{56}; 16) P_{45}, P_{27}; 17) P_{45} P_{57}; 18) P_{30}, P_{23}; 19) P_{30}, P_{34}; 20) P_{30}, P_{45}; 21) P_{30}, P_{56}; 22) P_{30}, P_{27}; 23) P_{30}, P_{57}; 24) P_{40}, P_{23}; 25) P_{40}, P_{34}; 26) P_{40}, P_{45}; 27) P_{40}, P_{56}; 28) P_{40}, P_{27}; 29) P_{40}, P_{57}; 30) P_{50}, P_{23}; 31) P_{50}, P_{34}; 32) P_{50}, P_{45}; 33) P_{70}, P_{23}; 34) P_{70}, P_{34}; 35) P_{70}, P_{45}
 7/2	 6/5c	1) P_{60}, P_{40}; 2) P_{34}, P_{56} (P_{16}, P_{45}); 3) P_{34}, P_{16}; 4) P_{45}, P_{56}; 5) P_{40}, P_{56} (P_{60}, P_{45}); 6) P_{40}, P_{16}, (P_{60}, P_{34})

Tabela 4 (continuare)

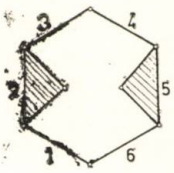
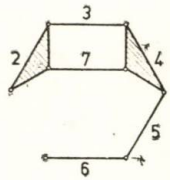
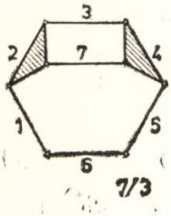
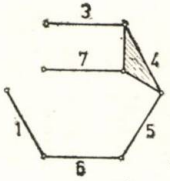
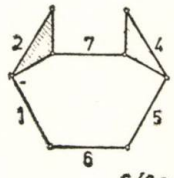
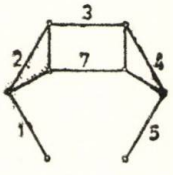
1	2	3
	 6/6c	1) P_{10}, P_{30} (P_{40}, P_{60}); 2) P_{10}, P_{40} (P_{30}, P_{60}); 3) P_{12}, P_{23} (P_{45}, P_{56}); 4) P_{12}, P_{34}(P_{56}, P_{34}) (P_{23}, P_{16}), (P_{45}, P_{16}); 5) P_{12}, P_{45} (P_{56}, P_{23}) ; 6) P_{16}, P_{34}; 7) P_{10}, P_{23}(P_{60}, P_{45})(P_{30}, P_{12}) (P_{40}, P_{56}); 8) P_{10}, P_{34}, (P_{60}, P_{34}) (P_{30}, P_{16}) P_{40}, P_{16}); 9) P_{10}, P_{45} (P_{60}, P_{23}), (P_{30}, P_{56}) (P_{40}, P_{12})
	 6/7c	1) P_{30}, P_{50} (P_{70}, P_{50}); 2) P_{40}, P_{50} ; 3) P_{23},P_{45}(P_{27},P_{45}) ; 4) P_{23}, P_{56} (P_{27}, P_{56}); 5) P_{34}, P_{45} (P_{47}, P_{45}); 6) P_{34}, P_{56}(P_{47}, P_{56}); 7) P_{45}, P_{56} ; 8) P_{30}, P_{45}(P_{70},P_{45}); 9) P_{30}, P_{56} (P_{70}, P_{56}); 10) P_{40}, P_{45} ; 11) P_{40}, P_{56} ; 12) P_{50}, P_{23} (P_{50}, P_{27}); 13) P_{50}, P_{34} (P_{50}, P_{47}); 14) P_{50}, P_{45} ; 15) P_{50}, P_{56}
 7/3	 6/8c	1) P_{50}, P_{60} ; 2) P_{45}, P_{56} ; 3) P_{45}, P_{16} ; 4) P_{56}, P_{16} ; 5) P_{50}, P_{45} ; 6) P_{50}, P_{56} ; 7) P_{50}, P_{16} ; 8) P_{60}, P_{45} ; 9) P_{60}, P_{56} ; 10) P_{60}, P_{16}
	 6/9c	1) P_{10}, P_{60}(P_{50}, P_{60}) ; 2) P_{10}, P_{50} ; 3)P_{12} ,P_{16} (P_{45}, P_{56}) ; 4) P_{12}, P_{56} (P_{45}, P_{16}) ; 5) P_{12}, P_{45} ; 6) P_{16}, P_{56} ; 7) P_{10}, P_{12} (P_{50}, P_{45}); 8) P_{10}, P_{16}(P_{50}, P_{56}); 9) P_{10}, P_{56} ($P_{50}P_{10}$) ; 10) P_{10}, P_{45} (P_{50}, P_{12}); 11) P_{60}, P_{12} (P_{60}, P_{45}); 12) P_{60}, P_{16} (P_{60}, P_{56})
	 6/10c	1) P_{20}, P_{30} (P_{20}, P_{70})(P_{40}, P_{30})(P_{40}, P_{70}); 2) P_{20}, P_{40} ; 3) P_{30}, P_{70} ; 4) P_{12}, P_{23} (P_{12}, P_{27})(P_{45}, P_{34})(P_{45}, P_{47}); 5) P_{12}, P_{34} (P_{12}, P_{47}) (P_{45}, P_{23}) (P_{45}, P_{27}); 6) P_{20}, P_{12} (P_{40}, P_{45}); 7) P_{20}, P_{23} (P_{20}, $P_{2,}$)(P_{40}, P_{34}) (P_{40}, P_{47}); 8) P_{20}, P_{34}(P_{20}, P_{47}) (P_{40}, P_{23}) (P_{40}, P_{27}); 9) P_{30}, P_{12} (P_{30}, P_{45}) (P_{10}, P_{12})(P_{70}, P_{45}); 10) P_{30}, P_{23} (P_{30}, P_{34}) (P_{70}, P_{27}) (P_{70}, P_{47}); 11) P_{30}, P_{27} (P_{30}, P_{47}) (P_{70}, P_{23})(P_{70}, P_{34})

Tabela 4 (continuare)

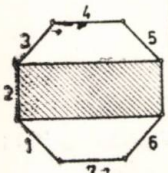
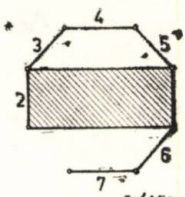
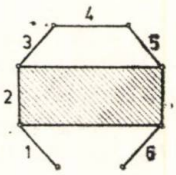
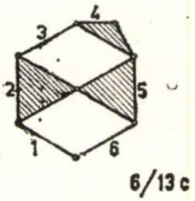
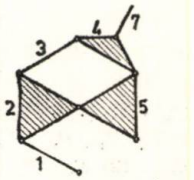
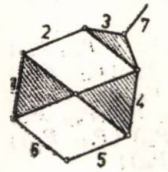
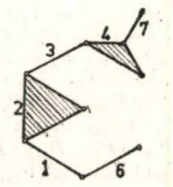
1	2	3
 7/1i	 6/11c	1) P_{30}, $P_{40}(P_{50}, P_{40})$; 2) P_{30}, P_{50}; 3) $P_{30}, P_{23}(P_{50}, P_{25})$; 4) P_{30}, P_{34} (P_{50}, P_{45}); 5) P_{30}, P_{45} (P_{50}, P_{34}); 6) P_{30}, P_{52} (P_{50}, P_{23}); 7) P_{40}, P_{23} (P_{40}, P_{25}); 8) P_{40}, P_{34} (P_{40}, P_{45})
	 6/12c	1) P_{30}, $P_{40}(P_{50}, P_{40})$; 2) P_{30}, P_{50}; 3) $P_{30}, P_{23}(P_{50}, P_{25})$; 4) P_{30}, P_{34} (P_{50}, P_{45}); 5) P_{30}, P_{45} (P_{50}, P_{34}); 6) P_{30}, P_{52}, $(P_{50}P_{23})$; 7) P_{40}, P_{23} (P_{40}, P_{25}); 8) P_{40}, P_{34} (P_{40}, P_{45})
	 6/13c	1) P_{10}, P_{20}; 2) P_{10}, P_{30}; 3) P_{10}, P_{50}; 4) P_{10}, P_{60}; 5) P_{60}, P_{20}; 6) P_{60}, P_{30}; 7) P_{60}, P_{50}; 8) P_{10}, P_{12}; 9) P_{10}, P_{16}; 10) P_{10}, P_{56}; 11) P_{10}, P_{25}; 12) P_{10}, P_{23}; 13) P_{10}, P_{34}; 14) P_{10}, P_{45}; 15) P_{60}, P_{12}; 16) P_{60}, P_{16}; 17) P_{60}, P_{56}; 18) P_{60}, P_{25}; 19) P_{60}, P_{23}; 20) P_{60}, P_{34}; 21) P_{60}, P_{45}; 22) P_{20}, P_{12}; 23) P_{20}, P_{16}; 24) P_{20}, P_{56}; 25) P_{50}, P_{12}; 26) P_{50}, P_{16}; 27) P_{50}, P_{56}; 28) P_{30}, P_{12}; 29) P_{30}, P_{16}; 30) P_{30}, P_{56}
	 6/14c	1) P_{70}, P_{74}
 7/1d		Se descompune

Tabela 4 (continuare)

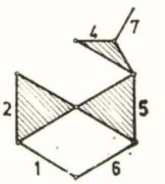
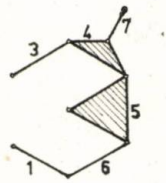
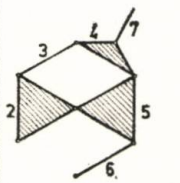
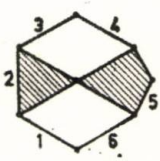
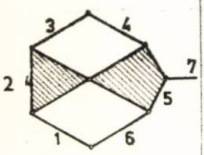
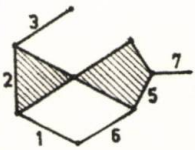
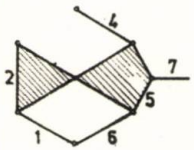
1	2	3
		Se descompune
		Se descompune
	 6/15 c	1) P_{70}, P_{47}
	 6/16c	1) P_{10}, P_{30} (P_{40}, P_{60}); 2) P_{10}, P_{40} (P_{30}, P_{60}); 3) P_{10}, P_{23} (P_{30}, P_{12}); 4) P_{10}, P_{34} (P_{30}, P_{16}); 5) P_{10}, P_{45} (P_{30}, P_{56}); 6) P_{60}, P_{23} (P_{40}, P_{12}); 7) P_{60}, P_{34} (P_{40}, P_{16}); 8) P_{60}, P_{45} (P_{40}, P_{56})
 7/2d		Se descompune
		Se descompune

Tabela 4 (continuare)

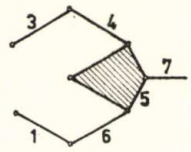
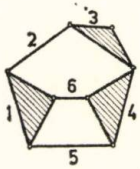
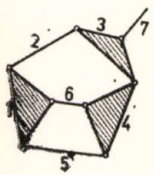
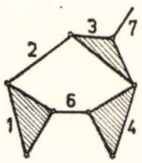
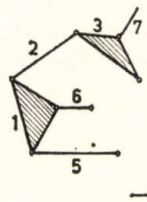
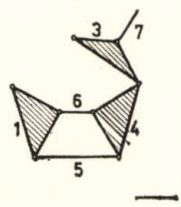
1	2	3
		Se descompune
	 6/17 c	1) P_{10}, P_{20} ; 2) P_{10}, P_{50} ; 3) P_{10}, P_{60} ; 4) P_{10}, P_{40} ; 5) P_{20}, P_{50} ; 6) P_{20}, P_{60} ; 7) P_{20}, P_{40} ; 8) P_{50}, P_{60} ; 9) P_{50}, P_{40} ; 10) P_{60}, P_{40} ; 11) P_{10}, P_{12} ; 12) P_{10}, P_{23} ; 13) P_{10}, P_{34} ; 14) P_{10}, P_{45} ; 15) P_{10}, P_{15} ; 16) P_{10}, P_{46} ; 17) P_{10}, P_{16} ; 18) P_{20}, P_{12} ; 19) P_{20}, P_{23} ; 20) P_{20}, P_{34} ; 21) P_{20}, P_{45} ; 22) P_{20}, P_{15} ; 23) P_{20}, P_{46} ; 24) P_{20}, P_{16} ; 25) P_{50}, P_{12} ; 26) P_{50}, P_{23} ; 27) P_{50}, P_{34} ; 28) P_{50}, P_{45} ; 29) P_{50}, P_{15} ; 30) P_{50}, P_{46} ; 31) P_{50}, P_{16} ; 32) P_{60}, P_{12} ; 33) P_{60}, P_{23} ; 34) P_{60}, P_{34} ; 35) P_{60}, P_{45} ; 36) P_{60}, P_{15} ; 37) P_{60}, P_{46} ; 38) P_{60}, P_{16} ; 39) P_{40}, P_{12} ; 40) P_{40}, P_{23} ; 41) P_{40}, P_{34} ; 42) P_{40}, P_{45} ; 43) P_{40}, P_{15} ; 44) P_{40}, P_{46} ; 45) P_{40}, P_{16}
 7/3 d	 6/18 c	1) P_{70}, P_{37}
		Se descompune
		Se descompune

Tabela 4 (continuare)

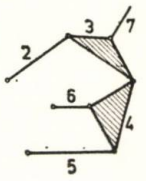
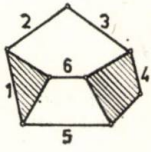
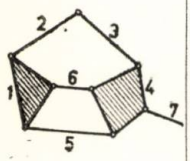
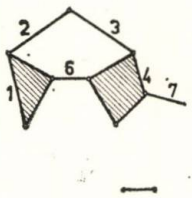
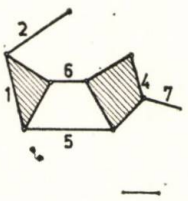
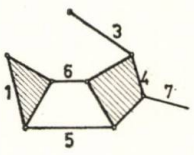
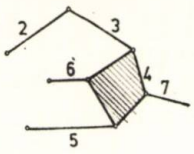
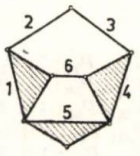
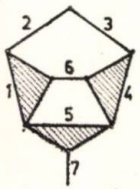
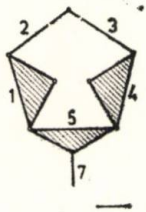
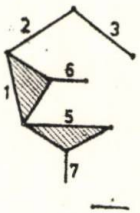
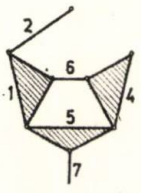
1	2	3
	 6/19c	1) P_{70}, P_{37}
	 6/20c	1) P_{20}, P_{30}; 2) P_{20}, P_{10}; 3) P_{20}, P_{50} P_{50}; 4) P_{20}, P_{60}; 5) P_{30}, P_{10}; 6) P_{30}, P_{50}; 7) P_{30}, P_{60}; 8) P_{20}, P_{12}; 9) P_{20}, P_{23}; 10) P_{20}, P_{34}; 11) P_{20}, P_{16}; 12) P_{20}, P_{15}; 13) P_{20}, P_{46}; 14) P_{20}, P_{45}; 15) P_{30}, P_{12}; 16) P_{30}, P_{23}; 17) P_{30}, P_{34}; 18) P_{30}, P_{16}; 19) P_{30}, P_{15}; 20) P_{30}, P_{46}; 21) P_{30}, P_{45}; 22) P_{10}, P_{12}; 23) P_{10}, P_{23}; 24) P_{10}, P_{34}; 25) P_{50}, P_{12}; 26) P_{50}, P_{23}; 27) P_{50}, P_{34}; 28) P_{60}, P_{12}; 29) P_{60}, P_{23}; 30) P_{60}, P_{34}
 7/4d		Se descompune
		Se descompune
	 5/21c	1) P_{70}, P_{47}

Tabela 4 (continuare)

1	2	3
		Se descompune
	 6/22c	1) P_{20}, P_{30}; 2) P_{20}, P_{10} (P_{30}, P_{40}); 3) P_{20}, P_{40}(P_{30}, P_{10}); 4) P_{20}, P_{60} (P_{30}, P_{60}); 5) P_{20}, P_{12}, (P_{30}, P_{34}); 6) P_{20}, P_{23} (P_{30}, P_{23}); 7) P_{20}, P_{34} (P_{30}, P_{12}); 8) P_{20}, P_{16} (P_{30}, P_{46}); 9) P_{20}, P_{15} (P_{30}, P_{45}); 10) P_{20}, P_{46} (P_{30}, P_{16}); 11) P_{20}, P_{45} (P_{30}, P_{15}); 12) P_{10}, P_{12} (P_{40}, P_{34}); 13) P_{10} P_{23} (P_{40}, P_{23}); 14) P_{10}, P_{34} (P_{40}, P_{12}); 15) P_{60}, P_{12}; 16) P_{60}, P_{23}; 17) P_{60}, P_{34}
 7/5d		Se descompune
		Se descompune
	 6/23c	1) P_{70}, P_{57}

4. Pentru a exemplifica principiul de formare a mecanismelor propus, se analizează cîteva mecanisme, indicîndu-se grupele conducătoare și grupele Assur componente.

Mecanismele din figura 1 sînt extrase din planșele I—1 și I—2 [2], iar mecanismele din figura 2 sînt utilizate în construcția unor mașini de lucru și au o acționare hidraulică.

BIBLIOGRAFIE

1. I. I. Artobolevski, *Teoria mecanismelor și a mașinilor*, București, Edit. tehnică, 1955.
2. N. I. Manolescu, *Sinteza numerică, structurală și cinematică a grupelor ASSUR, a lanțurilor cinematice, a mecanismelor și mecanismelor-motor plane articulate*, Teză de doctorat, București, 1969.
3. — *O metodă unitară de alcătuire a lanțurilor cinematice a mecanismelor plane articulate de diferite grade de libertate și mobilitate*, St. cerc. mec. apl., **17**, *6* (1964).
4. — *Sistematizarea și clasificarea mecanismelor-motor plane articulate cu două grade de mobilitate „total"* ($M_3 = 2$) *și „parțial"* ($M_3^p = 2$), St. cerc. mec. apl., **20**, *6* (1965).
5. — *Pentru adoptarea unui punct de vedere unitar în studiul analizei structurale a lanțurilor cinematice și a mecanismelor*, St. cerc. mec. apl., **28**, *2* (1969).
6. Chr. Pelecudi, *Bazele analizei mecanismelor*, București, Edit. Academiei, 1967.
7. R. Altschul, W. Ihme, *Getriebetechnik*, Maschinenbautechnik, *6* (1964).

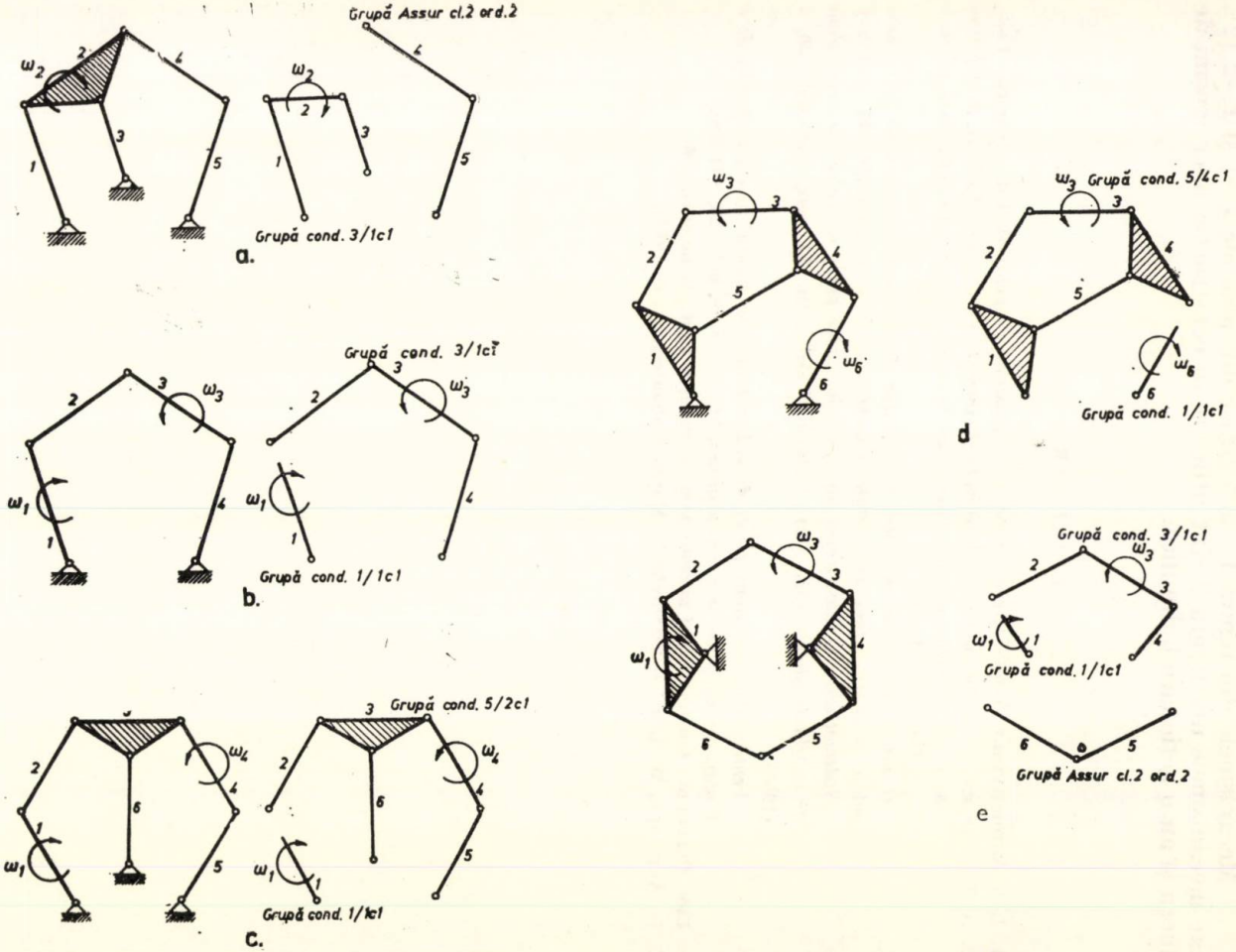

Grupă Assur cl.2 ord.2
Grupă cond. 3/1c1
a.
Grupă cond. 3/1c1
Grupă cond. 1/1c1
b.
Grupă cond. 5/2c1
Grupă cond. 1/1c1
c.
Grupă cond. 5/4c1
Grupă cond. 1/1c1
d
Grupă cond. 3/1c1
Grupă cond. 1/1c1
Grupă Assur cl.2 ord.2
e

Fig. 1

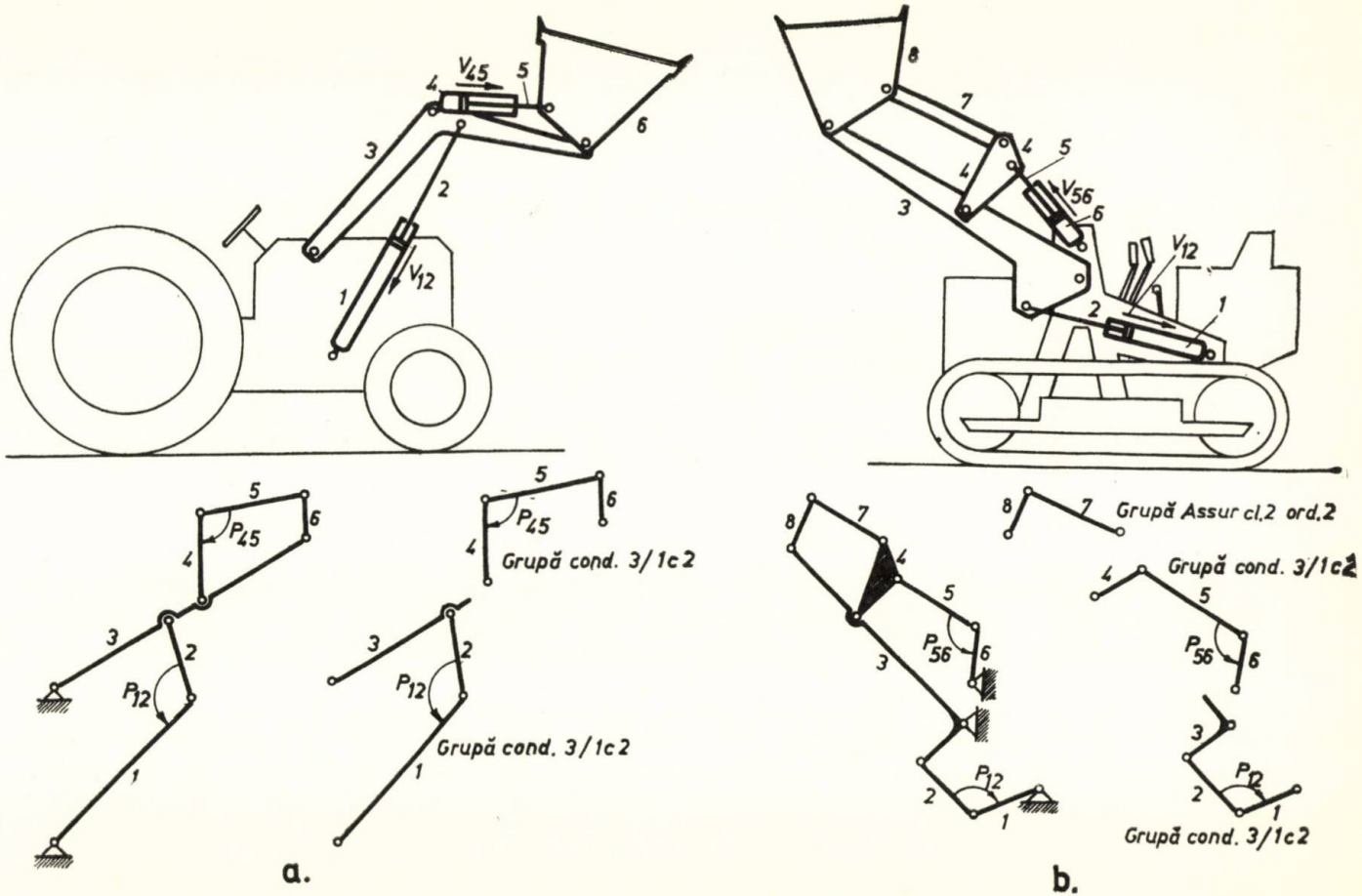


Fig. 2. — a. Încărcător frontal M — F 735, firma Massey-Ferguson, Coventry; b. Încărcător frontal S — 651 I.F., Uzina mecanică Nicolina — Iași.

CALCULUL STRUCTURILOR PRIN ITERAȚII CU SUPRARELAXĂRI ASUPRA MOMENTELOR

de N. POSEA
Institutul de petrol Ploiești

Lucrarea prezintă o metodă iterativă pentru calculul static al structurilor prin utilizarea unor operații de suprarelaxare în scopul măririi rapidității de convergență. Deoarece tipurile de relaxări folosite sînt cele obișnuite în metoda generală a deplasărilor, metoda propusă este mult mai simplă decît procedeele cunoscute în literatura de specialitate, care, pentru mărirea rapidității de convergență, folosesc tipuri speciale de relaxări, a căror eficiență se limitează numai la anumite categorii de structuri.
Iterațiile se efectuează asupra momentelor pe schema propusă de Kani, iar mărirea rapidității de convergență se obține prin utilizarea unor coeficienți de suprarelaxare. Pentru aceștia se prezintă atît expresii exacte, cît și aproximative, determinate pe baza unor relaxări în bloc sau grup.
Procedeul propus este ilustrat pe un exemplu din care rezultă, cu claritate, atît modul concret de aplicare, cît și eficiența deosebită privind reducerea numărului de cicluri de iterație în comparație cu metodele cunoscute.
Se menționează că expresia iterativă cu suprarelaxări, dezvoltată pe baza unei matrice de iterație care cuprinde și pătratul matricei coeficienților de transmitere, are un caracter staționar și poate fi programată cu ușurință la un calculator automat.

Cele mai răspîndite metode pentru calculul structurilor sînt cele iterative, bazate pe metoda generală a deplasărilor. Aplicarea acestora în cazul cadrelor cu noduri deplasabile întîmpină dificultăți datorită faptului că procesul iterativ are o slabă rapiditate de convergență și, deci, sînt necesare, în majoritatea cazurilor, foarte multe cicluri de iterații. Pentru îmbunătățirea rapidității de convergență s-au introdus, în afara relaxărilor de noduri și de bare [3], [6] și alte tipuri de relaxări ca, de exemplu, distorsiuni [1], relaxări în bloc [5], [7], relaxări în grup [10], [11], suprarelaxări [2], [8] etc.

Folosirea altor tipuri de relaxări decît cele de noduri și de bare, corespunzătoare formei de bază generale a metodei deplasărilor, conduce la complicarea schemei de iterație și la o eficiență satisfăcătoare numai pentru anumite categorii de structuri.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 32, NR. 1, 1973, P. 173–194

O metodă generală pentru îmbunătățirea rapidității de convergență a iteraţiilor, aplicabilă, sub aceeaşi formă la toate tipurile de structuri, se prezintă în lucrarea [9]. Metoda porneşte de la matricea de iteraţie $A^* = u + t + t^2$ (unde u este matricea unitate, iar t, matricea coeficienţilor de transmitere ai metodei rotirilor) şi foloseşte la relaxarea nodurilor şi barelor pe forma de bază generală a metodei deplasărilor anumiţi coeficienţi de suprarelaxare, determinaţi în mod exact sau aproximativ. Se precizează că această metodă, datorită expresiilor ciclice de iteraţie, poate fi programată cu uşurinţă la un calculator automat.

În lucrarea de faţă se analizează aspectele specifice ale metodei iteraţiilor cu suprarelaxări [9], pentru cazul cînd iteraţiile se efectuează asupra momentelor. Se va folosi în acest scop schema de iteraţie propusă de Kani [4], care are avantajul unei simplităţi mai mari în ceea ce priveşte înscrierea datelor numerice.

1. EXPRESIILE MOMENTELOR DIN RELAXĂRILE NODURILOR ŞI BARELOR

Pentru o bară cu moment de inerţie I constant dublu încastrată (fig. 1 *a*), momentele de la capete, considerate pozitive cînd rotesc orar nodul pe care se aplică (fig. 1 *c*) produse de sarcinile exterioare, rotirile

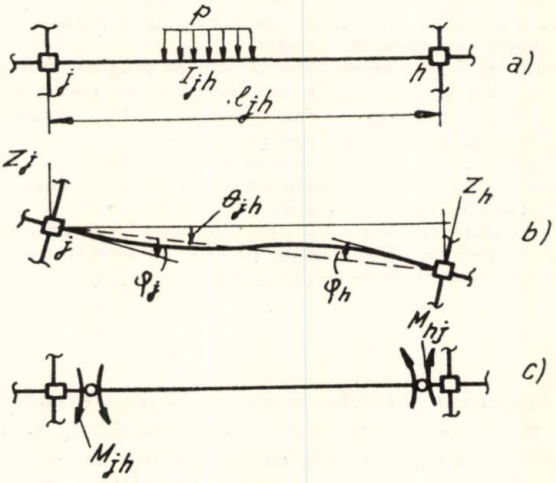


Fig. 1

de la capete φ_j, φ_h şi rotirea bare θ_{jh} (fig. 1 *b*) sînt date [6] de expresiile :

$$M_{jh} = \mathfrak{M}^0_{jh} - \rho_{jh}\varphi_j - \frac{1}{2}\rho_{jh}\varphi_h + 1{,}5\ \rho_{jh}\theta_{jh},$$

$$M_{hj} = \mathfrak{M}^0_{hj} - \frac{1}{2}\rho_{jh}\varphi_j - \rho_{jh}\varphi_h + 1{,}5\ \rho_{jh}\theta_{jh}. \qquad (1)$$

În cazul unei bare încastrate la un capăt (j) și simplu rezemată sau articulată la celălalt (g), momentul din j este dat de relația

$$M_{jg} = \mathfrak{M}^0_{jg} - \rho_{jg}\varphi_j + \rho_{jg}\theta_{jg}. \qquad (1')$$

(Rigiditate practică ρ reprezintă : $\rho_{jh} = I_{jh}/l_{jh}$ pentru bara dublu încastrată; $\rho_{jg} = \frac{3}{4} I_{jg}/l_{jg}$ pentru bara încastrată și articulată; φ_j, φ_h, θ_{jh} sînt rotiri de calcul exprimate în funcție de rotirile reale φ'_j, φ'_h, θ'_{jh}, prin relațiile :

$$\varphi = 4E\varphi'; \qquad \theta = 4E\theta').$$

În cazul relaxării numai a nodului j (fig. 2 a) sub acțiunea momentului neechilibrat $\mathfrak{M}_j$, se produce rotirea Z_j și la capetele barelor ce se întîlnesc în modul respectiv, ținînd seama de relațiile (1), (1'), apar momentele

$$M_{jh} = -\rho_{jh}Z_j = -2M'_{jh}; \qquad M_{hj} = -\frac{1}{2}\rho_{jh}Z_j = M'_{jh}, \qquad (a)$$

unde s-a notat

$$M'_{jh} = \frac{1}{2}\rho_{jh}Z_j \qquad (2)$$

denumit moment parțial distribuit. La bara jg, momentul parțial distribuit are aceeași expresie $\left(M'_{jg} = \frac{1}{2}\rho_{jg}Z_j\right)$. Pe figura 2 b s-a reprezentat diagrama de momente din rotirea nodului j, iar pe figura 2 c momentele din jurul nodului j.

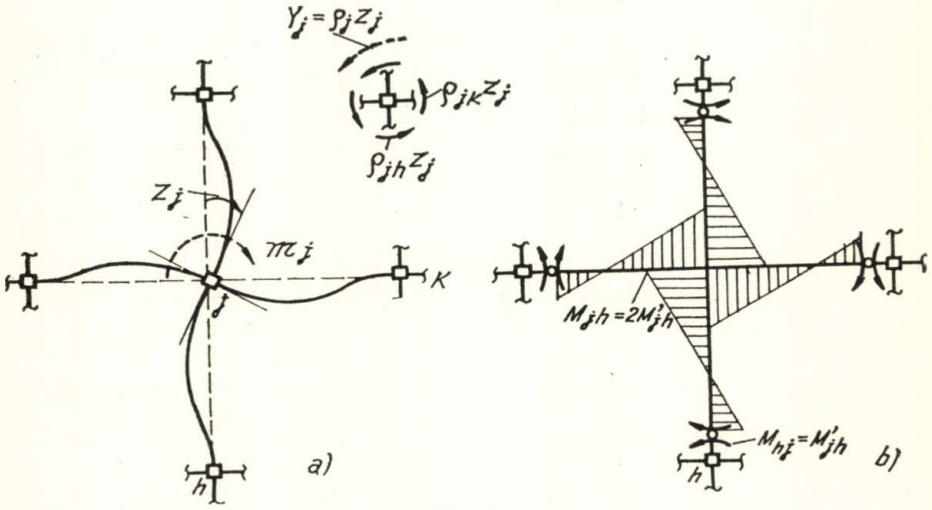


Fig. 2

Se notează rigiditatea nodului j

$$\rho_j = \sum_h \rho_{jh}, \tag{3}$$

şi suma momentelor din relaxare (fig. 2 *c*)

$$Y_j = -\rho_j Z_j. \tag{b}$$

Introducînd (b) în (2) şi ţinînd seama de echilibrul nodului j, $-Y_j + \mathfrak{M}_j = 0$, se obţin momentele parţial distribuite

$$M'_{jh} = -\frac{1}{2}\frac{\rho_{jh}}{\rho_j} Y_j = \mu_{jh} Y_j = \mu_{jh}\mathfrak{M}_j, \tag{4}$$

unde

$$\mu_{jh} = -\frac{1}{2}\frac{\rho_{jh}}{\rho_j} \tag{5}$$

reprezintă coeficientul de distribuţie parţială. Suma coeficienţilor de distribuţie parţială în jurul oricărui nod îndeplineşte relaţia

$$\sum_h \mu_{jh} = -\frac{1}{2}. \tag{6}$$

În cazul relaxării barelor (fig. 3 *a*), momentele ce apar le capetele barelor ce se rotesc în gradul de libertate Z_α, prin folosirea relaţiilor (1), (1'), sînt :

$$M''_{jh,\alpha} = M''_{hj,\alpha} = 1{,}5\ \rho_{jh}\theta_{jh,\alpha}Z_\alpha, \tag{c}$$

$$M''_{jg,\alpha} = \rho_{jg}\theta_{jg,\alpha}Z_\alpha. \tag{c'}$$

Prin $\theta_{jh,\alpha}$ se înţelege rotirea barei jh pentru $Z_\alpha = 1$. Diagrama de momente ce apare din deplasarea elastică Z_α este reprezentată în figura 3 *b*.

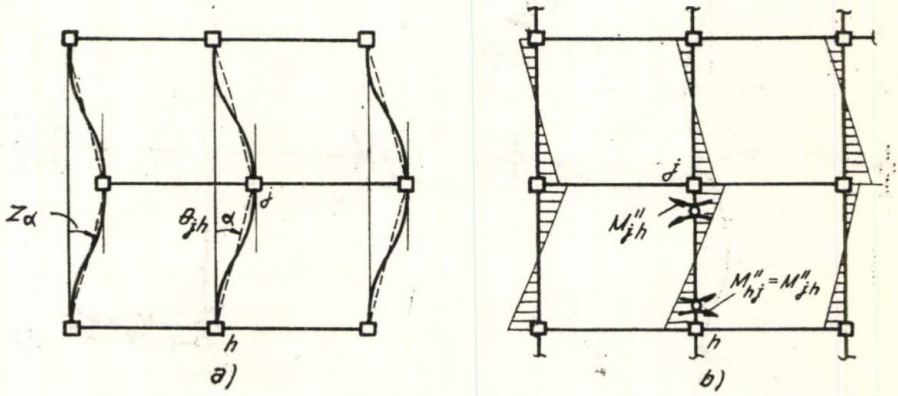


Fig. 3

Considerînd un grad de libertate cinematică $\overline{Z}_\alpha = 1$, identic cu deplasarea elastică Z_α (fig. 3 *a*) lucrul mecanic al momentelor apărute în deplasarea elastică (fig. 3 *b*), deoarece produc lucru mecanic numai momentele de la capetele barelor, este egal cu

$$Y^*_\alpha = -\sum (M''_{jh\alpha} + M''_{hj\alpha})\,\theta_{jh,\alpha} = (-\sum_{(1)}^{3} \rho_{jh}\theta^2_{jh\alpha})\,Z_\alpha \qquad (7)$$

(cifra (1) înlocuiește pe 3 pentru barele *jh*, articulate sau simplu rezemate la capătul *h*).

Dacă se notează în mod similar cu (b)

$$Y^* = -\rho_\alpha Z_\alpha, \qquad (d)$$

atunci din (7) rezultă rigiditatea totală la gradul de libertate Z_α

$$\rho_\alpha = \sum_{(1)}^{3} \cdot \rho_{jh}\theta^2_{jh,\alpha}. \qquad (8)$$

Ținînd seama că lucrul mecanic total Y^*_α, distribuit în relaxarea Z_α, este egal și de sens contrar cu lucrul mecanic total $L_\alpha = Y_\alpha$ neechilibrat în același grad de libertate ($Y_\alpha = -Y^*_\alpha$), introducînd pe (7) în (c) și (c') se obțin momentele din relaxarea barelor

$$M''_{jh,\alpha} = +\frac{\sum_{(1)}^{1,5}\rho_{jh}\theta_{jh,\alpha}}{\sum_{(1)}^{3}\rho_{jh}\theta^2_{jh,\alpha}} Y_\alpha = -c_{jh,\alpha}Y_\alpha = -c_{jh,\alpha}L_\alpha, \qquad (9)$$

unde

$$c_{jh,\alpha} = -\frac{1}{2}\,\frac{\rho_{jh}\theta_{jh,\alpha}}{\sum 1\cdot\rho_{jh}\theta^2_{jh}} \qquad (10)$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)\qquad\left(\frac{1}{3}\right)$$

reprezintă coeficientul de repartiție al lucrului mecanic neechilibrat L_α, în relaxarea barelor corespunzătoare gradului de libertate Z_α.

Corespunzător rotirii totale a barei *jh*

$$\theta_{jh} = \sum \theta_{jh,\alpha}Z_\alpha, \qquad (e)$$

momentul din relaxările de bare se determină prin însumarea valorilor $M''_{jh,\alpha}$ (formula c) și se obține

$$M'_{jh} = \sum M''_{jh,\alpha} = = 1{,}5\ \rho_{jh}\sum\ \theta_{jh,\alpha}Z_\alpha = 1{,}5\ \rho_{jh}\,\theta_{jh}. \qquad (11)$$

Dacă se notează

$$S_{jh} = M'_{jh} + M'_{hj}, \tag{12}$$

prin introducerea relaţiilor (a), (c), (c') în (1), (1'), rezultă expresiile momentelor la capetele barelor :

$$\begin{aligned} M_{jh} &= \mathfrak{M}^0_{jh} + M'_{jh} + S_{jh} + M''_{jh}, \\ M_{hj} &= \mathfrak{M}^0_{hj} + M'_{hj} + S_{jh} + M''_{hj}, \end{aligned} \tag{13}$$

$$M_{jg} = \mathfrak{M}^0_{jg} + M'_{jg} + S_{jg} + M''_{jg}, \tag{13'}$$

în funcţie de momentele de încastrare perfectă $\mathfrak{M}^0_{jh}$, momentele parţial distribuite M'_{jh}, ce se determină la fiecare relaxare de nod cu formula (4), momentele repartizate M''_{jh} din relaxarea barelor, calculate cu expresia (9) şi termenul constant S_{jh} determinat cu (12) (se înţelege că pentru bara jg, cu articulaţie în g, $S_{jg} = M'_{jh}$).

Se observă cu uşurinţă că termenii ce trebuie determinaţi prin iteraţie sînt momentele M'_{jh} (4) şi M''_{jh} (9), pentru care, în fiecare etapă, se determină valorile neechilibrate $\mathfrak{M}_j$ sau L_α după cum este o relaxare de nod sau de bară.

R e m a r c ă : Verificarea coeficienţilor de repartiţie $c_{jh,\alpha}$ se face cu relaţia

$$\sum_{jh\,(1)} 2\, c_{jh,\alpha} = -1, \tag{14}$$

care rezultă din condiţia ca lucrul mecanic repartizat să fie egal cu cel neechilibrat (cifra (1) de sub cifra 2 înlocuieşte pe acesta în cazul barelor articulate la unul din capete).

2. EXPRESIILE DE ITERAŢIE ALE MOMENTELOR

Iteraţiile se fac direct pe schema structurii pe care se notează nodurile şi în jurul lor, pentru fiecare capăt de bară, coeficienţii de distribuţie parţială μ_{jh} (fig. 4). De asemenea, la mijlocul fiecărei bare (fig. 4 într-un semicerc) se trec coeficienţii de repartiţie pentru toate gradele de libertate în care se roteşte bara respectivă.

Relaţiile (13), (13') arată că pentru calculul momentelor sînt necesare patru faze :

— *faza 1* constă din înscrierea momentelor de încastrare perfectă la toate capetele de bară ;

— *faza 2* constă din evaluarea momentului neechilibrat în jurul fiecărui nod şi înscrierea momentelor parţial distribuite M'_{jh} (4), la fiecare capăt de bară din nodul respectiv.

Momentul parțial distribuit de la capătul unei bare este moment neechilibrat la capătul opus. În consecință, ținînd seama atît de relaxarea nodurilor (fig. 2), cît și de relaxarea barelor (fig. 3), momentul neechilibrat

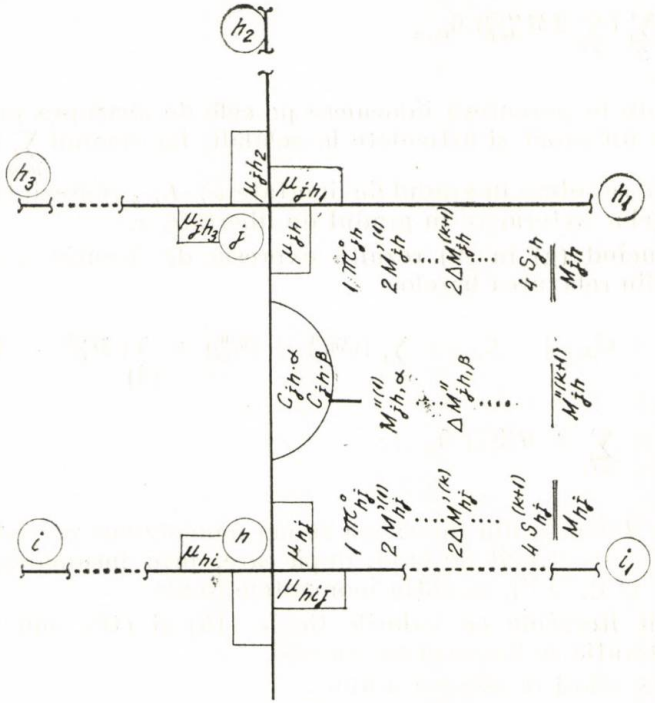


Fig. 4

într-un nod oarecare j, după k cicluri de iterație, este

$$\mathfrak{M}_j^{(k+1)} = \sum_{h,j} (\mathfrak{M}_{jh}^0 + M_{hj}'^{(k)} + \sum_{\alpha} M_{jh,\alpha}''^{(k)}). \tag{f}$$

Aplicînd apoi formula (4), se obține expresia de iterație

$$M_{jh}'^{(k+1)} = \mu_{jh} \sum_{h,j} (\mathfrak{M}_{jh}^0 + M_{hj}'^{(k)} + \sum_{\alpha} M_{jh,\alpha}''^{(k)}) \tag{15}$$

(semnul $\sum_{h,j}$ indică toate nodurile h legate de j);

— *faza 3* constă din înscrierea momentelor $M''_{jh,\alpha}$ (9) provenite din relaxarea barelor, pe o singură coloană prevăzută în mijlocul fiecărei bare care are rotiri. Lucrul mecanic neechilibrat într-un grad de libertate α, ținînd seama de diagramele din figurile 2*b*; 3*b* și de faptul că produc lucru mecanic momentele de la capetele barelor, iar pe figura 4 s-au trecut numai momentele parțial distribuite și cele repartizate, o singură dată,

şi cu semnele lor de pe nod, este

$$L_{\alpha}^{(k+1)} = L_{F,\alpha} - \sum_{jh,\alpha} (\mathfrak{M}_{jh}^{0} + \mathfrak{M}_{hj}^{0})\,\theta_{jh,\alpha} - \sum_{jh} 3\,(M_{jh}^{\prime(k)} + M_{hj}^{\prime(k)})\,\theta_{jh,\alpha} -$$

$$- \sum_{jh} \Big(\sum_{\beta(1)} 2 M_{jh,\beta}^{\prime\prime(k)}\Big)\,\theta_{jh,\alpha} \qquad (g)$$

(cifrele trecute în paranteză înlocuiesc pe cele de deasupra pentru barele încastrate la un capăt şi articulate la celălalt, iar semnul $\sum_{jh,\alpha}$ indică toate barele jh care se rotesc în gradul de libertate α). $L_{F,\alpha}$ reprezintă lucrul mecanic al forţelor exterioare în gradul de libertate α.

Introducînd (g) în (9) rezultă expresia de iteraţie a momentelor repartizate din relaxarea barelor

$$M_{jh,\alpha}^{\prime\prime(k+1)} = C_{jh,\alpha}\Big\{- L_{F,\alpha} + \sum_{jh,\alpha} \Big[(\mathfrak{M}_{jh}^{0} + \mathfrak{M}_{hj}^{0}) + \underset{(2)}{3}\,(M_{jh}^{\prime(k)} + M_{hj}^{\prime(k)}) +$$

$$+ \sum_{\beta(1)} 2\, M_{jh,\beta}^{\prime\prime(k)}\Big]\,\theta_{jh,\alpha}\Big\}; \qquad (16)$$

— *faza 4* constă din înscrierea sumei momentelor parţial distribuite S_{jh} (12) la fiecare capăt de bară, după care, prin însumarea prevăzută de formulele (13), (13′), se obţin momentele finale.

Întrucît iteraţiile cu valorile finale (15) şi (16) sînt greoaie pe schema de iteraţie se lucrează cu corecţii.

Primele valori în această ordine :

$$M_{jh,\alpha}^{\prime\prime(1)} = c_{jh,\alpha}\,[- L_{F,\alpha} + \sum_{jh,\alpha} (\mathfrak{M}_{jh}^{0} + \mathfrak{M}_{hj}^{0})\,\theta_{jh,\alpha}], \qquad (17$$

$$M_{jh}^{\prime(1)} = \mu_{jh} \sum_{h,j} (\mathfrak{M}_{jh}^{0} + M_{hj}^{\prime(1)} + \sum_{\alpha} M_{jh\alpha}^{\prime(1)}), \qquad (18)$$

se obţin prin particularizarea relaţiei (16), respectiv (15).

În continuare din (16) se determină corecţia

$$\Delta M_{jh,\alpha}^{\prime\prime(1)} = c_{jh,\alpha} \sum_{jh,\alpha} \Big[\underset{(2)}{3}\,(M_{jh}^{\prime(1)} + M_{hj}^{\prime(1)}) + \sum_{\beta(1)} 2\, M_{jh,\beta}^{\prime\prime(1)}\Big]\,\theta_{jh,\alpha} \qquad (19)$$

pentru relaxarea barelor în gradul de libertate α şi apoi din (15) corecţia

$$\Delta M_{jh}^{\prime(1)} = \mu_{jh} \sum_{h,j} (M_{hj}^{\prime(1)} + \sum_{\alpha} M_{jh,\alpha}^{\prime\prime(1)}) \qquad (20)$$

pentru relaxarea nodului j. La fiecare relaxare se trage cîte o linie după valorile neechilibrate considerate pentru a nu mai fi introduse în calculele

ulterioare. După k cicluri de iterație prin repetarea relațiilor (19), (20) se obțin corecțiile :

$$\Delta M''^{(k+1)}_{jh,\alpha} = c_{jh,\alpha} \sum_{jh,\alpha\,(2)} [3\,(\Delta M'^{(k)}_{jh} + \Delta M'^{(k)}_{hj}) + \sum_{\beta\,(1)} 2\,\Delta M''^{(k)}_{jh,\beta}]\,\theta_{jh,\alpha} =$$

$$= c_{jh,\alpha} L^{n(k)}_{\alpha}, \tag{21}$$

$$\Delta M'^{(k+1)}_{jh} = \mu_{jh} \sum_{h,j} (\Delta M'^{(k)}_{hj} + \sum_{\alpha} \Delta M''^{(k+1)}_{jh,\alpha}) = \mu_{jh}\, \mathfrak{M}^{n(k)}_{j}, \tag{22}$$

care se trec primele la mijlocul barelor, ceea ce corespunde fazei 3 (fără să se mai indice faza în fig. 4) și ultimele la capetele respective ale barelor în fază 2.

Aceste faze se repetă pînă cînd corecțiile ΔM devin neglijabile. După aceasta se adună toate fazele doi, de la fiecare capăt de bară, obținîndu-se valorile finale M'_{jh}, M'_{hj} și se face suma $S_{jh} = M'_{jh} + M'_{hj}$, care se trece la fiecare capăt de bară în faza 4. Efectuînd și sumele din faza 3 (coloana de la mijlocul fiecărei bare care are rotiri) se obține valoarea M''_{jh} după care prin aplicarea relațiilor (13), (13′) rezultă valorile finale ale momentelor.

Observații :

a) În expresia (22) suma $\sum_{h,j}$ cuprinde și nodurile h care au fost relaxate în ciclul $(k+1)$ anterior nodului j. În mod similar suma $\sum_{\beta}$ din (21) se referă la gradele de libertate relaxate anterior gradului α, indiferent dacă sînt în ciclul k sau $(k+1)$.

Prin $L^{n(k)}_{\alpha}$ din (21) se înțelege lucrul mecanic neechilibrat în ciclul k, calculat cu semnele momentelor de pe nod, iar prin $\mathfrak{M}^{n(k)}_{j}$, momentul neechilibrat la ciclul k din nodul j.

Prin aceste notații expresiile (21) și (22) pot fi considerate ca generale, ele incluzînd și formulele (17), (18), (19), (20) care nu diferă decît prin expresiile valorilor neechilibrate.

b) Atunci cînd nodul h este articulat valoarea $\Delta M'^{(k)}_{hj}$ din (21) și (22) este nulă.

c) Expresiile de iterație (15), (16) se pot deduce cu ușurință și din sistemul general de ecuații al metodei deplasărilor.

$$\sum_{k=1}^{n} r_{jk} Z_k + R_{j0} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{23}$$

Dacă se notează :

$$\text{(h)}\quad Y_j = -\,r_{jj} Z_j\,; \qquad \gamma_{hj} = -\,\frac{r_{jh}}{r_{hh}}, \qquad \text{(i)}$$

şi din fiecare ecuaţie a sistemului (23) se explicitează necunoscuta principală

$$Y_j = R_{j0} + \sum_{h \neq j} \gamma_{hj} Y_h, \tag{24}$$

se obţin expresiile de iteraţie ale necunoscutelor Y.

Dacă aceste necunoscute se introduc în (4) cînd corespund unei rotiri de nod sau în (9) cînd corespund unui grad de libertate, rezultă tocmai relaţiile (15), respectiv (16).

Valorile coeficienţilor de transmitere dintre necunoscutele Y, determinaţi prin explicitarea termenilor din (i), sînt :

— pentru două necunoscute j, h rotiri de noduri :

$$\gamma_{jh} = \mu_{jh}; \qquad \gamma_{hj} = \mu_{hj}, \tag{25}$$

— pentru o necunoscută j rotire de nod şi o necunoscută α grad de libertate :

$$\gamma_{\alpha,j} = -\sum_{jh,\alpha} C_{jh,\alpha}; \qquad \gamma_{j,\alpha} = -\frac{3}{(2)} \sum_{jh} \mu_{jh}, \theta_{jh,\alpha} \tag{26}$$

(cifra (2) înlocuieşte pe 3 în cazul barei articulate în h),

— pentru două necunoscute α, β grade de libertate :

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{2}{(1)} \sum c_{jh,\alpha}\, \theta_{jh,\beta}, \\ \gamma_{\beta\alpha} &= \frac{2}{(1)} \sum c_{jh,\beta}\, \theta_{jh,\alpha}. \end{aligned} \tag{27}$$

S-a preferat însă calea directă pentru scurtarea expunerii şi o mai mare claritate a schemei de iteraţie.

d) Cunoscînd la capătul j al unei bare momentul M'_{jh} total (adică suma momentelor din faza 2) şi folosind formula (2) rezultă rotirea nodului

$$Z_j = 2\,\frac{M'_{jh}}{\rho_{jh}}. \tag{28}$$

Procedînd astfel pentru toate barele din nodul respectiv se obţine o verificare eficientă şi simplă a calculului efectuat.

e) Din momentul total M''_{jh} (suma tuturor momentelor din faza 3), prin folosirea formulei (11) rezultă direct rotirea totală a barei jh

$$\theta_{jh} = \frac{M''_{jh}}{1{,}5\,\rho_{jh}}; \tag{29}$$

3. COEFICIENȚI ȘI OPERAȚII DE SUPRARELAXARE PENTRU MĂRIREA RAPIDITĂȚII DE CONVERGENȚĂ A ITERAȚIILOR

Procedeele de suprarelaxare prezentate în lucrarea [9] în cazul interațiilor asupra rotirilor (necunoscutele Z) se aplică sub aceiași formă în cazul iterațiilor asupra necunoscutelor Y și deci asupra momentelor M'_{jh} și M''_{jh}, care rezultă din acestea prin intermediul formulelor (4) și (9). În consecință, iterațiile cu suprarelaxări asupra momentelor se pot efectua atît prin folosirea formelor de bază complexe, cît și prin folosirea coeficienților de suprarelaxare. Se menține și în acest caz concluzia din [9] că formele de bază complexe sînt indicate numai în cazul cadrelor cu noduri fixe. Pentru cazul general al cadrelor cu noduri deplasabile, folosirea coeficienților de suprarelaxare pe forma de bază generală a metodei deplasărilor este cea mai indicată atît prin simplitate, cît și prin eficiență în ceea ce privește mărirea rapidității de convergență.

Întrucît sistemul necunoscutelor (24) este identic cu sistemul necunoscutelor Z (formula (6) din lucrarea [9]) cu diferența că în (24) intervine matricea γ în locul matricei t din [9], înseamnă că expresia de iterații cu suprarelaxări, bazată pe matricea t^2 (formula (25) din [9]), rămîne valabilă și pentru necunoscutele Y, schimbînd numai termenii t_{jh} cu γ_{jh}. Se obține astfel expresia generală de iterație pentru necunoscutele Y :

$$Y_j^{(k+1)} = \frac{1}{1 - \sum_{h=1}^{n} \gamma_{jh}\gamma_{hj}} \left(Y_j^0 + \sum_{h=1}^{n} \gamma_{hj} Y_h^0 + \sum_{i=1}^{j-1} x_{ij} Y_i^{(k+1)} + \sum_{i=j+1}^{n} \chi_{ij} Y_i^{(k)} \right), \quad (30)$$

în care, prin analogie cu formula (23) din [9],

$$\chi_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik}\gamma_{kj}. \quad (31)$$

Expresia (30) reprezintă o formă de iterație cu suprarelaxări, care prezintă o mare rapiditate de convergență atît datorită coeficientului de suprarelaxare

$$\varepsilon_j = \frac{1}{1 - \sum_{h=1}^{n} \gamma_{jh}\gamma_{hj}}, \quad (32)$$

cît și datorită coeficienților χ_{ij}, care, avînd valori mici, fac ca procesul iterativ să se încheie după un număr de cicluri foarte redus.

În plus, expresia (30) prezentînd un caracter staționar poate fi programată cu ușurință la un calculator automat, ceea ce face ca procedeul cu suprarelaxări propus să fie deosebit de avantajos, mai ales la structurile cu un mare număr de necunoscute, cînd rezolvarea directă a sistemului de ecuații ar necesita calculatorului o memorie deosebit de mare și un timp de lucru îndelungat.

Ţinînd seama de expresiile (25), (26), (27) ale coeficienţilor de transmitere γ_{jh}, în funcţie de caracterul necunoscutelor, rotire de nod sau de bară, coeficientul de suprarelaxare (32), care ţine seama numai de legăturile directe dintre necunoscute, poate lua următoarele forme :

— pentru o necunoscută, rotire de nod j, cînd legăturile acesteia sînt numai cu rotiri de noduri

$$\varepsilon_j = \frac{1}{1 - \sum \mu_{jh}\mu_{hj}}, \tag{33}$$

— pentru o rotire de nod j cînd aceasta are legături şi cu grade de libertate

$$\varepsilon_j = \frac{1}{1 - \sum \mu_{jh}\mu_{hj} - \sum_{\alpha} \left(\sum_{h\ (2)}^{3} \mu_{jh}\theta_{jh,\alpha} \right) \left(\sum_{jh,} c_{jh,\alpha} \right)}, \tag{34}$$

— pentru un grad de libertate

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{1 - \sum_{j} \left(\sum_{jh\ (2)}^{3} \mu_{jh}\theta_{jh,\alpha} \right) \left(\sum c_{jh,\alpha} \right) - \sum_{\alpha} \left(\sum_{jh,\alpha\beta\ (1)}^{4} c_{jh,\alpha} c_{jh,\beta}\theta_{jh,\alpha}\theta_{jh,\beta} \right)}. \tag{35}$$

Pentru a ţine seama la relaxarea unei necunoscute α şi de legăturile dintre necunoscutele rotiri de noduri legate direct de gradul de libertate α se foloseşte pentru necunoscutele rotiri de noduri o relaxare în bloc. În acest fel coeficientul de suprarelaxare are expresia

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{1 - \gamma_{\alpha b}\gamma_{b\alpha}}. \tag{36}$$

Coeficientul de transmitere de la gradul de libertate α la necunoscutele b din bloc, notate cu ν, folosind formula (36) din [9] este

$$\gamma_{\alpha,b} = -\frac{\sum\limits_{\nu} \gamma_{\alpha\nu}}{\sum\limits_{\nu}\sum\limits_{\lambda} \gamma_{\nu\lambda}} = -\frac{\sum\limits_{\nu} \gamma_{\alpha\nu}}{\sum\limits_{\nu} \Delta R_{\nu\alpha}}, \tag{37}$$

unde ν, λ se referă la toate necunoscutele din bloc, iar $\sum\limits_{\nu}\sum\limits_{\lambda}\gamma_{\nu\lambda} = \sum\limits_{\nu}\Delta R_{\nu\alpha}$ reprezintă suma reziduurilor la toate necunoscutele din bloc produse de valorile unitare ale acestora ($\gamma_{\nu\nu} = \gamma_{\lambda\lambda} = -1$). Particularizînd relaţia (37) pentru un cadru etajat avînd nodurile i, j considerate în bloc, împreună cu gradul de libertate β se obţine

$$\gamma_{\alpha,b} = -\frac{\Sigma 2\, c_{ij,\alpha}^{(1)}}{n - \Sigma(\mu_{ij} + \mu_{ji}) + \Sigma c_{ij,\beta}} \tag{37'}$$

(cifra (1) de sub 2 înlocuieşte pe 2 în cazul barelor cu un capăt articulat sau încastrat ; n reprezintă numărul nodurilor din blocul considerat).

Folosind (26), coeficientul $\gamma_{b,\alpha}$ are expresia

$$\gamma_{b,\alpha} = -\sum_{ij}^{(2)} 3(\mu_{ij} + \mu_{ji})\theta_{ij,\alpha}. \tag{38}$$

Între două necunoscute, grade de libertate α, β, care se influențează numai prin intermediul necunoscutelor de noduri i, j, se pot stabili, prin folosirea relațiilor (26), coeficienții de transmitere:

$$\gamma_{\alpha,\beta} = -\frac{\Sigma^{(1)} 2\, c_{ij,\alpha}}{\sum_{\nu}\sum_{\lambda} \mu_{\nu\lambda}} \Sigma^{(2)} 3(\mu_{ij} + \mu_{ji})\theta_{ij,\beta},$$

$$\gamma_{\beta\alpha} = -\frac{\Sigma^{(1)} 2\, c_{ij,\beta}}{\sum_{\nu}\sum_{\lambda} \mu_{\nu\lambda}} \Sigma^{(2)} 3(\mu_{ij} + \mu_{ji})\theta_{ij,\alpha}. \tag{39}$$

(cifrele (1) și (2) înlocuiesc pe cele de deasupra în cazul barelor cu un capăt articulat sau încastrat perfect).

Folosirea unei operații de suprarelaxare în cazul iterațiilor asupra momentelor M''_{jh}, M'_{jh} revine la multiplicarea corecțiilor acestora dintr-o relaxare obișnuită cu valorile coeficienților de suprarelaxare. Folosind (21), respectiv (22), valorile suprarelaxate ale acestora, în ciclul $(k+1)$, vor fi:

$$\overline{\Delta M''^{(k+1)}_{jh,}} = \varepsilon_\alpha \Delta M''^{(k+1)}_{jh,\alpha} = c_{jh,\alpha}\varepsilon_\alpha L^{n(k)}_\alpha = c_{jh,\alpha} L^{d(k)}_\alpha, \tag{40}$$

$$\overline{\Delta M'^{(k+1)}_{jh}} = \varepsilon_j \Delta M'^{(k+1)}_{jh} = \mu_{jh}\varepsilon_j \mathfrak{M}^{n(k)}_j = \mu_{jh}\mathfrak{M}^{d(k)}_j. \tag{41}$$

Se remarcă faptul că $L^{n(k)}_\alpha$, adică lucrul mecanic neechilibrat în gradul de libertate α, se calculează cu semnele momentelor considerate pe nodurile pe care se aplică. Astfel, valoarea neechilibrată inițială se calculează cu expresia

$$L^{n(0)}_\alpha = \Sigma(\mathfrak{M}^0_{jh} + \mathfrak{M}^0_{hj})\theta_{jh,\alpha} - L_{F,\alpha}. \tag{42}$$

Într-un ciclu oarecare (k) valoarea neechilibrată va fi

$$L^{n(k)}_\alpha = \sum_{jh,\alpha}^{(2)} 3(\Delta M'^{(k)}_{jh} + \Delta M'^{(k)}_{jh})\theta_{jh,\alpha} + \sum_{\beta}^{(1)} 2\,\Delta M''^{(k)}_{jh,\beta}\theta_{jh,\alpha}), \tag{43}$$

unde corecțiile $\Delta M'^{(k)}_{jh}$, $\Delta M''^{(k)}_{jh,}$ se vor lua cu valorile lor fără a face distincția că au provenit dintr-o relaxare obișnuită sau dintr-o suprarelaxare.

Valoarea neechilibrată $\mathfrak{M}^n_j$ se determină cu expresia

$$\mathfrak{M}^{n(0)}_j = \sum_{h,j} \mathfrak{M}^0_{jh}, \tag{44}$$

în fază inițială și cu expresia

$$\mathfrak{M}_j^{n(k)} = \sum_{h,\,j} \Delta M_{h,j}^{\prime(k)} + \sum_{\alpha} \Delta M_{jh,\alpha}^{\prime\prime(k)} \tag{45}$$

în ciclurile următoare.

Din valorile neechilibrate se determină valorile de distribuit :

$$L_\alpha^{d(k)} = \varepsilon_\alpha L_\alpha^{n(k)}, \tag{46}$$

$$\mathfrak{M}_j^{d(k)} = \varepsilon_j \mathfrak{M}_j^{n(k)}, \tag{47}$$

după care, cu expresiile (40), (41), se calculează corecțiile corespunzătoare.

Datorită faptului că valorile distribuite sînt diferite de valorile neechilibrate înseamnă că la fiecare suprarelaxare se creează cîte un reziduu :

$$\Delta R_\alpha^{(k)} = L_\alpha^{n(k)} - L_\alpha^{d(k)}, \tag{48}$$

$$\Delta R_j^{(k)} = \mathfrak{M}_j^{n(k)} - \mathfrak{M}_j^{d(k)}, \tag{49}$$

care trebuie introdus la stabilirea valorii neechilibrate a necunoscutei respective în ciclul imediat următor. Deci, la valorile determinate cu formulele (43), (45) trebuie adăugate și reziduurile corespunzătoare necunoscutelor respective, dacă acestea au fost suprarelaxate în ciclul anterior.

Cum aceste reziduuri sînt de semne contrare față de valorile neechilibrate rezultate prin relaxările celorlalte necunoscute, adică față de reziduurile produse de celelalte necunoscute, rezultă că valorile neechilibrate finale în urma unei suprarelaxări sînt mici și deci procesul de iterație necesită un număr redus de cicluri.

Pentru înregistrarea reziduurilor în schema de interație trebuie introdusă cîte o coloană separată pentru fiecare necunoscută ce se suprarelaxează. Modul concret în care se procedează va fi explicat cu claritate în exemplul de calcul prezentat mai jos.

Observații:

1) În mod asemănător ca la iterații cu suprarelaxări asupra rotirilor [9], în procedeul de mai sus al iterațiilor cu suprarelaxări asupra momentelor se pot folosi coeficienți de suprarelaxare rezultați din valorile ce intervin în ciclul de iterație. Astfel dacă valoarea distribuită a unei necunoscute j la ciclul k este $\Delta Y_j^{(k)}$ și reziduul acumulat la ea prin relaxările celorlalte necunoscute $\Delta R_j^{(k)}$ rezultă un coeficient de suprarelaxare sub forma

$$\varepsilon_j^{(k)} = \frac{1}{1 - \dfrac{\Delta R_j^{(k)}}{\Delta Y_j^{(k)}}}. \tag{50}$$

2. Folosind expresia (50) la sistemele cu un singur grad de libertate se poate stabili valoarea exactă a coeficientului de suprarelaxare al gradului de libertate în felul următor :

— se introduc momentele de încastrare perfectă din gradul de libertate și se face echilibrarea completă a nodurilor pe cadrul cu noduri fixe. Valoarea totală a momentelor de încastrare perfectă introduse se notează cu L_{tr},

— se evaluează lucrul mecanic al momentelor apărute prin relaxarea nodurilor în gradul de libertate respectiv. Valoarea acestuia se notează cu L_r.

— coeficientul de suprarelaxare va fi

$$\varepsilon = \frac{1}{1 - L_r/L_{tr}}. \tag{51}$$

Prin utilizarea coeficientului dat de (51), calculul unui cadru cu un singur grad de libertate cu sarcini numai la noduri se reduce la un calcul de cadru cu noduri fixe, deoarece prin suprarelaxarea exactă a gradului de libertate, valoarea neechilibrată în ciclul imediat următor devine nulă.

4. EXEMPLU DE CALCUL

Se consideră cadrul etajat cu dimensiunile și elementele elastice trecute pe figura 5 *a*, pentru care se cere determinarea diagramei de momente din forțele orizontale aplicate în nodurile 1 și 3.

Cadrul comportă în metoda deplasărilor 6 necunoscute ; 4 rotiri de noduri și două grade de libertate notate cu Z_5 și Z_6 (fig. 5 *b*). Rigiditățile ρ sînt trecute pe fiecare bară în figura 5, *b*.

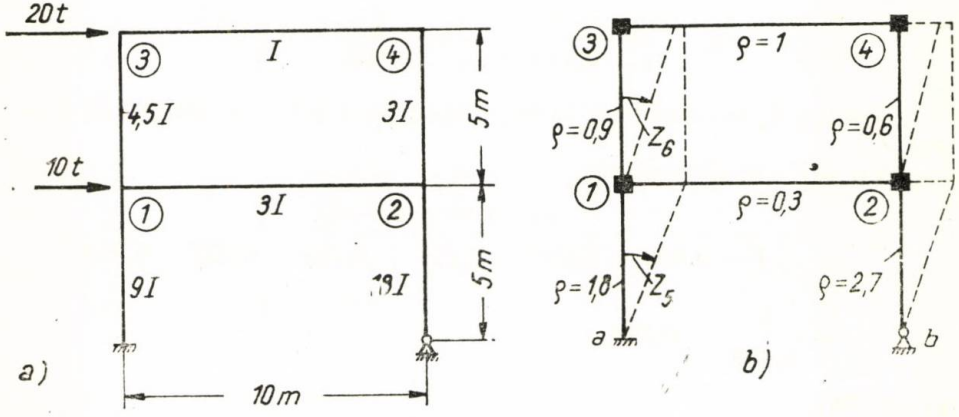


Fig. 5

Succesiunea calculului este următoarea :

— se determină coeficienţii de distribuţie parţială în jurul nodurilor cu formula (5), trecuţi direct pe figura 6, în dreptunghiuri la capetele barelor respective şi a coeficienţilor de repartiţie la relaxarea barelor cu formula (10) :

$$c_{1a} = 1_{1a,5} = -\frac{1}{2}\,\frac{1{,}8}{1{,}8+\frac{1}{3}\,2{,}7} = -\,0{,}333,$$

$$c_{2b} = c_{2b,5} = -\frac{1}{3}\,\frac{2{,}7}{1{,}8+\frac{1}{3}\,2{,}7} = -\,0{,}333,$$

$$c_{13} = c_{13,6} = -\frac{1}{2}\,\frac{0{,}9}{0{,}9+0{,}6} = -\,0{,}3,$$

$$c_{24} = c_{24,6} = -\frac{1}{2}\,\frac{0{,}6}{1{,}5} = -\,0{,}2,$$

trecuţi în semicercuri la mijlocul fiecărei bare (fig. 6);

— se calculează coeficienţii de suprarelaxare ai gradelor de libertate.

Pentru Z_5 se consideră în bloc nodurile 1,2 şi gradul de libertate Z_6. Cu formula (37′) se determină

$$\gamma_{5,b} = -\frac{-0{,}333-0{,}333}{+2+0{,}050+0{,}042-0{,}3-0{,}2} = \frac{0{,}667}{1{,}592} = 0{,}419$$

şi cu (38),

$$\gamma_{b,5} = -\,3(-\,0{,}3) - 2(-\,0{,}375) = 1{,}65.$$

Aplicînd (36), rezultă

$$\varepsilon_5 = \frac{1}{1-0{,}419\cdot 1{,}65} = \frac{1}{0{,}309} = 3{,}24.$$

Pentru Z_6 se consideră în bloc nodurile 1,2,3,4, şi gradul de libertate Z_5.

Cu (37′) se determină

$$\gamma_{6,b} = -\frac{2(-0{,}3)+2(-0{,}2)}{4+0{,}092+0{,}600+0{,}121+0{,}512-0{,}333-0{,}333} =$$

$$= \frac{1}{4{,}659} = 0{,}214,$$

iar cu (38)

$$\gamma_{b,6} = -\,3(-0{,}6-0{,}512) = 3{,}336,$$

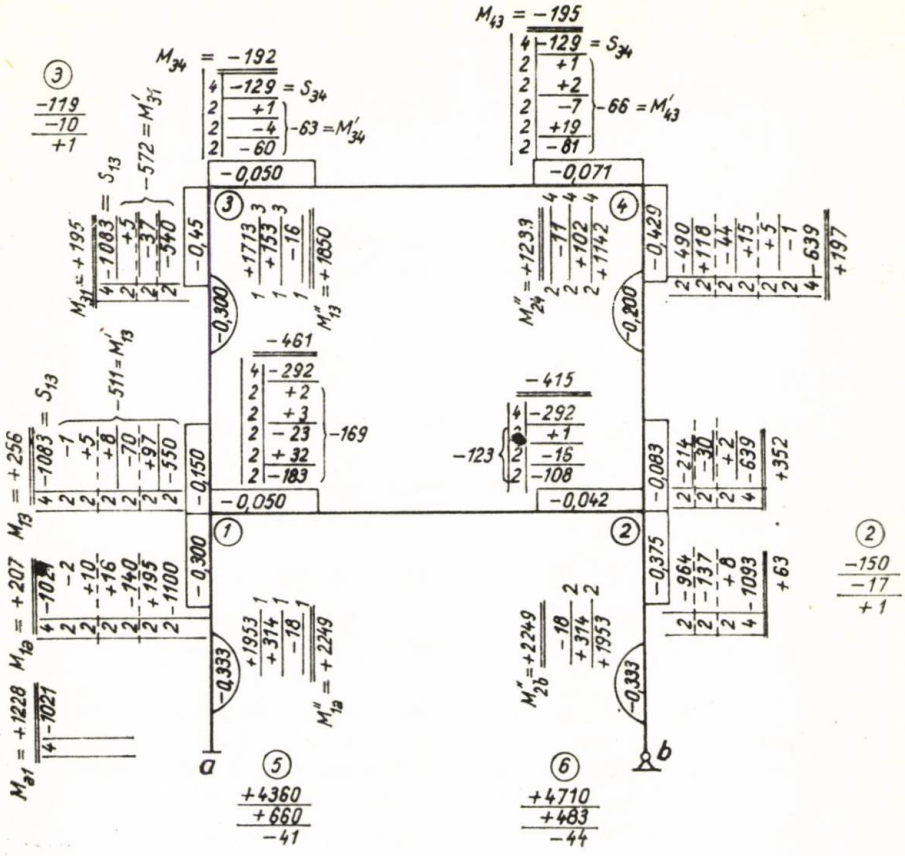


Fig. 6

și apoi cu (36)

$$\varepsilon_6 = \frac{1}{1 - 0{,}214 \cdot 3{,}336} = \frac{1}{0{,}285} = 3{,}51.$$

— Coeficienții de transmitere indirectă între gradele de libertate Z_5, Z_6 se obțin prin aplicarea formulelor (39):

$$\gamma_{56} = -\frac{-0{,}333 - 0{,}333}{-5{,}325} \cdot 3(-0{,}6 - 0{,}512) = 0{,}417,$$

$$\gamma_{65} = -\frac{2(-0{,}3) + 2(-0{,}2)}{-5{,}325} 3[(-0{,}3) + 2(-0{,}375)] = 0{,}31,$$

$$\left(\sum_{\nu} \sum_{\lambda} \gamma_{\nu\lambda} = -4 - 0{,}121 - 0{,}092 - 0{,}512 - 0{,}6 = -5{,}325\right).$$

— Se determină cu formula (42) lucrurile mecanice neechilibrate în gradele de libertate Z_5 și Z_6:

$$L_5^{n(0)} = -(10 + 20) \cdot 50 = -1\,500 \text{ tf dm},$$

$$L_6^{n(0)} = -20 \cdot 50 \qquad = -1\,000 \text{ tf dm}.$$

Pentru obținerea valorilor de distribuit se face o transmitere concomitentă între aceste grade de libertate cu ajutorul coeficienților γ_{56} și γ_{65}, după care se aplică formula (46):

$$L_5^{d(1)} = (L_5^{n(0)} + L_6^{n(0)} \cdot \gamma_{65})\varepsilon_5 = -(1\,500 + 1\,000 \cdot 0{,}31)\,3{,}24 = -5\,860,$$

$$L_6^{d(1)} = (L_6^{n(0)} + L_5^{n(0)} \gamma_{56}) \cdot \varepsilon_6 = -(1\,000 + 1\,500 \cdot 0{,}417)\,3{,}51 = -5710.$$

Aceste valori se repartizează barelor cu coeficienții $C_{jh,5}$, respectiv $C_{jh,6}$ în conformitate cu formula (40). Rezultă valorile:

$$\Delta M_{1a,5}^{\prime\prime(1)} = C_{1a} L_5^{d(1)} = -0{,}333\,(-5\,860) = 1953,$$

$$\Delta M_{2b,5}^{\prime\prime(2)} = C_{2b} L_5^{d(1)} = -0{,}333\,(-5\,860) = 1953,$$

care se trec la mijlocul fiecăreia dintre bare. Pe o coloană separată (fig. 6) notată cu ⑤ se trece reziduul, dat de (48) $\Delta R_5^{(1)} = -1\,500 - (-5\,860) = 4\,360$ care se ia considerație la stabilirea ulterioară a lucrului mecanic neechilibrat în gradul Z_5.

Se procedează la fel pentru gradul de libertate Z_6:

$$\Delta M_{13,6}^{\prime\prime(1)} = C_{13} L_6^{d(1)} = -0{,}3\,(-5\,710) = 1\,773,$$

$$\Delta M_{24,6}^{\prime\prime(1)} = C_{24} L_6^{d(1)} = -0{,}2\,(-5\,710) = 1\,142.$$

Pe o coloană notată cu ⑥ se determină reziduul

$$\Delta R_6^{(1)} = -1\,500 - (-5\,710) = 4\,710 \quad \text{(fig. 6)}.$$

— Se trece acum la echilibrarea nodurilor. Se folosește în acest scop o formă de bază complexă având blocate numai nodurile ② și ③. Coeficienții de suprarelaxare ai acestor necunoscute se determină cu (33), ținîndu-se seama numai de legăturile lor cu nodurile ① și ④. Astfel;

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{1 - 0{,}05 \cdot 0{,}042 - 0{,}083 \cdot 0{,}429} = \frac{1}{0{,}9623} = 1{,}04,$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{1 - 0{,}45 \cdot 0{,}15 - 0 \cdot 05 \cdot 0{,}071} = \frac{1}{0{,}929} = 1{,}078.$$

Coeficienții de transmitere între aceste necunoscute ținînd seama de legăturile lor cu nodurile ① și ④ se determină cu expresiile

$$\gamma_{23}^{*} = \mu_{23}^{*} = \varepsilon_2 (\mu_{24}\mu_{43} + \mu_{21}\mu_{13}) = 1{,}04\ (0{,}083 \cdot 0{,}071 + 0{,}042 \cdot 0{,}150) =$$

$$= 0{,}0127,$$

$$\gamma_{32}^{*} = \mu_{32}^{*} = \varepsilon_3(\mu_{34}\mu_{42} + \mu_{31}\mu_{12}) = 1{,}078\ (0{,}050 \cdot 0{,}429 + 0{,}45 \cdot 0{,}050) =$$

$$= 0{,}0472,$$

obținute din (31) prin multiplicare cu coeficienții de suprarelaxare calculați cu (33).

Se relaxează mai întîi nodurile ① și ④.

Nodul ①. Momentul neechilibrat determinat cu (45) este $\mathfrak{M}_1^{n(1)} = 1953 + 1713 = 3666$ se distribuie barelor din nod cu formula (4): $\Delta M_{1a}'^{(1)} = 3666 \cdot (-0{,}300) = -1\,100$; $\Delta M_{12}'^{(1)} = 3666\ (-0{,}050) = -183$; $\Delta M_{13}'^{(1)} = 3\,666\ (-0{,}150) = -550$. Toate acestea se trec în faza 2 la capetele barelor respective (fig. 6).

Nodul ④. Se procedează identic ca la nodul ① $\mathfrak{M}_4^{n(1)} = 1\,142$ se distribuie parțial în: $\Delta M_{43}'^{(1)} = 1\,142\ (-0{,}071) = -81$; $\Delta M_{42}'^{(1)} = 1\,142\ (-0{,}429) = -490$, care se trece în faza 2 la capetele respective ale barelor din nodul 4.

Suprarelaxarea nodului ②. Momentul neechilibrat, determinat cu (45), este: $\mathfrak{M}_2^{n(1)} = 1953 + 1142 - 183 - 490 = 2\,422$ (După valorile 1953 și 1 142 se trage cîte o linie și în dreptul ei se scrie cifra 2 pentru a ști că au fost considerate la echilibrul nodului 2, iar după — 183 și —490 numai cîte o linie deoarece aceste valori sînt momente neechilibrate numai la nodul 2).

Se multiplică $\mathfrak{M}_2^{n(1)}$ cu ε_2 și la valoarea obținută se adaugă valoarea rezultată din transmiterea dela nodul 3. ($\mathfrak{M}_3^{n(1)} \cdot \gamma_{32}^{*} = 1082 \cdot 0{,}0472 = 51$). Rezultă momentul $\mathfrak{M}_2^{d(1)} = 2\,422 \cdot 1{,}04 + 51 = 2\,572$ care se distribuie parțial barelor din nodul respectiv cu formula (41):

$\overline{\Delta M}_{21}'^{(1)} = 2\,572\ (-0{,}042) = -108$; $\overline{\Delta M}_{24}'^{(1)} = 2\,572\ (-0{,}083) = -214$; $\overline{\Delta M}_{26}'^{(1)} = 2572\ (-0{,}375) = -964$. Separat de schema cadrului (fig. 6) se notează nodul ② și se scrie reziduu (formula (49): $\Delta R_2^{(1)} = 2\,422 - 2\,572 = -150$ care se introduce la stabilirea ulterioară a momentului neechilibrat din nodul 2.

Suprarelaxarea nodului ③. Procedînd ca la nodul ② se determină $\mathfrak{M}_3^{d(1)} = \mathfrak{M}_3^{n(1)}\varepsilon_3 + \mathfrak{M}_2^{d(1)}\gamma_{23}^{*} = 1\,082 \cdot 1{,}078 + 2\,572 \cdot 0{,}0127 = 1\,201$ care se distribuie parțial, cu (41): $\Delta M_{31}'^{(1)} = 1\,201\ (-0{,}45) = -540$; $\Delta M_{34}'^{(1)} = 1\,201\ (-0{,}050) = -60$. Pe o coloană separată notată cu ③ se trece reziduu (49): $+1\,082 - 1\,201 = -119$.

Se echilibrează din nou nodurile 1 și 4.

Momentul neechilibrat din nodul 1: $-540 - 108 = -648$ se distribuie parțial barelor din nod (După valorile respective, în sensul de dezvoltare al coloanei respective, se trage cîte o linie pentru a indica faptul că au fost considerate la echilibrarea nodului).

Momentul neechilibrat din nodul 4 : $-60-214=-274$ se distribuie în mod asemănător.

În acest fel se încheie primul ciclu de iteraţie, avînd, datorită suprarelaxărilor efectuate, toate nodurile în echilibru :

— se trece la ciclul al doilea, începînd, de asemenea, cu relaxarea barelor ;

— se calculează pentru fiecare grad de libertate, lucrul mecanic neechilibrat ţinînd seama şi de reziduurile de la suprarelaxările anterioare :

$$\Delta L_5^{n(2)} = 4\,360 + 3\,(-905) + 2\,(-964) = 4\,360 - 4\,643 = -283,$$

$$\Delta L_6^{n(2)} = 4\,710 + 3\,(-453 - 540 - 372 - 214) = 4\,710 - 4\,737 = -27.$$

După valorile introduse la $\Delta L_5^{n(2)}$ şi $\Delta L_6^{n(2)}$ se trag linii punctate pentru a marca faptul că au fost considerate la relaxarea gradelor de libertate şi să nu mai fie introduse la relaxările de bare ulterioare (fig. 6).

Procedînd ca la primul ciclu valorile ce urmează a fi distribuite se calculează ţinînd seama şi de o transmitere concomitentă între gradele de libertate. Astfel :

$$\Delta L_5^{d(2)} = (\Delta L_5^{n(2)} + \Delta L_6^{n(2)} \cdot \gamma_{65})\,\varepsilon_5 = -(283 + 27 \cdot 0{,}31)\,3{,}24 = -943,$$

$$\Delta L_6^{d(2)} = (\Delta L_6^{n(2)} + \Delta L_5^{n(2)} \cdot \gamma_{56})\,\varepsilon_6 = -(27 + 283 \cdot 0{,}417)\,3,\,51 = -510.$$

Aceste valori se repartizează cu formula (40),

$$\Delta M_{1a}''^{(2)} = -943\,(-0{,}333) = 314 = \Delta M_{2b}''^{(2)},$$

$$\Delta M_{13}''^{(2)} = -510\,(-0{,}3) = 153\,;\ \Delta M_{24}''^{(2)} = -510\,(-0{,}2) = 102.$$

Reziduul $\Delta L_5^{n(2)} - \Delta L_5^{d(2)} = -283 - (-943) = 660$ se trece pe coloana separată ⑤, iar $\Delta L_6^{n(2)} - \Delta L_6^{d(2)} = -27 + 510 = 483$ pe coloana separată ⑥.

— Se efectuează echilibrarea nodurilor în ordinea 1,4, 2,3,1,4 procedînd la fel ca la primul ciclu de iteraţie. După această etapă care încheie ciclul doi nodurile sînt în echilibru, iar în gradele de libertate rămîn neechilibrate valorile :

$$\Delta L_5^{n(3)} = 660 + 3\,(-124) + 2\,(-137) = 660 - 646 = +14,$$

$$\Delta L_6^{n(3)} = 483 + 3\,(-62 - 37 - 30 - 29) = 483 - 474 = +9,$$

care fiind mici procesul iterativ poate fi considerat încheiat. Pe figura 6, însă, s-a mai efectuat un ciclu de iteraţie, identic cu celelalte două, la sfîrşitul căruia lucrurile mecanice neechilibrate au devenit $\Delta L_5^n = -1$; $\Delta L_6^n = +1$.

— După încheierea iteraţiilor, se determină suma momentelor în fază 2, de la fiecare capăt de bară, apoi suma acestora pentru fiecare bară

(12) care se trece în fază 4, la fiecare capăt. Aplicînd apoi formulele (13), (13′) se obțin momentele finale :

$$M_{34} = \mathfrak{M}^0_{34} + M'_{34} + S_{34} + M''_{34} = 0 - 63 - 129 + 0 = -192,$$

$$M_{31} = \mathfrak{M}^0_{31} + M'_{34} + S_{31} + M''_{31} = 0 - 572 - 1083 + 1850 = 195 \text{ etc.}$$

calculate direct pe schema din figura 6.

Diagrama de momente încovoietoare este reprezentată în figura 7.

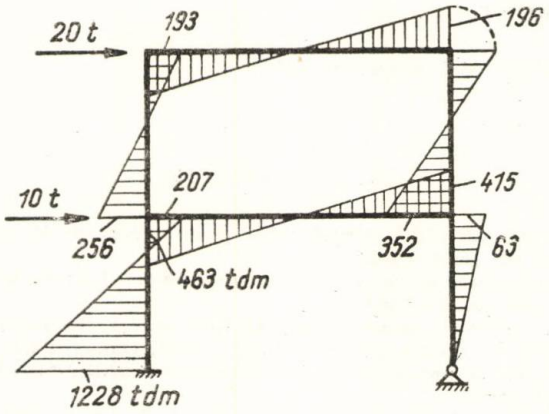


Fig. 7

R e m a r c ă : Cadrul analizat este rezolvat în lucrarea [7] folosind cîte 3 tipuri de relaxări. Al treilea tip de relaxare a fost ales special să corespundă acestei structuri cu stîlpi mult mai rigizi decît riglele. În alte cazuri cu rigle mai puternice, eficiența acestui de-al treilea tip de relaxare, care necesită calcule suplimentare și complică schema de iterație, este mult mai redusă în ceea ce privește rapiditatea de convergență. Cu toate acestea, în cadrul procedeului respectiv, au fost necesare 7 cicluri complete de iterații, față de numai 3 în cadrul procedeului propus prin utilizarea suprarelaxărilor. De altfel în cadrul procedeului de suprarelaxări propus calculul se putea opri după al doilea ciclu de iterație cînd neglijarea lucrurilor mecanice neechilibrate de +9 și +14 ar fi reprezentat o eroare de sub 1%.

Rezolvînd acest cadru numai prin relaxări de noduri și de bare fără suprarelaxări au fost necesare 17 cicluri complete. Rezultă deci convingător avantajul deosebit al suprarelaxărilor privind mărirea rapidității de convergență.

5. CONCLUZII

1. Metoda iterațiilor cu suprarelaxări asupra momentelor fiind o particularizare directă a iterațiilor cu suprarelaxări asupra rotirilor [9] înseamnă că prezintă în întregime avantajele scoase în evidență în [9], atît în ceea ce privește folosirea ei în cadrul mijloacelor clasice de calcul cît și în cazul folosirii calculatoarelor automate.

Ţinînd seama că în proiectare sînt mai răspîndite procedeele de iteraţie asupra momentelor rezultă că metoda dezvoltată în această lucrare va putea conduce la o îmbunătăţire substanţială a calculului structurilor.

2. În domeniul stabilităţii sistemelor, datorită dificultăţii de rezolvare a ecuaţiei de stabilitate, se aplică din ce în ce mai mult procedee de aproximaţii succesive. Întrucît rapiditatea de convergenţă a iteraţiilor este mult mai scăzută în cazul stabilităţii decît în cazul calculului static, rezultă că folosirea suprarelaxărilor în calculele de stabilitate constituie un domeniu nou, ce va putea avea o largă utilizare în viitor. De asemenea metoda suprarelaxărilor va putea fi utilizată cu succes şi la calculul dinamic al structurilor.

Primită la redacţie la 2 septembrie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. P. Csonka, *Une contribution à la simplification de la methode de H. Cross*, La technique moderne de construction, *3* (1952).
2. Massimo Freda, *Un procedimento di rapida convergenza per il calcolo dei telai a nodi spostabili*, Il cemento, *10* (1966).
3. Alex. Gheorghiu, *Statica construcţiilor*, vol. II, Edit tehnică, Bucureşti , 1965.
4. G. Kani, *Les calcul des partiques etagés multiples*, Edit. Dunod, Paris, 1957.
5. Eimar Keintzel, *Metode simplificate pentru calculul construcţiilor multietajate*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1969.
6. P. Mazilu, *Statica construcţiilor*, vol. II. Edit. tehnică, Bucureşti, 1959.
7. E. Oswald, *Momentenausgleichverfahren bei schlektenconvergenzverhältnissen*, Bautechnik, *2* (1957).
8. N. Posea, *Die Berechnung von Rahmen mit verschiebbaren Knoten unter Verwendung von überrelaxationsvorgängen*, Buletin ISPE, *4* (1968).
9. N. Posea, *Baza teoretică a calculului structurilor prin iteraţii cu suprarelaxări*, St. cerc. mec. apl., *6* (1972).
10. Ping-Chun-Wang, *Metode numerice şi matriceale în mecanica construcţiilor*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1970.
11. M. G. Salvadori, M. L. Baron, *Metode numerice în tehnică*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1972.

O METODĂ PRACTICĂ PENTRU REZOLVAREA PROBLEMEI CONTACTULUI ÎN CAZUL GRINZILOR DE LUNGIME MEDIE ŞI A GRINZILOR PEREŢI REZEMATE PE MEDIUL LINIAR DEFORMABIL

de M. DIACONU
Institutul politehnic Iaşi

În lucrare se prezintă o metodă practică pentru rezolvarea grinzilor de lungime medie $\left(2 \leqslant \lambda = \frac{L}{H} \leqslant 5\right)$ şi a grinzilor pereţi ($\lambda < 2$) rezemate pe un mediu continuu liniar deformabil (ex. terenul de fundare).
Pe baza unei analize detaliate, se arată că în exprimarea condiţiei de contact dintre grindă şi mediul de rezemare, deplasările punctelor situate pe latura rezemată a grinzilor înalte ($\lambda < 5$) se pot determina, cu suficientă exactitate, folosind metodele rezistenţei materialelor, dacă se ia în considerare influenţa deformaţiei produsă atît de momentul încovoietor, cît şi de forţa tăietoare.
Plecînd de la această concluzie, autorul obţine relaţii generalizate, care permit să se rezolve problema contactului pentru orice tip de grindă rezemată pe un mediu liniar deformabil. Cazul grinzilor lungi ($\lambda > 5$) rezultă ca un caz particular cînd se neglijează influenţa deformaţiei produsă de forţa tăietoare. Se prezintă un exemplu numeric şi se trag concluzii referitor la influenţa deosebită pe care o are luarea în considerare a deformaţiei produsă de forţa tăietoare asupra valorilor şi distribuţiei reacţiunilor mediului de rezemare.

1. CONSIDERAŢII GENERALE

Dacă ne referim la cazul conlucrării dintre construcţie şi terenul de fundare, se poate constata că multe construcţii sau elemente ale construcţiilor inginereşti rezemate pe teren sau pe oricare alt mediu cu rigiditate finită, pot fi considerate, în calculul lor, *grinzi rezemate pe un mediu deformabil.*

Noi folosim denumirea de *grinzi pe mediu deformabil*, pe care o apreciem ca fiind mai corectă decît cea de *grinzi pe mediu elastic*, deoarece terenul de fundare, care reprezintă mediul de rezemare cel mai des întîlnit în practică, nu poate fi considerat ca un mediu perfect elastic, omogen şi izotrop în adevăratul înţeles al cuvîntului, ci doar cel mult poate fi schematizat, în calcul, ca un mediu liniar sau neliniar deformabil.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 32, NR. 1, 1973, P. 195–229

Scopul calculului ingineresc referitor la grinzile rezemate pe mediu deformabil (teren, zidărie, piloţi etc.) se reduce, de fapt, la determinarea stării de tensiune şi deformaţie în cele două corpuri cu caracteristici mecanice diferite care vin în contact unul cu altul — grinda şi mediul de rezemare — ţinînd seama de conlucrarea efectivă dintre ele, pentru a stabili cele mai raţionale metode de dimensionare şi verificare a rezistenţei, rigidităţii şi stabilităţii lor.

Unul dintre factorii principali care influenţează atît conlucrarea, cît şi starea de tensiune sau deformaţie a unei grinzi rezemate pe mediu deformabil şi care a fost mai puţin analizat pînă în prezent, este desigur raportul dimensiunilor sale geometrice $\left(\lambda = \frac{L}{H}, L -\right.$ lungimea grinzii, $H -$ înălţimea grinzii$\left.\right)$.

În funcţie de valoarea acestui raport — aşa cum se va arăta în continuare — grinzile ar putea fi clasificate în : *grinzi lungi* ($\lambda > 5$), *grinzi de lungime medie* ($2 \leqslant \lambda \leqslant 5$) *şi grinzi pereţi* ($\lambda < 2$).

Literatura de specialitate analizează cu mult lux de amănunte problema grinzilor lungi rezemate pe mediu elastic, dar nu a elucidat în aceeaşi măsură, *problema grinzilor de lungime medie şi a grinzilor pereţi rezemate pe mediu deformabil*, de care ne vom ocupa în acest articol, la a căror schemă de calcul pot fi reduse diafragmele de rigidizare longitudinale şi transversale ale construcţiilor, pereţii portanţi de zidărie, infrastructura casetată a construcţiilor înalte, construcţiile hidrotehnice, panourile mari etc., care se întîlnesc tot mai frecvent ca elemente ale suprastructurii şi infrastructurii construcţiilor.

Calculul exact al unui element de rezistenţă de acest gen este mult mai dificil decît în cazul grinzilor obişnuite, deoarece sîntem în faţa unei probleme de contact în cadrul teoriei elasticităţii şi de aceea în lucrările sau revistele de specialitate se găsesc mai puţine referiri la rezolvarea lor.

Importanţa şi complexitatea *cercetării stării de tensiune şi deformaţie în grinzile înalte* ($\lambda < 5$) *rezemate pe mediu deformabil* este subliniată de mulţi cercetători [12], [16], iar lipsa unei soluţionări teoretice corespunzătoare a făcut ca în cazul unor construcţii de importanţă deosebită, elementele bidimensionale ale infrastructurilor ce intrau în categoria grinzilor înalte să fie dimensionate şi verificate numai pe cale experimentală [13], [14].

2. PUNEREA PROBLEMEI

În rezolvarea grinzilor de lungime medie şi a grinzilor pereţi rezemate pe mediu deformabil, ca şi în cazul grinzilor obişnuite, trebuie să se plece de la ideea de bază a conlucrării grinzii cu mediul de rezemare. Astfel, între grindă şi teren există o acţiune reciprocă, evidenţiată prin existenţa presiunilor transmise de grindă asupra terenului de fundare, egale şi de sens contrar cu reacţiunile terenului asupra grinzii (fig. 6, 7 şi 8).

Admiţînd şi ipoteza că se poate neglija componenta reacţiunii situată în planul de rezemare [7], iar componenta reacţiunii normală pe

planul de rezemare este uniform distribuită în sensul grosimii grinzii — ipoteză justificată în cazul elementelor bidimensionale — ajungem la concluzia că *reacțiunea mediului de rezemare* $p(x)$, care de fapt condiționează determinarea stării de tensiune și deformație atît în grindă, cît și în mediu, fiind *funcția static nedeterminată a problemei noastre*, depinde numai de variabila x.

Pentru determinarea legii de repartizare a presiunilor $p(x)$ pe suprafața de contact dintre grindă și mediu, vom ține seama de existența conlucrării, în condițiile de exploatare, care se poate exprima astfel: deplasarea după verticală $w(x,y)$ a suprafeței mediului de rezemare (terenul de fundare) sub acțiunea lui $p(x)$ este egală cu componenta deplasării după verticală $v(x, y)$ a laturii inferioare a grinzii sub acțiunea forțelor exterioare date $\overline{p}(x)$ și a reacțiunii mediului $p(x)$:

$$w(x, y)_{y=0} = v(x, y)_{y=0}. \tag{1}$$

Apelînd și la condițiile de echilibru ale grinzii:

$$\Sigma V = 0, \tag{2}$$

$$\Sigma M = 0, \tag{3}$$

vom obține sistemul de ecuații care ne va conduce la determinarea lui $p(x)$.

Deplasările după verticală ale mediului de rezemare $w(x, y)$ vor fi exprimate în funcție de *modelul de calcul* adoptat pentru aproximarea comportării terenului de fundare.

Deplasările după verticală ale punctelor situate pe latura de rezemare a grinzii propriu-zise $v(x, y)$, depind de raportul dintre dimensiunile acesteia $\left(\lambda = \frac{L}{H}\right)$. Astfel, *în cazul grinzilor lungi* ($\lambda > 5$) se consideră că este valabilă ipoteza secțiunilor plane și deci vom putea folosi pentru calculul deplasărilor metodele cunoscute din rezistența materialelor, ținîndu-se în considerare numai influența deformației produsă de momentul încovoietor M. Deplasările axei grinzii coincid cu deplasările laturii inferioare unde se face rezemarea. În cadrul acestei ipoteze sînt efectuate, aproape în exclusivitate, rezolvările prezentate în literatura de specialitate pentru grinzile rezemate pe un mediu care lucrează în condițiile modelului winklerian cît și a semispațiului elastic.

În cazul grinzilor înalte ($\lambda < 5$), soluționarea problemei este mai dificilă, deoarece ipotezele rezistenței materialelor nu-și mai păstrează valabilitatea și atît starea de tensiune, cît și starea de deformație trebuie analizate cu ajutorul metodelor teoriei elasticității.

Dacă determinarea deplasărilor grinzilor cu $\lambda < 5$ se face cu destulă greutate — pe calea exactă — chiar atunci cînd reazemele sînt punctuale, rigide, încărcarea distribuită și condițiile de contur sînt puse în tensiuni (prima problemă fundamentală a elasticității), cu atît mai preg-

nant ies în evidență dificultățile ce inerent se ivesc în calea unei rezolvări practice a grinzilor mai sus amintite, cînd sarcinile exterioare sînt forțe și momente concentrate, cînd este vorba de o *problemă mixtă a elasticității* și condițiile de contur trebuie să fie puse pe latura de rezemare în deplasări și într-o manieră aparte : deplasările nu sînt nule și nici nu au valori cunoscute, cum e cazul unei laturi încastrate, ci sînt egale cu deplasările mediului de rezemare produse de presiunea necunoscută $p(x)$.

În lucrarea noastră [4] este prezentată rezolvarea acestei probleme cu ajutorul teoriei elasticității, folosind metode aproximative și numerice : metoda variațională, metoda rețelelor și metoda aproximării condițiilor de contur prin puncte. Totuși apreciem că deși calculul grinzilor cu $\lambda < 5$ rezemate pe mediu deformabil folosind metodele teoriei elasticității este posibil, el rămîne încă destul de greoi și nu va putea fi utilizat decît în cazurile cînd importanța deosebită a construcției o impune.

Folosirea metodelor teoriei elasticității ne evidențiază însă faptul că dificultățile cele mai mari apar la constituirea sistemului de ecuații algebrice rezultat din exprimarea condiției de contact (1), deoarece determinarea deplasărilor după verticală v a punctelor situate pe latura inferioară a grinzii, pe calea obișnuită din teoria elasticității, este laborioasă.

De aceea, căutînd să ținem seama și de cerințele proiectării curente care reclamă metode cu un calcul cît mai sistematizat și apropiat unei intuiri clare a fenomenului fizic, metode bazate pe un aparataj matematic ușor de programat la mașinile electronice, ne-am propus să analizăm problema dacă exprimarea condiției de contact și respectiv determinarea deplasărilor punctelor situate pe latura rezemată a grinzii, nu poate fi făcută cu metode mai simple, utilizînd raționamentele rezistenței materialelor și luînd în considerare unii factori a căror influență se neglijează în calculul obișnuit, reușindu-se astfel să se rezolve grinzile înalte rezemate pe mediu deformabil în două etape de calcul distincte și anume :

— etapa I : determinarea reacțiunilor mediului de rezemare ;

— etapa II : determinarea stării de tensiune în grinda propriu-zisă.

3. FUNDAMENTAREA TEORETICĂ A UNEI REZOLVĂRI PRACTICE A PROBLEMEI PUSE

Întrucît, așa cum s-a arătat, în cazul grinzilor înalte este pusă sub semnul întrebării posibilitatea folosirii metodelor rezistenței materialelor, s-a făcut o comparație detaliată, pe bază de date numerice, între rezultatele obținute cu ajutorul metodelor teoriei elasticității și cu ajutorul metodelor din rezistența materialelor [4], [16]. Comparația s-a referit la eforturi unitare și îndeosebi la valorile deplasărilor pe verticală, pentru grinzi cu diverse moduri de rezemare și încărcare, avînd diverse valori ale raportului între dimensiuni $\lambda(\lambda = 10, 5{,}4{,}3{,}2{,}1.75, 1.50, 1.00$ și $0.50)$ și ale coeficientului lui Poisson $[\mu = 0.00$, $\mu = 0.167$ (beton), $\mu = 0{,}30$ (oțel) și $\mu_{max} = 0.50)$. O parte din datele obținute sînt prezentate centralizat în tabela 1 și o serie de concluzii legate de problema care ne interesează vor fi subliniate în cele ce urmează.

3.1. Ţinînd seama de comportarea lor sub sarcină, *în funcţie de raportul laturilor (λ), grinzile, în mod convenţional, s-ar putea clasifica în trei categorii*:

a) *grinzi lungi* ($\lambda > 5$);

b) *grinzi de lungime medie* ($2 \leqslant \lambda \leqslant 5$);

c) *grinzi pereţi* ($\lambda < 2$).

Această clasificare este confirmată şi de alţi autori [2], [16].

3.2. *În cazul grinzilor lungi, $\lambda > 5$, calculul deplasărilor fibrei medii poate fi efectuat*, în general, *cu metodele rezistenţei materialelor, luîndu-se în considerare numai influenţa deformaţiei produsă de momentul încovoietor M.* Eroarea pe care o facem, neglijînd influenţa deformaţiei produsă de forţa tăietoare este sub 5% pentru grinzile încastrate la un capăt şi atinge valoarea maximă, în jur de 10%, în cazul grinzilor simplu rezemate.

Atunci cînd se ia în considerare şi influenţa deformaţiei produsă de forţa tăietoare T, valorile deplasărilor calculate cu metodele rezistenţei materialelor sînt confirmate excelent de rezultatele obţinute cu metodele teoriei elasticităţii. Eroarea este în general sub 1%.

3.3. *În cazul grinzilor de lungime medie* $2 \leqslant \lambda \leqslant 5$ se constată că mărimea deplasărilor după verticală ale fibrei medii deformate este puternic influenţată de deformaţia produsă de forţă tăietoare T. În funcţie de modul de încărcare şi rezemare, deplasarea maximă produsă de forţa tăietoare f_T reprezintă un procent din valoarea deplasării maxime produsă de momentul încovoietor f_M, care variază în limite foarte mari. Astfel, pentru $\lambda = 2$ acest procent variază de la 17,50% (grinda încastrată la un capăt şi acţionată de o forţă concentrată la capătul liber) pînă la 78% (grinda simplu rezemată acţionată de o forţă concentrată la mijloc).

Dacă raportăm săgeata maximă produsă de forţa tăietoare f_T la săgeata maximă totală f_R, determinată prin luarea în considerare a influenţei lui M şi T obţinem procentaje care variază între 3 ... 11% cînd $\lambda = 5$ şi 15 ... 43,80% cînd $\lambda = 2$.

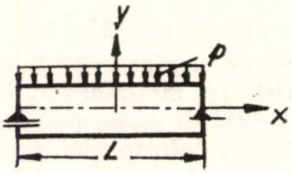
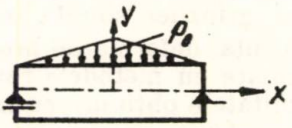
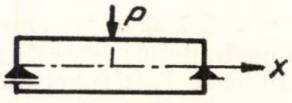
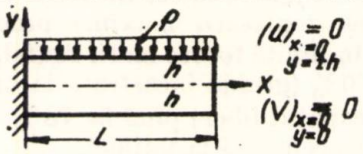
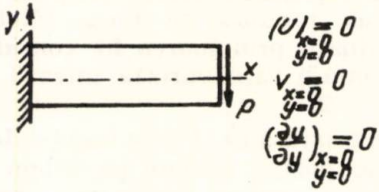
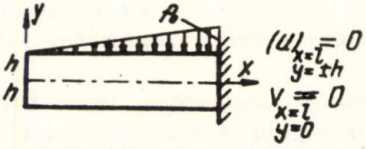
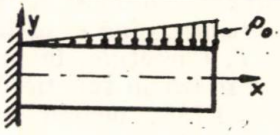
În general, influenţa deformaţiei produsă de T este funcţie de modul de rezemare, tipul de încărcare şi chiar poziţia sarcinii pe grindă. Astfel, la grinzile încastrate la un capăt, se constată o majorare a influenţei forţei tăietoare asupra deplasărilor pe verticală ale fibrei medii, atunci cînd sarcinile concentrate sau rezultanta sarcinii repartizate sînt mai aproape de secţiunea din încastrare.

Rezultatele obţinute cu metodele teoriei elasticităţii, luînd funcţia de tensiune atît sub forma polinoamelor algebrice biarmonice, cît şi sub forma seriilor trigonometrice, *confirmă rezultatele obţinute cu metodele rezistenţei materialelor referitor la starea de deformaţie, cînd se ia în considerare deformaţia produsă atît de M cît şi de T.* Corecţiile, în procente, pentru grinda cu secţiunea dreptunghiulară, variază în funcţie de rezemare şi încărcare între limitele 0,42% ... 2,78% pentru $\lambda = 5$ şi 1,92% ... 6,80% pentru $\lambda = 2$.

În concluzie, *pentru calculul deplasărilor după verticală ale fibrei medii deformate, la grinzile de lungime medie, se pot folosi metodele rezistenţei materialelor, cu condiţia de a se lua în considerare influenţa deformaţiei produsă atît de momentul încovoietor, cît şi de forţa tăietoare.*

Tabe

Săgeți maxime calculate cu metodele rezis

Nº	Schema de încărcare	μ	f_T/f_M %				
			$\lambda=10$	$\lambda=5$	$\lambda=2$	$\lambda=1$	$\lambda=0.50$
1		0,167 0.30	2,00 3.00	9.00 10.00	56.00 63.00	224 250	898 1 000
2		0,167 0.30	2.30 2.60	9.30 10.40	58.30 65.00	233 260	933 1 040
3		0.167 0,30	2.80 3.12	11.20 12.45	70.00 78.00	280 312	1 120 1 245
4		0.167 0,30	0,93 1.08	3.73 4.74	25.70 27.10	93.40 108.20	373 434
5		0.167 0.30	0.70 0.80	2.80 3.20	17.50 19.50	70.00 78.00	280 300
6		0.167 0.30	1.17 1.30	4.67 5.20	29.20 32.50	116.00 130.00	467 520
7		0,167 0.30	0,85 0.94	3.40 3.78	21.20 23.60	85.00 94.00	340 378

Notații: – f_T, săgeata maximă produsă de forța tăietoare; – f_M, săgeata maximă produsă de momentul încovoietor;
– f_R, săgeata maximă totală produsă de M și T calculată cu metodele Rezistenței Materialelor (R.M.).
– f, săgeata maximă totală calculată cu metodele Teoriei Elasticității (T.E.).
– f_E, corecția adusă rezultatelor obținute cu metodele R.M. atunci cînd se folosesc metode ale T.E. (funcția de tensiune = polinom biarmonic).

la 1

tenței materialelor și teoriei elasticității

f_T/f_R %					$(f-f_R)/f_R = f_E/f_R$ %				
λ=10	λ=5	λ=2	λ=1	λ = 0,50	λ = 10	λ = 5	λ = 2	λ = 1	λ = 0,.50
2.00	8.00	36.00	69.00	90.00	−0.11	−0.42	− 1,92	−3.38	− 4.83
2.00	9.00	39.00	72.00	91.00	−0.21	−0.78	− 3.32	− 6,18	− 7.86
2.25	8.50	36.90	70.00	90.20	−0.12	−0.50	−3.20	−13.10	−61.50
2.53	9.43	39.40	72.20	91.20		−0.87	−4,97	−17.70	−65.60
2.72	10.10	41.20	73.70	92.00	+0.68	2.52	10.30	18.40	22.90
3.03	11.10	43.80	75.60	92.60	+0.75	2.78	10.98	18.90	23.90
0.93	3.60	20.40	48.00	78.80	−0.21	−0.83	− 4.39	−11.20	−18.30
1.08	4.17	21.30	52.00	81.20	−0.17	−0.67	− 3.50	− 8.67	−13.70
0.69	2.72	14.90	41,10	73.70	0.17	0.68	3.73	10.30	18.40
0.79	3.09	16.30	43,80	75.60	9.19	0.75	4.07	10.95	18.90
1.15	4.46	22.50	53,80	82.40	−0.34	−1.32	− 645	−10.40	+14.10
1.28	4.95	24.50	56.50	84.40	−0.24	−0.97	− 4.16	− 4.54	+ 8.30
0.85	3.29	17.50	46.00	77.00					
0.94	3.63	19.10	48.00	79.00					

Totodată, aşa cum a rezultat din exemplele analizate prin metode ale teoriei elasticităţii [16], [4] şi deplasările după verticală ale fibrelor situate pe latura inferioară a acestor grinzi — deplasări care ne interesează în exprimarea condiţiei de contact în calculul grinzilor pe mediu deformabil — sînt aproximativ egale cu deplasările axei deformate. Astfel, *la grinzile încastrate la un capăt, care, de fapt, vor constitui sistemul de bază utilizat de către noi în rezolvarea grinzilor rezemate pe mediu deformabil, paralelismul dintre fibrele situate în stratul neutru şi cele situate pe latura inferioară este aproape perfect.*

3.4. *În cazul grinzilor pereţi* ($\lambda < 2$), analiza stării de tensiune şi a stării de deformaţie trebuie făcută cu ajutorul metodelor teoriei elasticităţii, utilizîndu-se instrumente de calcul mai puternice decît cele elementare (polinoame biarmonice). Totuşi, se poate întîmpla, după cum arăta şi P. P. Teodorescu [16], ca rezultatele obţinute pe căi mai elementare ale teoriei elasticităţii şi în anumite cazuri chiar rezultatele obţinute prin metodele rezistenţei materialelor, să fie suficient de bune, dar acest lucru trebuie verificat de la caz la caz prin metode mai exacte şi nu poate fi afirmat aprioric.

De aceea vom prezenta şi concluziile ce se pot trage *extinzînd orientativ* metodele rezistenţei materialelor şi metodele elementare ale teoriei elasticităţii la determinarea deplasărilor grinzilor pereţi. Din tabela 1 se constată că diferenţa de comportare apare deosebit de vizibilă, atît sub aspect calitativ, cît şi cantitativ, atunci cînd se trece de la grinzile de lungime medie la *grinzile pereţi de înălţime finită* ($1 \leqslant \lambda < 2$) *sau de la grinzile pereţi de înălţime finită la grinzile pereţi de înălţime semiinfinită* ($\lambda < 1$). Astfel, în mărimea deplasărilor după verticală ale punctelor situate la mijlocul înălţimii (noţiunea de fibră medie ar fi complet convenţională aici) calculate cu metodele rezistenţei materialelor, influenţa deformaţiei produsă de T devine preponderentă în comparaţie cu influenţa deformaţiei produsă de M.

Pentru grinzile de înălţime finită, cînd $\lambda = 1$, valoarea deplasării maxime produsă de T variază, în funcţie de schema grinzii, între 41% (grinda încastrată la un capăt şi acţionată de o forţă concentrată la capătul liber) şi 75% din săgeata totală (grinda simplu rezemată acţionată de o sarcină concentrată la mijlocul deschiderii). Pentru grinzile de înălţime semiinfinită cu $\lambda = 0.50$, deplasarea produsă de M devine neglijabilă faţă de cea produsă de T, raportul f_T/f_R variind între limitele 73% ... ...95%. Se poate spune că rigiditatea grinzilor cu $\lambda < 1$ este proporţională cu aria secţiunii. Rezultatele obţinute prin metodele elementare ale teoriei elasticităţii arată că pentru grinzile cu $1 \leqslant \lambda < 2$, *corecţia referitor la săgeata maximă, atunci cînd este vorba de grinzi încastrate la un capăt sau de grinda simplu rezemată acţionată de sarcina uniform distribuită, este în general sub 10% din valoarea săgeţii obţinută în rezistenţa materialelor* ($M + T$). La grinda simplu rezemată, acţionată de o forţă concentrată la mijlocul deschiderii sau sarcină triunghiulară cu intensitatea maximă la mijlocul deschiderii, corecţia dată de metoda polinoamelor ajunge pînă la 18% pentru punctele situate în axa grinzii. Dacă ne referim la *punctele situate pe latura inferioară a grinzii* şi se ia în considerare faptul că la grinda simplu rezemată, atunci cînd punctele de rezemare se află pe latura inferioară, săgeata maximă este ceva mai mare

decît în cazul rezemării punctuale în centrele de greutate ale secțiunilor de capăt (așa cum au fost stabilite procentajele de mai sus), rezultă că și în acest caz *diferența dintre rezultatele obținute cu ajutorul rezistenței materialelor și teoriei ealsticității este sub 10%*.

Rezultatele de mai sus sînt confirmate și de datele obținute cu ajutorul unor metode mai riguroase ale teoriei elasticității.

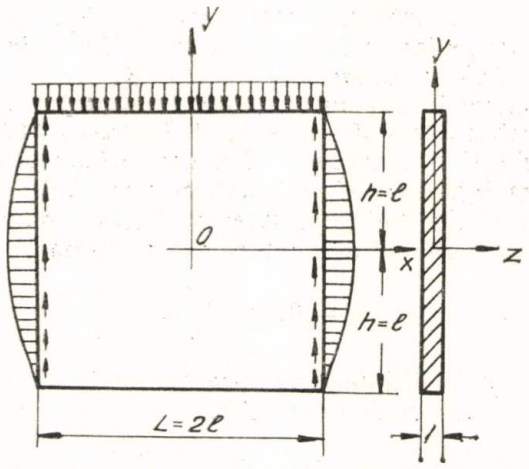


Fig. 1. — Grinda perete pătrată acționată de sarcină uniform distribuită

Astfel, P. P. Teodorescu [15] analizînd starea de tensiune și deformație cu ajutorul metodei de punere a condiției de contur în puncte, pentru o grindă perete patrată acționată pe latura superioară de o sarcină uniform distribuită (fig. 1), ajunge la concluzia că deplasarea maximă după verticală f a punctelor situate pe axa orizontală a grinzii are valoarea $f = 0.983\frac{pl}{E}$, foarte apropiată de cea determinată cu ajutorul metodei polinoamelor $f' = 0.975\frac{pl}{E}$ sau cu ajutorul metodelor din rezistența materialelor $f_R = 1.012\frac{pl}{E}$. În calcule s-a considerat $\mu = 0{,}167$ (beton).

Pentru oțel ($\mu = 0.30$) se obține

$$f = 1.030\,\frac{pl}{E},\quad f' = 1.025\,\frac{pl}{E},\quad f_R = 1{,}092\,\frac{pl}{E}. \tag{4}$$

Trebuie însă ținut seama și de faptul că în calculul grinzilor rezemate pe teren ne interesează deplasările punctelor situate pe latura inferioară, care în acest caz nu vor fi egale cu deplasările punctelor situate pe axa orizontală a grinzii. Într-adevăr, punctele situate pe latura superioară unde se aplică sarcina (fig. 2) vor avea deplasări mai mari, iar cele situate pe latura inferioară, mai mici decît deplasările fibrei medii. Astfel, pentru această grindă deplasarea maximă după verticală a punctelor de pe latura

inferioară este cu circa 25% mai mică decît deplasarea maximă a fibrei medii. Dar cînd rezemarea grinzii perete se face pe latura inferioară — așa cum este situația la noi — deplasarea după verticală a punctelor de pe această latură se mărește cu circa 19% [16].

Deci, *și în cazul grinzilor pereți de înălțime finită ($1 \leqslant \lambda < 2$) simplu rezemate, deplasările verticale ale axei orizontale determinate cu metodele rezistenței materialelor cînd se ia în considerare și influența deformației produsă de forța tăietoare, sînt aproximativ egale cu deplasările după verticală ale punctelor situate pe latura inferioară a grinzii calculate cu ajutorul metodelor teoriei elasticității. Eroarea este sub 10%.*

Această concluzie este întărită de rezultatele obținute de M. P. Varvak [17] — subliniate și de către S. N. Klepikov [10] — care, folosind metoda diferențelor finite, stabilește că pentru *grinda perete patrată simplu rezemată pe latura inferioară și acționată de o sarcină uniform repartizată pe latura superioară* (fig. 2 *a*) deplasarea verticală a punctului *i*, situat pe latura inferioară la mijlocul deschiderii are valoarea

$$v_i = 0.495 \frac{pL}{E}, \tag{5}$$

deci cu circa 10% mai mică decît săgeata maximă care se obține cu metodele rezistenței materialelor ($\mu = 0.30$):

$$f_R = f_M + f_T = (0.156 + 0.390) \frac{pL}{E} = 0.546 \frac{pL}{E}. \tag{6}$$

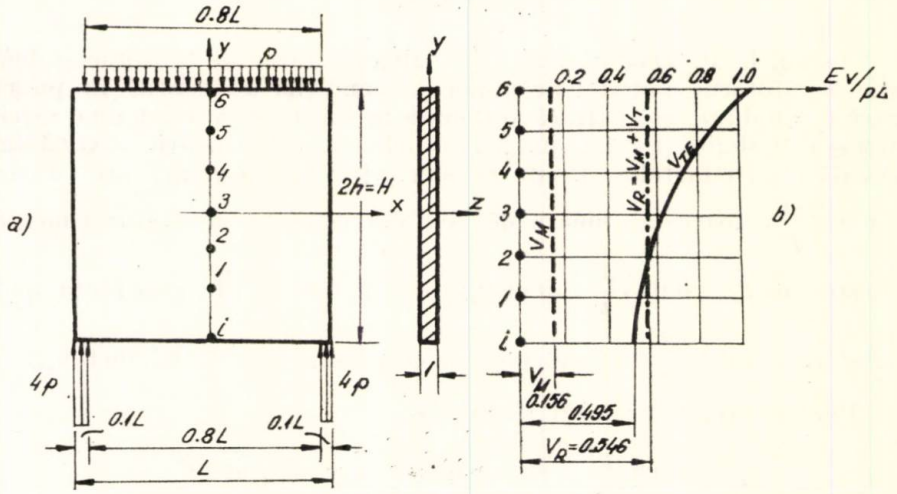


Fig. 2. — *a*) Grinda perete ($\lambda = 1$) simplu rezemată acționată de sarcină uniform distribuită; b) Deplasările după verticală ale punctelor situate pe axa de simetrie

În cazul unei sarcini concentrate aplicate la mijlocul laturii superioare (fig. 3 *a*) deplasarea verticală a aceluiași punct *i* situat la mijlocul laturii inferioare, determinată cu metoda diferențelor finite [18]

$$v_i = 0.907 \frac{P}{E}, \tag{7}$$

este tot cu circa 10% mai mică decît săgeata maximă a fibrei medii calculată cu metodele rezistenței materialelor ($\mu = 0.30$):

$$f_R = f_M + f_T = (0.25 + 0.78)\frac{P}{E} = 1.03\,\frac{P}{E}. \tag{8}$$

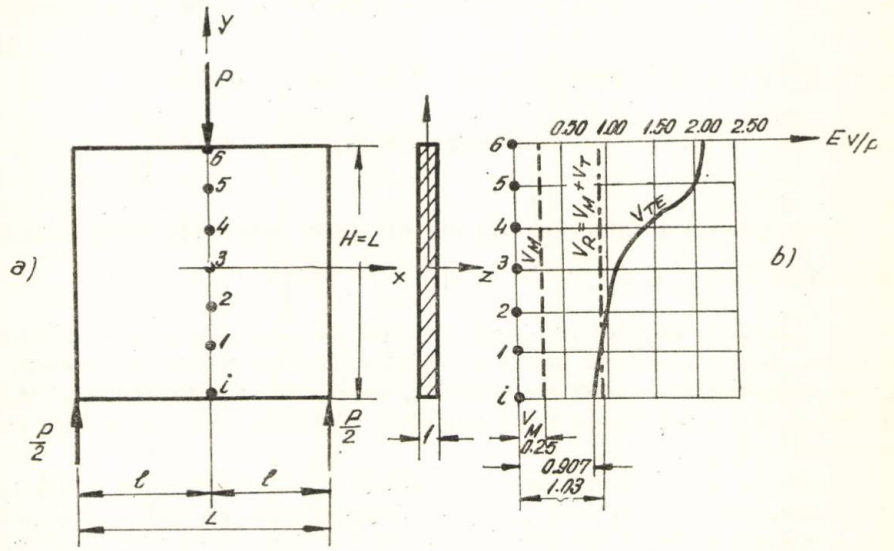


Fig. 3. — *a*) Grinda perete ($\lambda = 1$) simplu rezemată acționată de o forță concentrată; *b*) Deplasările după verticală ale punctelor situate pe axa de simetrie

O imagine grafică a deplasărilor verticale ale punctelor situate pe axa de simetrie verticală a grinzii, determinate cu metodele teoriei elasticității (linia plină), cu metodele rezistenței materialelor cînd se ține seama de deformația produsă de M și T (dreapta cu linie-punct) sau cînd se ia în considerare numai deformația produsă de M (linia întreruptă), este prezentată pentru grinda perete acționată de sarcina uniform repartizată (fig. 2*b*) și pentru grinda perete pătrată acționat de o sarcină concentrată (fig. 3*b*). Se observă că în cazul acestor grinzi pereți, cînd sarcina acționează pe latura superioară, deplasările pe verticală a punctelor situate în jumătatea inferioară a grinzii, determinate prin metodele teoriei elasticității, oscilează în jurul valorii deplasărilor verticale determinate cu metodele rezistenței materialelor, cînd se ia în considerare deformația produsă de M și T.

În ce privește *grinda perete în consolă* (fig. 4) acționată pe latura superioară de sarcină uniform distribuită cu intensitatea p, deplasarea după verticală a punctului i situat în colțul liber inferior, determinată cu metoda diferențelor finite [18], [10], are valoarea

$$\begin{aligned} &\text{— pentru grinda perete patrată cu } \lambda = 1 : v_i = 3.12\,\frac{pL}{E}, \\ &\text{— pentru grinda perete cu } \lambda = 0.75 : \quad v_i = 1.75\,\frac{pL}{E}. \end{aligned} \tag{9}$$

Săgeata maximă a grinzii calculată cu metodele rezistenţei materialelor luînd în considerare deformaţia produsă de M şi T, are valoarea ($\mu = 0.167$)

$$\begin{aligned} &\text{— pentru grinda perete cu } \lambda = 1: f_R = f_M + f_T = \\ &\qquad = (1.50 + 1.40)\frac{pL}{E} = 2.90\,\frac{pL}{E}, \\ &\text{— pentru grinda perete cu } \lambda = 0.75: f_R = f_M + f_T = \\ &\qquad = (0.632 + 1.05)\frac{pL}{E} = 1.68\,\frac{pL}{E}. \end{aligned} \tag{10}$$

Deci, diferenţa între rezultatele obţinute prin cele două metode este de circa 7,05% şi respectiv 4% $\left(\frac{v_i - f_R}{v_i}\,100\right)$.

În concluzie, deplasările după verticală ale punctelor situate pe latura inferioară, pentru o grindă perete de înălţime finită, pot fi determinate cu ajutorul metodelor rezistenţei materialelor, dacă se ia în considerare şi influenţa deformaţiei produsă de forţa tăietoare. Aproximaţia ce se face este, în general, sub 10%.

Pentru *grinzile de înălţime semiinfinită* ($\lambda < 1$), deşi în cazul analizat eroarea este tot sub 10%, totuşi, deoarece nu au fost studiate mai multe exemple pe calea exactă, considerăm deocamdată că numai *într-o primă aproximaţie* putem calcula deplasările punctelor situate pe latura inferioară tot cu ajutorul metodelor elementare.

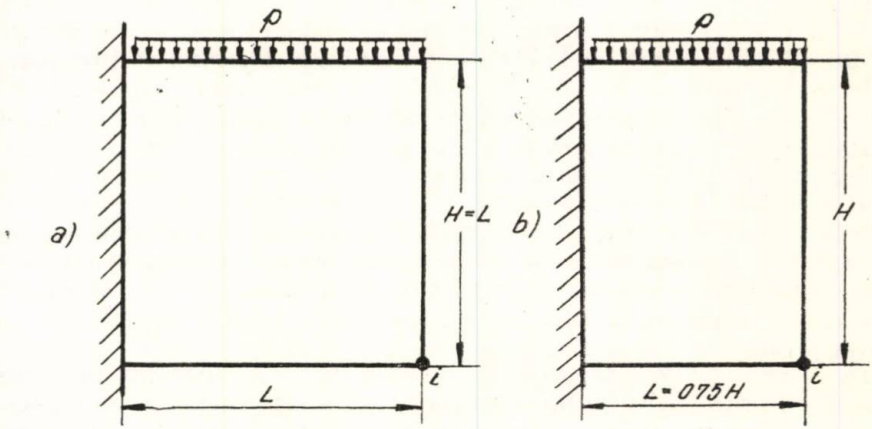


Fig. 4. — *a*) Grinda perete în consolă cu $\lambda = 1$. ($v_i = 3{,}12\ pL/E$); *b*) Grinda perete în consolă cu $\lambda = 0.75$($v_i = 1.75\ pL/E$).

Facem observaţia că toată analiza noastră s-a referit numai la grinzile simplu rezemate sau încastrate la un capăt, deoarece pentru rezolvarea grinzilor pe mediu deformabil, sistemul static determinat de bază pe care vom scrie condiţia de contact (fig. 9) este posibil să fie luat sub

aceste forme (noi vom folosi numai grinda încastrată la un capăt, care ne va conduce la simplificări în rezolvare şi pentru care, de fapt, cu mai multă certitudine se pot aplica toate concluziile acestui capitol).

Pe baza celor arătate mai sus considerăm că se poate simplifica într-o măsură apreciabilă calculul grinzilor înalte ($\lambda < 5$) rezemate pe mediu deformabil, sistematizîndu-se în două etape distincte, fără interferenţa calculelor.

Etapa I: determinarea reacţiunilor mediului de rezemare, folosind în exprimarea condiţiei de contact, deplasările punctelor situate pe latura rezemată a grinzii, calculate cu metodele rezistenţei materialelor, luînd în considerare deformaţia produsă de M şi T.

Etapa a II-a: determinarea stării de tensiune în grinda propriu-zisă acţionată de sarcinile exterioare date şi reacţiunile mediului de rezemare determinate în prima etapă de calcul, folosind metodele teoriei elasticităţii.

4. ETAPA I: DETERMINAREA REACŢIUNILOR ÎN IPOTEZA MEDIULUI DE REZEMARE, CONTINUU, LINIAR DEFORMABIL

Deşi tasarea terenului nu dispare complet după îndepărtarea sarcinii care a produs-o, totuşi s-a constatat că ea este aproximativ proporţională cu sarcina, existînd posibilitatea păstrării legii lui Hooke *la încărcare*, atît timp cît eforturile (presiunile) nu depăşesc anumite limite. De aceea *modelul de calcul* pentru terenul de fundare poate fi luat sub forma semispaţiului liniar deformabil şi în calculul deplasărilor se pot folosi metodele teoriei liniare a elasticităţii, înlocuindu-se modulul de elasticitate E din teoria corpurilor elastice, cu *modulul de deformaţie liniară* E_0, la determinarea căruia sînt luate în considerare atît deformaţiile elastice, cît şi cele remanente sub placa de încercare. De fapt, E_0 şi coeficientul lui Poisson μ_0 sînt caracteristicile mecanice cu ajutorul cărora pot fi prinse, în calcul, abaterile proprietăţilor pămîntului faţă de proprietăţile corpurilor ideal elastice.

Grinda de lungime medie şi grinda perete rezemată pe mediu liniar deformabil este un element de construcţie caracterizat printr-o stare plană de tensiune sau stare plană de deformaţie (fîşia cu lăţime unitară).

În funcţie de *condiţiile în care lucrează mediul de rezemare*, în practică se întîlnesc următoarele situaţii de care ne vom ocupa:

a) *grinda şi mediul de rezemare lucrează în condiţiile stării plane de tensiune (fig. 6a) sau a stării plane de deformaţie* (fig. 7*b*), cînd deplasările după verticală ale suprafeţei mediului, sub acţiunea lui $p(x)$, se determină plecînd de la relaţia stabilită de Flamant pentru semiplanul elastic (fig. 5)

$$w(r) = \frac{2P}{\pi b E_0} \ln \left| \frac{d}{r} \right| \tag{11}$$

Cînd mediul lucrează în condiţiile stării plane de deformaţie, se înlocuieşte E_0 prin $E_0/1-\mu_0^2$;

b) *grinda lucrează în condițiile stării plane de tensiune, iar mediul de rezemare în condițiile semispațiului liniar deformabil* (fig. 8), cînd tasările punctelor situate în planul ce delimitează semispațiul, sub acțiunea

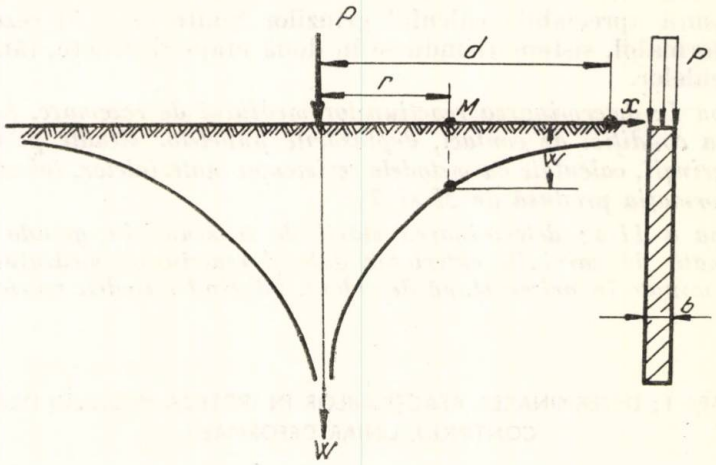


Fig. 5. — Deplasările w ale semiplanului elastic acționat de o forță concentrată pe linia de separație

presiunii $p\ (x)$ se determină plecînd de la relația stabilită de Boussinesq :

$$w(r) = \frac{1 - \mu_0^2}{\pi E_0 r} P. \tag{12}$$

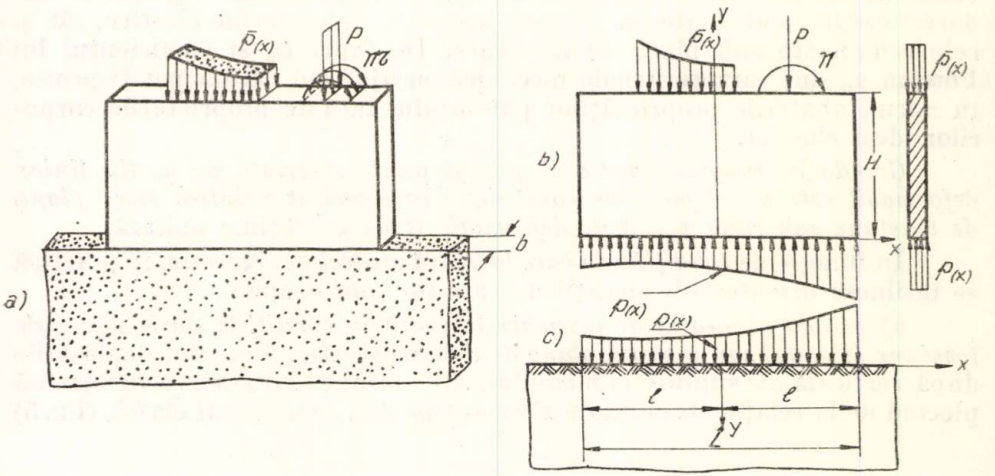


Fig. 6. — *a*) Grinda și mediul lucrează în condițiile stării plane de tensiune ; *b*) Schema de calcul pentru grindă ; *c*) Schema de calcul pentru mediul de rezemare

S-au folosit notațiile :

P — forța concentrată ce acționează semiplanul pe linia de separație sau semispațiul pe suprafața de separație ;

r — distanța de la punctul de aplicație al forței P pînă la un punct oarecare M, unde se calculează deplasarea w;

d — o distanță arbitrară, exprimată ca și r în unități de lungime (de la punctul de aplicație al forței P pînă la un punct în raport cu care

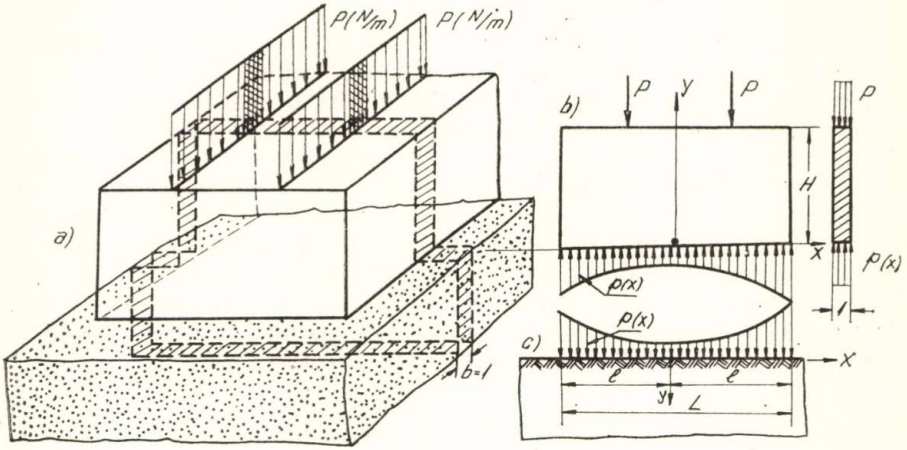


Fig. 7. — *a*) Grinda și mediul lucrează în condițiile stării plane de deformație; *b*) Schema de calcul pentru grindă; *c*) Schema de calcul pentru mediul de rezemare

se măsoară diferența deplasărilor w în cazul problemei plane, cînd nu pot fi determinate deplasările absolute).

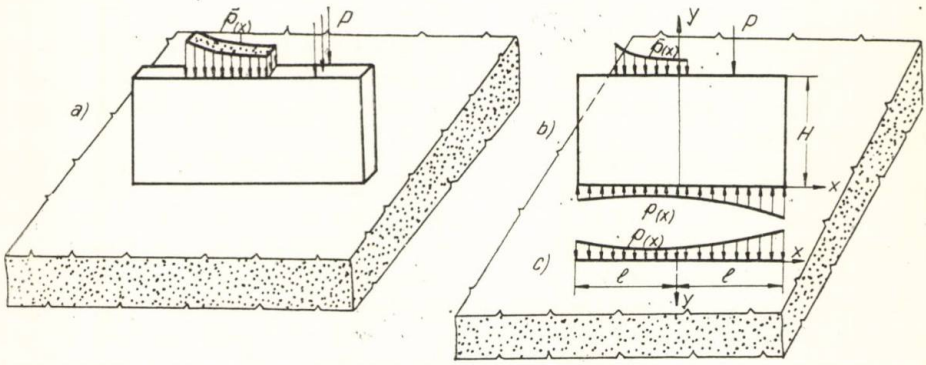


Fig. 8. — *a*) Grinda lucrează în condițiile stării plane de tensiune iar mediul de rezemare în condițiile semispațiului liniar deformabil; *b*) Schema de calcul pentru grindă; *c*) Schema de calcul pentru mediul de rezemare

4.1. DETERMINAREA REACȚIUNILOR MEDIULUI PRIN METODA PUNERII CONDIȚIILOR DE CONTACT ÎNTR-UN NUMĂR FINIT DE PUNCTE

Pentru determinarea reacțiunilor mediului de rezemare ne vom folosi de condiția de contact (1).

Deplasările după verticală v a punctelor situate pe latura de rezemare a grinzilor acționate de forțele exterioare $\overline{p}(x)$ și reacțiunile mediului

$p(x)$, se vor determina luînd în considerare deformaţia produsă atît de M, cît şi de T şi vom utiliza ecuaţia diferenţială

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} v(x) = -\frac{M(x)}{EI_z} - \frac{\overline{p}(x) - p(x)}{GA'}, \tag{13}$$

Deplasările după verticală w ale suprafeţei mediului de rezemare sub acţiunea presiunilor p (x) se vor determina extinzînd relaţiile (11) sau (12). Introducînd pe w în locul lui v în (13), conform condiţiei (1), se ajunge la o ecuaţie integro-diferenţială specifică problemei plane sau spaţiale, a cărei integrare exactă prezintă mari dificultăţi. De aceea, analizînd critic metodele practice, aproximative, utilizate în calculul grinzilor lungi rezemate pe mediu elastic, am ajuns la concluzia că problema determinării reacţiunii mediului de rezemare în cazul grinzilor înalte ($\lambda < 5$) se poate soluţiona folosind *metoda punerii condiţiei de contact într-un număr finit de puncte, sub forma variantei sale pe care o vom denumi procedeul sistemelor static nedeterminate, cu luarea în considerare a deformaţiei grinzii produsă de momentul încovoietor şi forţa tăietoare.*

4.1.1. Principiul metodei

În cadrul acestei metode, *din punct de vedere fizic*, se consideră că între grindă şi mediul de rezemare există contact numai într-un număr finit de puncte, numărul acestora fiind funcţie de exactitatea dorită.

Exprimarea condiţiei de contact în aceste puncte

$$v_i = w_i, \; i = 1,2, \ldots, n. \tag{14}$$

simplifică rezolvarea problemei noastre referitor la determinarea reacţiunilor mediului de rezemare, deoarece *matematic* se înlocuieşte integrarea unei ecuaţii integro-diferenţiale cu rezolvarea unui sistem de ecuaţii algebrice liniare.

Sistematizarea calculului se va face ca şi în cazul cunoscut al grinzilor lungi [8], [9], cu luarea în considerare, bineînţeles, a *particularităţilor rezultate din faptul că este vorba de grinzi înalte ($\lambda < 5$), cînd trebuie să se ţină seama şi de influenţa deformaţiei produsă de forţa tăietoare.*

Diagrama reacţiunilor mediului asupra grinzii este mărginită de o linie curbă, dar din punct de vedere practic este suficient să se determine anumite ordonate ale ei p'_0, p'_1, p'_2, ..., p'_n, pe care, unindu-le prin drepte, obţinem linia frîntă reprezentată pe figura 9*b*. Astfel, necunoscutele probleme ar fi intensităţile reacţiunilor în punctele 0,1,2, ..., n.

Totuşi, în scopul reducerii volumului de calcul, păstrînd practic aceeaşi exactitate, aşa cum se procedează de multe ori în calculele aproximative, se poate înlocui diagrama reacţiunilor cu una în trepte, considerîndu-se intensitatea acestora constantă în limitele unor intervale oricît de mici dorim (fig. 9*c*). Astfel, necunoscutele vor fi intensităţile reacţiunii mediului liniar deformabil pe cele n intervale (p_1, p_2, ..., p_n).

Considerîndu-se contactul numai la mijlocul acestor intervale, pentru sistematizarea calculului şi o intuire clară, se consideră că legătura între grindă şi mediul de rezemare este materializată sub forma unor bare absolut rigide, legate prin articulaţii de grindă şi teren. Pendulul orizontal

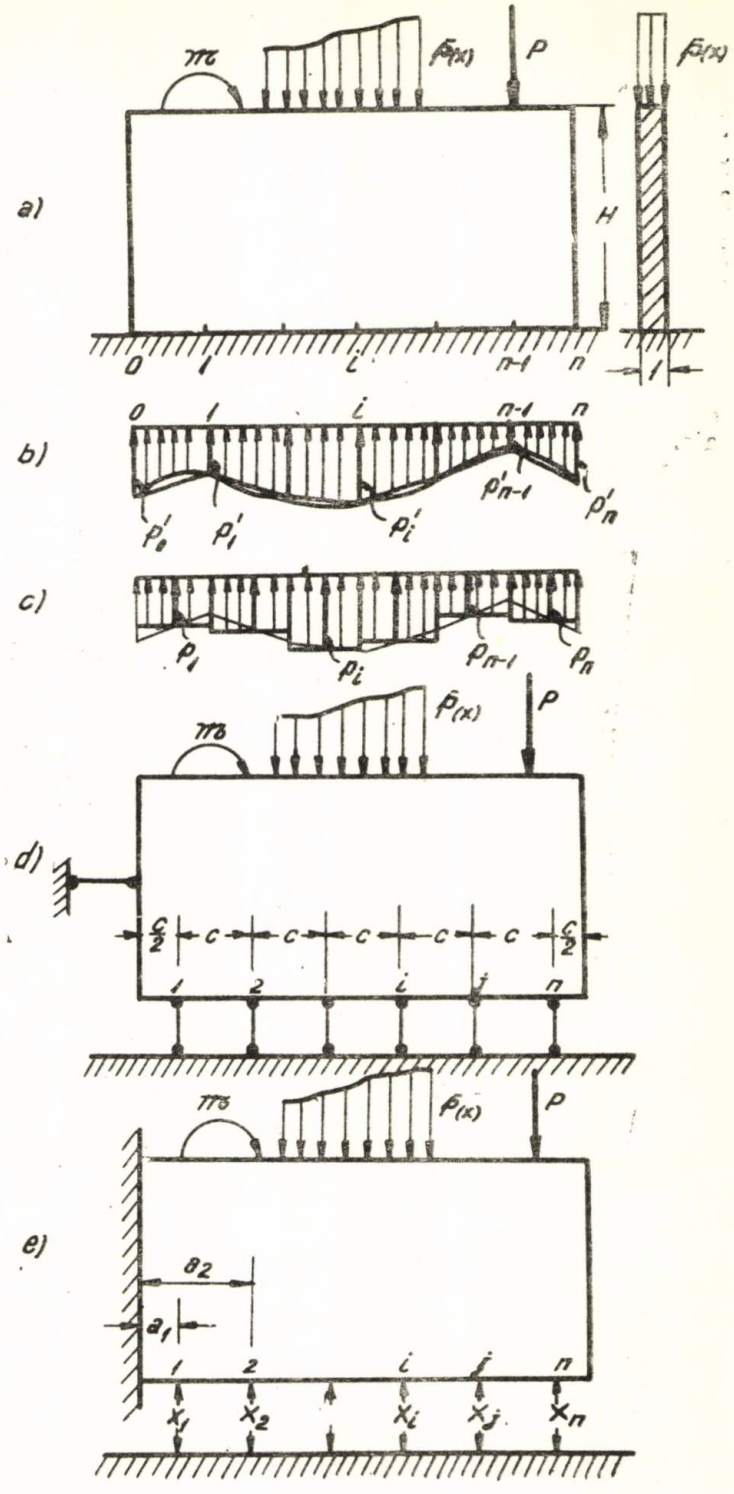


Fig. 9. — *a*) Grinda rezemată pe mediu liniar deformabil; *b*) Reacţiunile mediului; *c*) Diagrama în trepte a reacţiunilor; *d*) Schema de calcul; *e*) Sistemul de bază în metoda mixtă

s-a pus pentru a împiedica deplasarea sistemului în direcţie orizontală, dar nu joacă nici un rol în continuare. Forţele reactive concentrate $X_1, X_2, \ldots, X_n$ corespunzătoare acestor reazeme izolate, care reprezintă rezultantele reacţiunilor distribuite uniform pe intervalele $d_1, d_2, \ldots, d_n$ în care s-a divizat suprafaţa de rezemare, devin astfel necunoscutele principale, legate de intensitatea reacţiunii prin relaţiile :

— în problema plană ($b = 1$) : $X_i = p_i d_i \quad (i = 1,2, \ldots, n)$, (15)

— în problema spaţială : $X_i = p_i b d_i \quad (i = 1,2, \ldots, n)$. (16)

În acest mod, problema s-a redus la rezolvarea unui sistem static nedeterminat obişnuit, necunoscutele fiind reacţiunile din barele verticale, pentru determinarea cărora putem folosi oricare dintre metodele cunoscute în statică : metoda forţelor, metoda deplasărilor sau metoda mixtă.

În general, *metoda mixtă* ne conduce la cele mai mari simplificări în rezolvarea grinzilor de lungime medie şi a grinzilor pereţi rezemate pe mediu liniar deformabil, cînd deplasările v_i ale grinzii se determină cu metodele rezistenţei materialelor, luînd în considerare şi deformaţia produsă de T.

Sistemul de bază adoptat este grinda încastrată la o extremitate (fig. 9*e*). Cînd sarcina exterioară este simetrică, încastrarea se va introduce în secţiunea de la mijlocul lungimii grinzii. *Necunoscutele static nedeterminate vor fi forţele reactive* X_i din barele verticale secţionate. În afara acestora, tot în cadrul necunoscutelor intră şi deplasarea după verticală v_0 şi rotirea $\operatorname{tg}\varphi_0 = \varphi_0$ a secţiunii care se ia drept origine şi unde se introduce încastrarea convenţională (fig. 10*a*).

Ecuaţiile de condiţie referitor la deformaţia conformă a grinzii şi mediului, precum şi ecuaţiile de echilibru static pot fi scrise sub forma :

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} X_j + v_0 + a_i \varphi_0 + \Delta_{ip} = 0, \quad i = 1,2, \ldots, n, \tag{17}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = \Sigma P, \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \cdot a_j = \Sigma M, \tag{19}$$

unde s-au folosit notaţiile :

δ_{ij} — deplasarea relativă a extremităţilor barei i, după direcţia forţei X_i, a sistemului format din cele două părţi, grinda propriu-zisă şi mediul de rezemare, produsă de o forţă unitară aplicată în j pe direcţia forţei X_j ;

Δ_{ip} — deplasarea laturii inferioare a grinzii încastrate, pe direcţia lui X_i, produsă de forţele exterioare date.

4.1.2. Calculul coeficienților δ_{ij}

Așa cum rezultă din figura 10*b*, vom avea:

$$\delta_{ij} = v_{ij} + w_{ij} = \delta_{ij}^{gr} + \delta_{ij}^{m} \qquad (i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,n), \quad (20)$$

$v_{ij} = \delta_{ij}^{gr}$ reprezintă deplasarea punctului i situat pe latura inferioară a grinzii, după direcția forței X_i, produsă de forța $X_j = 1$; $w_{ij} = \delta_{ij}^{m}$ repre-

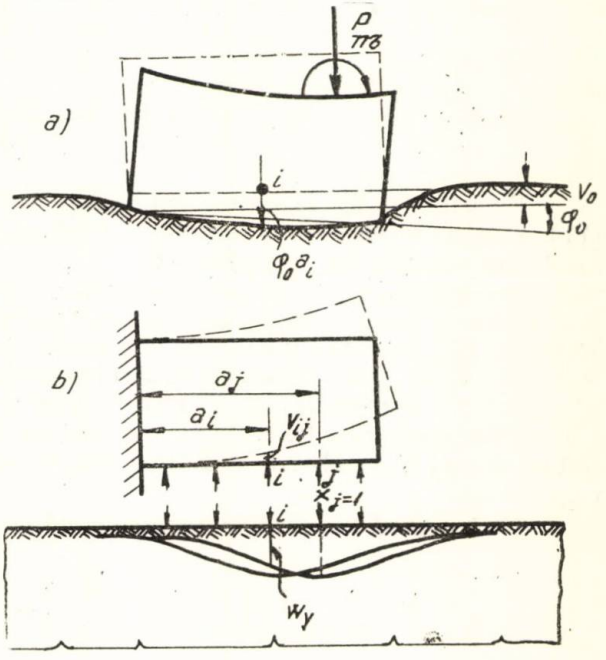


Fig. 10 — Grindă rezemată pe mediu deformabil; *b*) Schema pentru calculul deplasărilor v_{ij} și w_{ij}.

zintă deplasarea punctului i al mediului de rezemare după direcția forței X_i, produsă de $X_j = 1$.

În cazul grinzilor înalte ($\lambda < 5$), determinarea deplasării se va face luîndu-se în considerare deformația produsă atît de M cît și de T. Folosind metodele din rezistența materialelor [4], [3] și ținînd seama de notațiile de pe figura 10*b* vom avea:

$$\text{Cînd } a_i < a_j: \ \delta_{ij}^{gr} = \delta_{ij}^{M} + \delta_{ij}^{T} = a_i^2(3a_j - a_i)\frac{1}{6EI_z} + \frac{a_i}{GA'},$$

$$\text{Cînd } a_i > a_j: \ \delta_{ij}^{gr} = \delta_{ij}^{M} + \delta_{ij}^{T} = a_j^2(3a_i - a_j)\frac{1}{6EI_z} + \frac{a_j}{GA'}.$$

Deoarece, atunci cînd se pune condiția de contact într-un număr finit de puncte, lungimea de rezemare a grinzii se împarte, în general, într-un

număr de intervale egale $c = \frac{L}{n}$, iar deplasările se determină în punctele situate la mijlocul acestor intervale, rezultă că atît a_i, cît şi a_j sînt multipli de c şi relaţiile de mai sus pot fi puse sub forma

$$\delta_{ij}^{T} = \delta_{ij}^{M} + \delta_{ij}^{T} = \frac{c^3}{6EI_z}\bar{\delta}_{ij}^{M} + \frac{c}{GA'}\bar{\delta}_{ij}^{T},$$

unde

$$\textit{Cînd } a_i < a_j: \quad \bar{\delta}_{ij}^{M} = \left(\frac{a_i}{c}\right)^2\left(3\frac{a_j}{c} - \frac{a_i}{c}\right); \quad \bar{\delta}_{ij}^{T} = \frac{a_i}{c}, \tag{21}$$

$$\textit{Cînd } a_i > a_j: \quad \bar{\delta}_{ij}^{M} = \left(\frac{a_j}{c}\right)^2\left(3\frac{a_i}{c} - \frac{a_j}{c}\right); \quad \bar{\delta}_{ij}^{T} = \frac{a_j}{c}. \tag{22}$$

Valorile lui $\bar{\delta}_{ij}^{M}$ se găsesc întabulate în lucrări de specialitate [8], [11]. Pentru mecanizarea calculului cînd se ia în considerare şi T, am întabulat valorile lui $\bar{\delta}_{ij}^{T}$ (tabela 2).

Deplasările $w_{ij} = \delta_{ij}^{m}$ se determină cu relaţiile stabilite în teoria elasticităţii pentru semiplanul sau semispaţiul elastic, în funcţie de condiţiile în care lucrează mediul de rezemare. În acest calcul sarcina concentrată $X_j = 1$ va fi înlocuită cu sarcina uniform distribuită pe lungimea intervalului c corespunzător. Fără a ne opri la detalierea deducţiilor care sînt prezentate în alte lucrări [8], vom da, în scopul realizării unei continuităţi firesti a rezolvării propuse, numai rezultatele finale de care ne vom folosi.

Cînd mediul lucrează în condiţiile stării plane de tensiune:

$$w_{ij} = \delta_{ij}^{m} = \frac{1}{\pi E_0}\left[F\left(\frac{x_{ij}}{c}\right) + C\left(\frac{d}{c}\right)\right] = \frac{1}{\pi E_0}\left[\bar{\delta}_{ij}^{m} + C\left(\frac{d}{c}\right)\right]. \tag{23}$$

Cînd mediul lucrează în condiţiile stării plane de deformaţie, se înlocuieşte E_0 prin $E_0/1 - \mu_0^2$.

Cînd mediul lucrează în condiţiile semispaţiului liniar deformabil:

$$w_{ij} = \delta_{ij}^{m} = \frac{1-\mu_0^2}{\pi E_0 c}F\left(\frac{x}{c}, \frac{b}{c}\right) = \frac{1-\mu_0^2}{\pi E_0 c}\bar{\delta}_{ij}^{m}. \tag{24}$$

Valorile lui $\bar{\delta}_{ij}^{m} = F\left(\frac{x_{ij}}{c}\right)$ sau $\bar{\delta}_{ij}^{m} = F\left(\frac{x_{ij}}{c}, \frac{b}{c}\right)$ sînt întabulate [8], [11], [4], pentru diferite valori ale raportului $\frac{x_{ij}}{c}$ şi respectiv $\frac{x_{ij}}{c}$ şi $\frac{b}{c}$ (x_{ij} este distanţa de la punctul de aplicaţie al forţei unitare pînă la punctul în care se calculează deplasarea şi este egal cu nc; n este multiplu de 0,5, iar b este lăţimea grinzii).

Tabela 2

Valorile lui $\bar{\delta}_{ij}^{T}$

a_j/c \ a_i/c	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10
0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
1.0		1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.5			1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
2.0				2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0
2.5					2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5
3.0						3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0
3.5							3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5
4.0								4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0
4.5									4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5
5.0										5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0
5.5											5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5
6.0												6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0
6.5													6.5	6.5	6.5	6.5	6.5	6.5	6.5	6.5
7.0														7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0
7.5															7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5
8.0																8.0	8.0	8.0	8.0	8.0
8.5																	8.5	8.5	8.5	8.5
9.0																		9.0	9.0	9.0
9.5																			9.5	9.5
10																				10

Observaţii.

1. **Notaţiile utilizate:**
   - a_i – **distanţa de la încastrare la secţiunea în care se calculează deplasarea verticală a grinzii;**
   - a_j – **distanţa de la încastrare pînă la punctul de aplicaţie al forţei unitare;**
   - c – **lungimile intervalelor egale, în care se divide, pentru calcul, lungimea grinzii.**
2. **Forţa concentrată este considerată egală cu unitatea.**

4.1.3. Calculul deplasărilor Δ_{ip} cînd se ține seama și de deformația produsă de forța tăietoare

Deplasarea după verticală a punctului i situat pe latura de rezemare a grinzii, produsă de acțiunea forțelor exterioare, se va determina ținînd seama atît de influența deformației produsă de M, cît și de T

$$\Delta_{ip} = \Delta_{ip}^{M} + \Delta_{ip}^{T}.$$

Utilizînd metoda parametrilor în origine pentru cazul cînd se ține seama și de T [3], expresia axei deformate a grinzii va fi

$$v_i(x) = \Delta_{ip} = v_0 + \varphi_0 x + \Phi_M(x) + \Phi_T(x).$$

Deoarece cînd se ia originea sistemului de axe în încastrare, parametrii v_0 (săgeata în origine) și φ_0 (rotirea secțiunii din origine produsă de M și T) sînt nuli [4], expresia săgeții capătă forma

$$v_i(x) = \Delta_{ip} = \Phi_M(x) + \Phi_T(x) = \Delta_{ip}^{M} + \Delta_{ip}^{T}. \tag{25}$$

În scopul simplificării calculului se dau în tabela 3 expresiile lui Δ_{ip} pentru sarcinile întîlnite curent în practică.

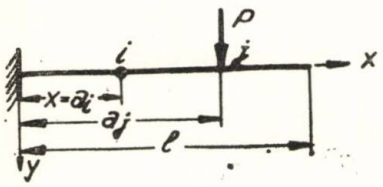
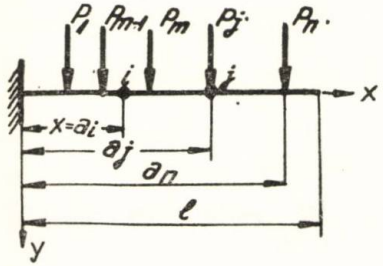
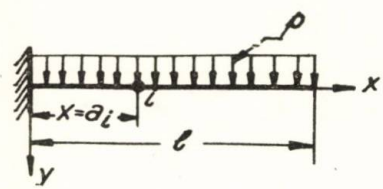
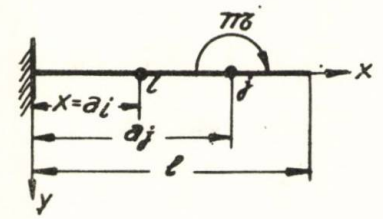
4.1.4. Alte sistematizări ale calculului

Cînd terenul lucrează în condițiile problemei plane, deoarece în expresia deplasării δ_{ij}^{m} (23) intră și C, o mărime absolut arbitrară, a cărei valoare nu o putem determina, se sistematizează astfel calculul încît să fie evitată determinarea explicită a acesteia. Așa cum rezultă din [4], pentru valori mari ale raportului $\frac{d}{c}$, C capătă variații din ce în ce mai mici. De aceea distanța d în raport cu care se măsoară deplasările relative ale suprafeței terenului este bine să fie luată suficient de mare în comparație cu lungimea grinzii, încît să se poată considera că C are aceeași valoare pentru toate punctele suprafeței de rezemare a grinzii, ale cărei deplasări le determinăm. În această ipoteză se poate elimina C. Explicitînd ecuația de condiție (17) pentru punctul i, toți termenii care au factor comun pe C, vor reprezenta suma reacțiunilor (ΣX_i), care, în virtutea relației (18), este egală cu suma forțelor exterioare active ΣP. Acest nou termen de forma $C\Sigma P$ se adaugă la v_0. Multiplicînd toate ecuațiile cu πE_0, se obține în final

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \delta'_{ij} + \overline{v}_0 + a_i \overline{\varphi}_0 + \overline{\Delta}_{ip} = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,n). \tag{26}$$

Tabela 3

Expresiile deplasărilor produse de M şi T

Nr.	Schema grinzii	Expresia lui Δ_{ip}
1		$x = a_i < a_j$; $\Delta_{ip} = \Delta_{ip}^M + \Delta_{ip}^T =$ $= \frac{a_i^2}{6EI_z}(3a_j - a_i)\,P + \frac{a_i}{GA'}P,$ $x = a_i > a_j$; $\Delta_{ip} = \Delta_{ip}^M + \Delta_{ip}^T =$ $= \frac{a_j^2}{6EI_z}(3a_i - a_j)\,P + \frac{a_j}{GA'}P.$
2		$a_{m-1} < x = a_i < a_m$; $m < n$ $\Delta_{ip} = \Delta_{ip}^M + \Delta_{ip}^T = \left[\frac{1}{6EI_z}\sum_{j=m}^{n} a_i^2(3a_j - a_i)P_j + \right.$ $\left. + \frac{1}{6EI_z}\sum_{j=1}^{m-1}(3a_i - a_j)P_j\right] +$ $+ \left[\frac{a_i}{GA'}\sum_{j=m}^{n} P_j + \frac{1}{GA'}\sum_{j=1}^{m-1} a_j P_j\right]$
3		$\Delta_{ip} = \Delta_{ip}^M + \Delta_{ip}^T = \frac{pl^4}{24EI_z}(6\xi_i^2 - 4\xi_i^3 + \xi_i^4) +$ $+ \frac{pl^2}{2GA'}(2\xi_i - \xi_i^2);$ $\xi_i = \frac{x_i}{l} = \frac{a_i}{l}.$
4		$x = a_i > a_j$; $\Delta_{ip} = \Delta_{ip}^M + 0 = \frac{\mathfrak{M}\,a_i^2}{2EI_z}$; $x = a_i > a_j$; $\Delta_{ip} = \Delta_{ip}^M + 0 = \frac{\mathfrak{M}}{2EI_z}a_j(2a_i - a_j).$

MŰSZAKI EGYETEM 1948

Tabela 3 (continuare)

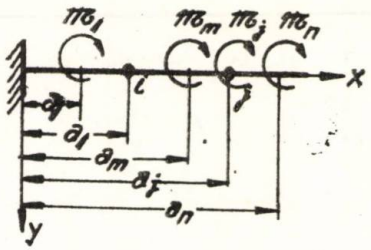
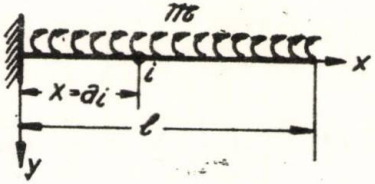
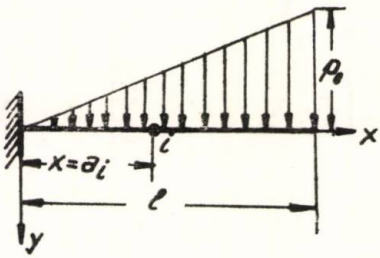
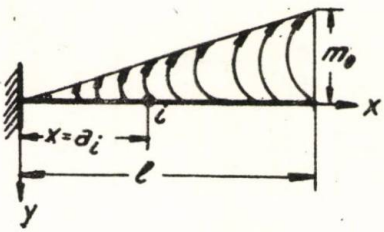
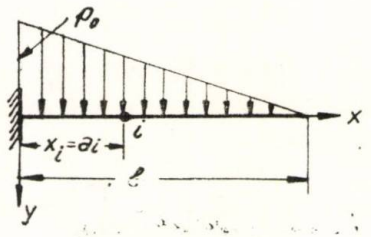
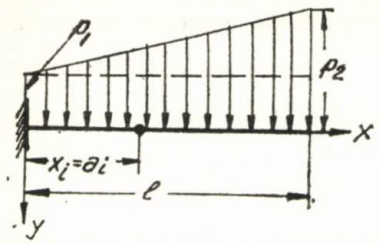
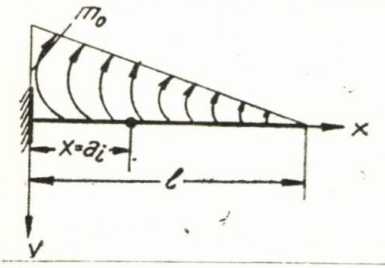
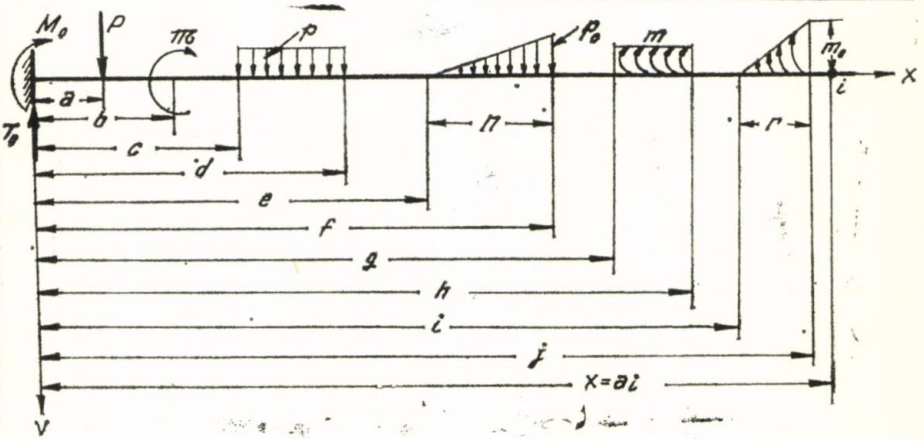
Nr.	Schema grinzii	Expresia lui Δ_{ip}
5		$a_{m-1} < x = a_i < a_m\,; \quad n > m$ $\Delta_{ip} = \Delta_{ip}^{M} + 0 = \frac{a_i^2}{2EI_z} \sum_{j=m}^{n} \mathfrak{M}_j +$ $+ \frac{1}{2EI_z} \sum_{j=1}^{m-1} a_j (2a_i - a_j)\, \mathfrak{M}_j .$
6		$\Delta_{ip} = \Delta_{ip}^{M} + 0 = \frac{ml^3}{6EI_z} (3\xi_i^2 - \xi_i^3)\,;$ $\xi_i = \frac{x_i}{l} = \frac{a_i}{l} .$
7		$\Delta_{ip} = \Delta_{ip}^{M} + \Delta_{ip}^{T} =$ $= \frac{p_0 l^4}{120EI_z} (20\xi_i^2 - 10\xi_i^3 + \xi_i^5) +$ $+ \frac{p_0 l^2}{6GA'} (3\xi_i - \xi_i^3)\,;$ $\xi_i = \frac{x_i}{l} = \frac{a_i}{l} .$
8		$\Delta_{ip} = \Delta_{ip}^{M} + 0 = \frac{m_0 l^3}{24EI_z} (6\xi_i^2 - \xi_i^4)\,;$ $\xi_i = \frac{x_i}{l} = \frac{a_i}{l} .$
9		$\Delta_{ip} = \Delta_{ip}^{M} + \Delta_{ip}^{T} =$ $= \frac{p_0 l^4}{120EI_z} (10\xi_i^2 - 10\xi_i^3 + 5\xi_i^4 - \xi_i^5) +$ $+ \frac{p_0 l^2}{6GA'} (3\xi_i - 3\xi_i^2 + \xi_i^3)\,;$ $\xi_i = \frac{x_i}{l} = \frac{a_i}{l} .$

Tabela 3 (continuare)

Nr.	Schema grinzii	Expresia lui Δ_{ip}
10		$\Delta_{ip}=\Delta_{ip}^{M}+\Delta_{ip}^{T}=\left[\frac{p_1 l^4}{24EI_z}(6\xi_i^2-4\xi_i^3+\xi_i^4)+\right.$ $\left.+\frac{p_2-p_1}{120EI_z}l^4(20\xi_i^3-10\xi_i^3+\xi_i^5)\right]+$ $+\left[\frac{p_1 l^2}{2GA'}(2\xi_i-\xi_i^2)+\frac{p_2-p_1}{6GA'}l^2(3\xi_i-\xi_i^3)\right]\cdot$
11		$\Delta_{ip}=\Delta_{ip}^{M}+0=\frac{m_0 l^3}{24EI_z}(6\xi_i^2-4\xi_i^3+\xi_i^4)\,;$ $\xi_i=\frac{x_i}{l}=\frac{a_i}{l}\,.$
12		$\Delta_{ip}=\Delta_{ip}^{M}+\Delta_{ip}^{T}$ $\Delta_{ip}^{M}=\frac{M_0 x^2}{2!EI_z}-\frac{T_0 x^3}{3!EI_z}\Big]_{x_i<a}+\frac{P(x-a)^3}{3!EI_z}\Big]_{x_i<b}-\frac{\mathfrak{M}(x-b)^2}{2!EI_z}\Big]_{x_i<c}+\frac{p(x-c)^4}{4!EI_z}\Big]_{x_i<d}-$ $-\frac{p(x-d)^4}{4!EI_z}\Big]_{x<e}+\frac{p_0(x-e)^5}{n5!EI_z}\Big]_{x<f}-\frac{p_0(x-f)^4}{4!EI_z}-\frac{p_0(x-f)^5}{n5!EI_z}\Big]_{x<g}-\frac{m(x-g)^3}{3!EI_z}\Big]_{x<h}+$ $+\frac{m(x-h)^3}{3!EI_z}\Big]_{x<i}-\frac{m_0}{r}\frac{(x-i)^4}{4!EI_z}\Big]_{x<j}+\frac{m_0(x-j)^3}{3!EI_z}+\frac{m_0}{r}\frac{(x-j)^4}{4!EI_z}\Big]_{x>j}\,;$ $\Delta_{ip}=\frac{T_0 x}{GA'}\Big]_{x<a}-\frac{P(x-a)}{GA'}\Big]_{x<c}-\frac{p(x-c)^2}{2!GA'}\Big]_{x<d}+\frac{p(x-d)^2}{2!GA'}\Big]_{x<e}-$ $-\frac{p_0}{n}\frac{(x-e)^3}{3!GA'}\Big]_{x<f}+\frac{p_0(x-f)^2}{2!GA'}+\frac{p_0}{n}\frac{(x-f)^3}{3!GA'}\Big]_{x>f}\,.$

Cînd terenul lucrează în condițiile semispațiului liniar deformabil, iar grinda de lățime b, se poate considera ca fiind absolut rigidă în sens transversal — condiție îndeplinită întotdeauna de grinzile înalte — și dacă reacțiunile se pot considera uniform distribuite pe lățimea grinzii, multiplicînd toate ecuațiile de condiție cu $\frac{\pi E_0 c}{1-\mu_0^2}$, obținem în final un sistem de ecuații de aceeași formă ca și cel prezentat mai sus (26).

Notînd necunoscutele $\bar{v}_0$ și $\bar{\varphi}_0$ prin X_{n+1} și X_{n+2}, *sistemul de ecuații (26) se scrie în formă prescurtată*

$$\sum_{j=1}^{n+2} a_{ij} X_j = b_i \qquad (i = 1,2, \ldots, n+2) \tag{27}$$

sau *în formă matriceală*:

$$[A]\,\{X\} = \{B\}, \tag{28}$$

unde s-au folosit notațiile:
$[A]$ — matricea coeficienților necunoscutelor; $\{X\}$ — vectorul coloană al necunoscutelor; $\{B\}$ — vectorul coloană al termenilor liberi.

Sistemul de ecuații canonice, care ne conduce la determinarea necunoscutelor problemei noastre (reacțiunile), scris în forma matriceală, *poate fi detaliat* după cum urmează:

$$\begin{pmatrix}
(\bar{\delta}_{11}^m + \alpha\bar{\delta}_{11}^M + \beta\bar{\delta}_{11}^T)\,(\bar{\delta}_{12}^m + \alpha\bar{\delta}_{12}^M + \beta\bar{\delta}_{12}^T) \ldots (\bar{\delta}_{1n}^m + \alpha\bar{\delta}_{1n}^M + \beta\bar{\delta}_{1n}^T)\; 1\; a_1 \\
(\bar{\delta}_{21}^m + \alpha\bar{\delta}_{21}^M + \beta\bar{\delta}_{21}^T)\,(\bar{\delta}_{22}^m + \alpha\bar{\delta}_{22}^M + \beta\bar{\delta}_{22}^T) \ldots (\bar{\delta}_{2n}^m + \alpha\bar{\delta}_{2n}^M + \beta\bar{\delta}_{2n}^T)\; 1\; a_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\; \vdots \\
(\bar{\delta}_{n1}^m + \alpha\bar{\delta}_{n1}^M + \beta\bar{\delta}_{n1}^T)\,(\bar{\delta}_{n2}^m + \alpha\bar{\delta}_{n2}^M + \beta\bar{\delta}_{n2}^T) \ldots (\bar{\delta}_{nn}^m + \alpha\bar{\delta}_{nn}^M + \beta\bar{\delta}_{nn}^T)\; 1\; a_n \\
1 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad \ldots \qquad\qquad 1 \qquad\qquad 0\; 0 \\
a_1 \qquad\qquad a_2 \qquad\qquad \ldots \qquad\qquad a_n \qquad\qquad 0\; 0
\end{pmatrix}
\times
\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \\ X_{n+1} \\ X_{n+2} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} -\bar{\Delta}_{1p}^M - \bar{\Delta}_{1p}^T \\ -\bar{\Delta}_{2p}^M - \bar{\Delta}_{2p}^T \\ \vdots \\ -\bar{\Delta}_{np}^M - \bar{\Delta}_{np}^T \\ \Sigma P \\ \Sigma M \end{pmatrix}. \tag{29}$$

S-au utilizat notațiile:

a) *cînd grinda și mediul de rezemare lucrează în condițiile stării plane de tensiune*

$$\bar{v}_0 = \pi E_0 v_0 + C\Sigma P = X_{n+1}, \tag{30}$$

$$\bar{\varphi}_0 = \pi E_0\, \varphi_0 = X_{n+2}, \tag{31}$$

$$\bar{\Delta}_{ip} = \pi E_0\, \Delta_{ip} = \pi E_0 (\Delta_{ip}^M + \Delta_{ip}^T) = \bar{\Delta}_{ip}^M + \bar{\Delta}_{ip}^T, \tag{32}$$

$$\delta'_{ij} = \bar{\delta}_{ij}^m + \alpha\bar{\delta}_{ij}^M + \beta\bar{\delta}_{ij}^T, \tag{33}$$

$$\alpha = \frac{\pi E_0 c^3}{6EI_z}, \tag{34}$$

$$\beta = \frac{\pi E_0 c}{GA'} = \frac{2(1+\mu)\pi E_0 c}{EA'}; \tag{35}$$

b) *cînd grinda și mediul de rezemare lucrează în condițiile stării plane de deformație*, în relațiile de mai sus se înlocuiește E_0 prin $E_0/1-\mu_0^2$;

c) *cînd mediul de rezemare lucrează în condițiile semispațiului liniar deformabil*:

$$\bar{v}_0 = \frac{\pi E_0 c}{1-\mu_0^2} v_0 = X_{n+1}, \tag{36}$$

$$\bar{\varphi}_0 = \frac{\pi E_0 c}{1-\mu_0^2} \varphi_0 = X_{n+2}, \tag{37}$$

$$\bar{\Delta}_{ip} = \frac{\pi E_0 c}{1-\mu_0^2} (\Delta_{ip}^M + \Delta_{ip}^T) = \bar{\Delta}_{ip}^M + \bar{\Delta}_{ip}^T, \tag{38}$$

$$\delta'_{ij} = \bar{\delta}_{ij}^m + \alpha \bar{\delta}_{ij}^M + \beta \bar{\delta}_{ij}^T, \tag{39}$$

$$\alpha = \frac{\pi E_0 c^4}{6EI_z(1-\mu_0^2)}, \tag{40}$$

$$\beta = 2(1+\mu)\frac{\pi E_0 c^2}{EA'(1-\mu_0^2)}. \tag{41}$$

Din ecuațiile (29) se vede că influența deformației produsă de momentul încovoietor și forța tăietoare este prinsă atît în coeficienții necunoscutelor X_i, cît și în termenii liberi.

De fapt, *sistemul de ecuații (29) reprezintă forma generalizată a ecuațiilor folosite la determinarea reacțiunilor grinzilor de orice tip, rezemate pe mediu continuu liniar deformabil.*

Astfel, *dacă grinda lungă, de lungime medie, sau grinda perete poate fi considerată, în calcul, ca absolut rigidă* ($\bar{\delta}_{ij}^M = 0$, $\bar{\delta}_{ij}^T = 0$, $\bar{\Delta}_{ip}^M = 0$, $\bar{\Delta}_{ip}^T = 0$, $\bar{\delta}_{ij}^m \neq 0$) *sistemul de ecuații (29), scris matriceal*, capătă forma

$$[A^r]\{X^r\} = \{B^r\}. \tag{42}$$

La grinzile lungi ($\lambda > 5$), *cînd este suficient să se ia în considerare numai deformația produsă de M* ($\bar{\delta}_j^T = 0$, $\Delta_{ip}^T = 0$), sistemul de ecuații (29) capătă forma

$$[A^M]\{X^M\} = \{B^M\}. \tag{43}$$

Prin rezolvarea sistemelor de ecuații (29), (42) sau (43) se obțin necunoscutele X_i, care reprezintă rezultantele reacțiunilor mediului de rezemare concentrate în dreptul barelor fictive ce materializează

contactul. Împărţind pe X_i la suprafaţa de rezemare aferentă se obţine *intensitatea reacţiunii mediului*, uniform distribuită pe aceste suprafeţe:

— pentru problema plană: $$p_j = \frac{X_j}{1 \cdot c}, \tag{44}$$

— pentru problema spaţială: $$p_j = \frac{X_j}{b \cdot c}. \tag{45}$$

Diagrama în trepte a reacţiunilor poate fi apoi înlocuită şi cu o curbă continuă.

Dacă este necesar să construim şi *curba tasărilor mediului de rezemare*, se vor determina pentru problema plană *tasările relative*, iar pentru problema spaţială *tasările absolute*, cu relaţiile:

— pentru semiplan: $$w_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{X_j}{\pi E_0} F\left(\frac{x_{ij}}{c}\right), \tag{46}$$

— pentru semispaţiu: $$w_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1 - \mu_0^2}{\pi E_0 c} F\left(\frac{x}{c}, \frac{b}{c}\right). \tag{47}$$

Influenţa deformaţiei produsă de momentul încovoietor şi influenţa deformaţiei produsă de forţa tăietoare asupra mărimii reacţiunilor mediului deformabil, poate fi analizată pe baza ecuaţiilor (29), sub diverse aspecte dintre care subliniem:

1) *Influenţa deformaţiei din M şi T asupra valorii şi distribuţiei reacţiunilor mediului, în cazul unei grinzi date, cu anumite caracteristici geometrice şi mecanice* (λ, E), *rezemată pe un mediu liniar deformabil cu modulul de deformaţie* E_0 *şi coeficientul lui Poisson* μ_0 *dat, atunci cînd este acţionată de diverse tipuri de încărcare.* Întrucît, atunci cînd sînt constante mărimile λ, E_0/E şi $n = \frac{L}{c}$, matricea $[A]$ rămîne neschimbată, pentru diverse scheme de încărcare se modifică numai matricea coloană a termenilor liberi. Deci odată determinată inversa matricei $[A]$

$$A^{-1} = ||a'_{ij}|| \qquad (i,\ j = 1, 2, \ldots, n), \tag{48}$$

valorile necunoscutelor, pentru orice încărcare, pot fi stabilite cu relaţia cunoscută la înmulţirea matricelor:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a'_{ij} b_j \qquad (i = 1,2, \ldots, n). \tag{49}$$

2) *Cum se modifică influenţa deformaţiei din M şi T asupra valorii şi distribuţiei reacţiunilor mediului, pentru aceeaşi diagramă de încărcare exterioară şi diverse rapoarte între laturile grinzii* $\left(\frac{E_0}{E} = \text{const.}\right)$.

3) *În ce măsură se manifestă influenţa deformaţiei din M şi T asupra valorii şi distribuţiei reacţiunilor, pentru diverse rapoarte între rigi-*

ditatea grinzii și mediului de rezemare. Unele dintre aceste aspecte vor fi analizate în altă lucrare.

Deocamdată subliniem însă faptul că *pentru grinzile cu secțiunea în T sau I influența forței tăietoare poate căpăta valori apreciabile în comparație cu situația grinzilor ce au secțiunea dreptunghiulară, chiar și atunci cînd raportul laturilor* $\lambda > 5$ (grinzi lungi), întrucît valoarea coeficientului de formă K este de cîteva ori mai mare decît în cazul secțiunii dreptunghiulare $\left(A' = \frac{A}{K}\right)$.

După determinarea reacțiunilor mediului de rezemare se pot calcula tensiunile în grinda propriu-zisă, folosind în cazul grinzilor înalte metodele teoriei elasticității (de exemplu, metoda diferențelor finite). Dar de acest lucru nu ne putem ocupa în cadrul acestui articol.

5. EXEMPLUL NUMERIC

Dintr-o construcție (fundație) rezemată pe teren — cînd se poate considera că atît construcția propriu-zisă cît și terenul lucrează în condițiile stării plane de deformație — s-a izolat o fîșie cu grosimea unitară (fig. 11). Pentru calcul, această fîșie se prezintă sub forma unei grinzi rezemate pe un mediu liniar deformabil care lucrează în condițiile stării plane de deformație.

Grinda are raportul laturilor $\lambda = \frac{L}{H} = 2$ și este acționată de o forță concentrată P aplicată la mijlocul laturii superioare. Să presupunem că raportul $\frac{E_0}{E} = 0{,}50$, iar coeficientul lui Poisson pentru materialul grinzii este $\mu = 0.167$ (beton).

Determinarea reacțiunilor mediului de rezemare se va face în trei ipoteze:

a) grindă, considerată în calcul, ca absolut rigidă;

b) grindă deformabilă, cînd se ia în considerare influența M;

c) grindă deformabilă cînd se ia în considerare influența $M + T$

În toate situațiile pentru simplificarea calculelor se aproximează $\frac{1-\mu^2}{1-\mu_0^2} \approx 1$.

5.1. CAZUL a. GRINDĂ ABSOLUT RIGIDĂ

1. *Schema de calcul* o vom lua cea din figura 11*b*, presupunînd că lungimea de rezemare se divide în 9 intervale egale, contactul cu terenul făcîndu-se la nivelul barelor convenționale situate la distanțe $c = \frac{L}{9}$.

2. *Sistemul de bază* este prezentat în figura 11*c*. În acest caz avem **6 necunoscute: forțele reactive** $X_0, X_1, \ldots, X_4$ și tasarea la nivelul încastrării $\overline{v}_0 = X_5$ ($\overline{\varphi}_0 = 0$ datorită încărcării simetrice).

3. *Alcătuirea sistemului de ecuații referitor la condiția de contact și condițiile de echilibru* se va face ținînd seama de ipoteza adoptată ($\bar{\delta}_{ij}^{M}=0$; $\bar{\delta}_{ij}^{T}=0$; $\bar{\Delta}_{ip}=0$; $\bar{\delta}_{ij}^{m}\neq 0$).

Calculul elementelor matricei $A^{r}(\bar{\delta}_{ij}^{m}$, care reprezintă deplasările terenului) se face folosind tabela lui F_{ij} [4], [7], [11], neomițînd faptul că

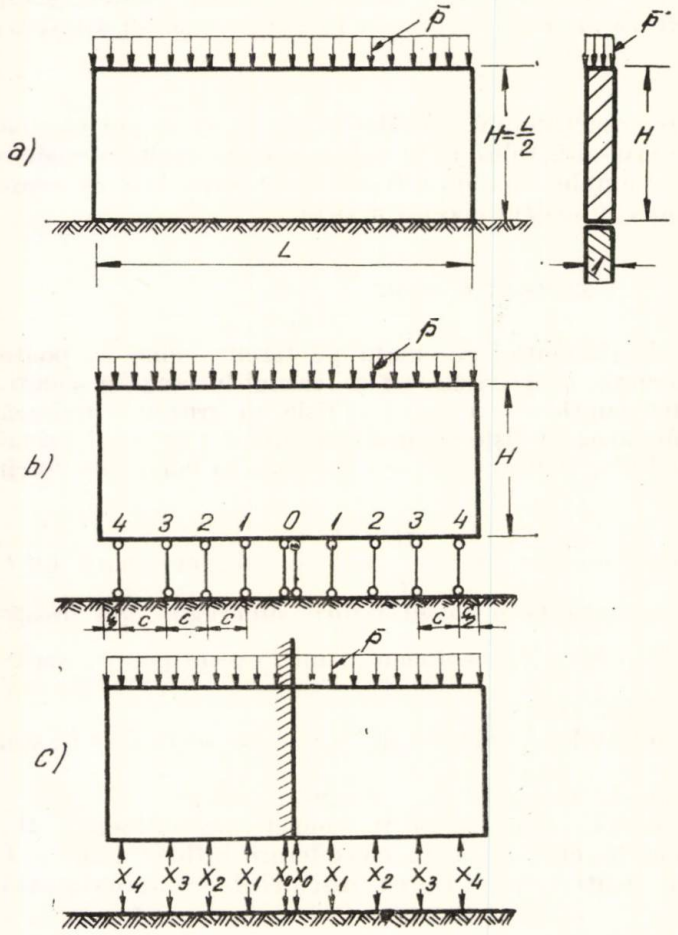


Fig. 11. — *a*) Grinda cu $\lambda=2$ rezemată pe mediu liniar deformabil; *b*) Schema de calcul; *c*) Sistemul de bază utilizat.

la determinarea tasărilor trebuie luate în considerare atît forțele situate la stînga cît și la dreapta încastrării (încastrarea se referă la grindă și nu împiedică deplasările terenului). Alcătuim sistemul ecuațiilor canonice (42):

$$\begin{bmatrix} 0 & -6.592 & -9.502 & -11.148 & -12.308 & 1 \\ -6.592 & -4.751 & -8.870 & -10.905 & -12.176 & 1 \\ -9.502 & -8.870 & -6.154 & -9,898 & -11.718 & 1 \\ -11.148 & -10.905 & -9.898 & -6.967 & -10.572 & 1 \\ -12.308 & -12.176 & -11.718 & -10.572 & -7.544 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ \bar{v}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P/2 \end{Bmatrix}. \quad (50)$$

4. Rezolvînd acest sistem de ecuații se obțin următoarele valori pentru *reacțiunile necunoscute*:

$$X_0 = 0.0366\ P;\ X_1 = 0.0752\ P;\ X_2 = 0.0823\ P, \tag{51}$$

$$X_3 = 0.0961\ P;\ X_4 = 0.2096\ P;\ \bar{v}_0 = 4{,}930\ P.$$

5. *Intensitatea reacțiunilor uniform distribuite* pe intervalele egale cu $c = \frac{L}{9}$ are valorile:

$$p_0 = 0.6588\frac{P}{L};\quad p_1 = 0.6768\frac{P}{L};\quad p_2 = 0.7407\frac{P}{L},$$

$$p_3 = 0.8649\frac{P}{L};\quad p_4 = 1{,}886\frac{P}{L}. \tag{52}$$

6. *Diagrama distribuției reacțiunilor mediului de rezemare* este prezentată pe figura 12 a sub forma în trepte (linia plină) și sub forma unei curbe continui (linia întreruptă).

5.2. CAZUL b. INFLUENȚA M

Folosind aceeași schemă de calcul și același sistem de bază ca și în cazul a. Ecuațiile canonice se prezintă sub forma (43).

Elementele matricei A sînt de forma $\delta'_{ij} = \bar{\delta}^m_{ij} + \alpha\bar{\delta}^M_{ij}$ și vor fi calculate folosind valorile $\bar{\delta}^m_{ij}$ determinate în cazul a și valorile lui $\bar{\delta}^M_{ij}$ stabilite cu ajutorul tabelei din [8], [11], [4]. Deplasările $\bar{\delta}^M_{ij}$ sînt pozitive (dirijate în sus) iar $\bar{\delta}^m_{ij}$ negative.

Coeficientul α are valoarea: $\alpha = \frac{\pi(1-\mu^2)}{6(1-\mu_0^2)} \cdot \frac{E_0}{E} \cdot \frac{c^3}{I_z} \approx \frac{2\pi}{n^3} \cdot \frac{E_0}{E}\lambda^3 =$
$=0.0345$.

Se obține următorul sistem de ecuații:

$$\begin{bmatrix} 0 & -6.592 & -9.502 & -11.148 & -12.308 & 1.00 \\ -6.592 & -4.682 & -8.697 & -10.629 & -11.797 & 1.00 \\ -9.502 & -8.697 & -5.602 & -8.932 & -10.338 & 1.00 \\ -11.148 & -10.629 & -8.932 & -5.105 & -7.780 & 1.00 \\ -12.308 & -11.797 & -10.338 & -7.780 & -3.124 & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ \bar{v}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P/2 \end{Bmatrix}. \tag{53}$$

Termenii liberi $\overline{\Delta}_{ip}=\overline{\Delta}_{ip}^{M}$ sînt nuli, pentru încărcarea dată şi sistemul de bază ales. Soluţiile sistemului de ecuaţii canonice :

$$X_0 = 0.060P;\ X_1 = 0.1218P;\ X_2 = 0.100\ P,$$

$$X_3 = 0.0902P;\ X_4 = 0.1281\ P;\ \overline{v}_0 = 4{,}331\ P \tag{54}$$

valorile intensităţii reacţiunilor uniform distribuite :

$$p_0 = 1.080\ P/L;\ p_1 = 1.098\ P/L;\ p_2 = 0.900\ P/L,$$

$$p_3 = 0{,}810\ P/L;\ p_4 = 1.152\ P/L. \tag{55}$$

Distribuţia reacţiunilor mediului în lungul grinzii este reprezentată pe figura 12*b* sub forma diagramei în trepte şi sub forma unei curbe continui.

5.3. CAZUL c. INFLUENŢA M + T

Coeficienţii δ'_{ij} au forma : $\delta'_{ij} = \overline{\delta}_{ij}^{m} + \alpha\overline{\delta}_{ij}^{M} + \beta\overline{\delta}_{ij}^{T}$.

Calculul lui β : $\beta = 2{,}4(1+\mu)\dfrac{\pi E_0 c}{EA}\cdot\dfrac{1-\mu^2}{1-\mu_0^2} \approx \dfrac{2{,}4(1+\mu)\pi}{n}\cdot\dfrac{E_0}{E}\lambda =$ $= 0.977$.

Folosind valorile coeficienţilor $\overline{\delta}_{ij}^{m} + \alpha\overline{\delta}_{ij}^{M}$ calculaţi în cazul *b* şi tabela 2 pentru $\overline{\delta}_{ij}^{T}$ se determină coeficienţii sistemului de ecuaţii :

$$\begin{bmatrix} 0 & -6.592 & -9.502 & -11.148 & -12.308 & 1.00 \\ -6.592 & -3.705 & -7.720 & -9.652 & -10.820 & 1.00 \\ -9.502 & -7.720 & -3.648 & -6.978 & -8.384 & 1.00 \\ -11.148 & -9.652 & -6.978 & -2.174 & -4.849 & 1.00 \\ -12.308 & 10.820 & -8.384 & -4.849 & +0.784 & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ \overline{v}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P/2 \end{Bmatrix}. \tag{56}$$

Soluţia sistemului de ecuaţii canonice :

$$X_0 = 0.1156\ P;\ X_1 = 0.1179\ P;\ X_2 = 0.0915\ P,$$

$$X_3 = 0.069P;\ X_4 = 0.1060\ P;\ \overline{v}_0 = 3{,}721\ P. \tag{57}$$

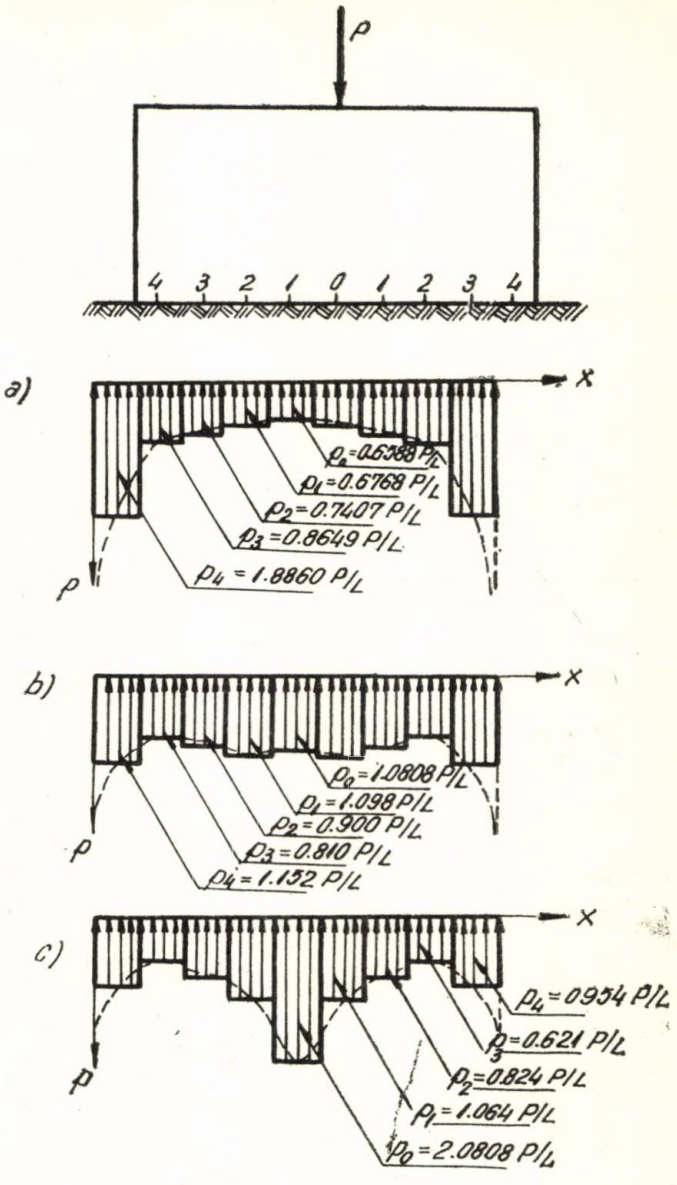


Fig. 12 — Grinda cu $\lambda=2$ rezemată pe mediu liniar deformabil. Reacţiunile mediului de rezemare: *a*) Grindă absolut rigidă; *b*) Se ia în considerare influenţa deformaţiei produsă de M; *c*) Se ia în considerare influenţa deformaţiei produsă de $M+T$.

Intensităţile reacţiunilor uniform distribuite:

$$p_0=2.0808\ P/L;\ p_1=1.0611\ P/L;\ p_2=0.8217P/L;$$
$$p_3=0.6210P/L;\ p_4=0.9540P/L. \tag{58}$$

Distribuţia reacţiunilor în lungul grinzii este prezentată pe figura 12 c.

6. CONCLUZII

Din analiza rezultatelor numerice prezentate ca şi a altor date obţinute pentru grinzi cu $\lambda = 4$ şi $\lambda = 1$, semnalăm în cele ce urmează cîteva concluzii.

a) *Considerarea la calculul reacţiunilor mediului a grinzilor cu* $\lambda < 5$ *ca fiind absolut rigide*, aşa cum sîntem tentaţi să o facem, *ne conduce la rezultate mult diferite de cele reale.* Condiţia de grindă absolut rigidă stabilită în literatura de specialitate pentru grinzile lungi, cînd se ia în considerare numai deformaţia din M, se modifică în cazul grinzilor înalte ($\lambda < 5$), cînd trebuie să se ia în considerare şi influenţa deformaţiei produsă de T. Noi am stabilit relaţii de calcul în acest sens [4].

b) *Distribuţia reacţiunilor mediului de rezemare este puternic influenţată de faptul dacă grinda este considerată, în calcul, ca absolut rigidă sau ca grindă deformabilă, luîndu-se în considerare deformaţia produsă de* M *sau deformaţia produsă de* M *şi* T.

Astfel, de la diagrama caracteristică a distribuţiei reacţiunilor mediului de rezemare obţinută în cazul considerării grinzii ca fiind absolut rigidă (fig. 12) cînd valorile maxime ale intensităţii reacţiunilor sînt la extremităţile zonei de rezemare ($p_4 = 1.886\ P/L$ se ajunge prin aprecierea corectă a conlucrării grindă — mediu, ţinînd seama de influenţa deformaţiei produsă de M şi T, la diagrame de distribuţie care se deosebesc foarte mult de cele obţinute în primul caz sau chiar faţă de cele obţinute prin luarea în considerare a deformaţiei produsă numai de M.

Din exemplul prezentat, rezultă că pentru grinda cu $\lambda = 2$, pe zona centrală avem

$$p_0^r = 0.6588\ P/L;\ p_0^M = 1.0808\ P/L;\ p_0^T = 2.0808\ P/L$$

în timp ce pentru zonele marginale ale grinzii avem

$$p_4^r = 1.886\ P/L;\ p_4^M = 1.152\ P/L;\ p_4^T = 0.954\ P/L,$$

deci

$$(p_{\max}^T - p_{\max}^M)/p_{\max}^M = 100\,\%.$$

Se vede că *luarea în considerare a deformaţiei din* T *modifică esenţial atît distribuţia, cît şi valorile reacţiunilor mediului de rezemare*, ceea ce va conduce implicit la altă stare de tensiune atît în grinda propriu-zisă, cît şi în mediul de rezemare.

În general, prin luarea în considerare a deformaţiei din T eforturile unitare în grindă se reduc considerabil, deoarece reacţiunile cu valori mai mari se concentrează spre zona centrală a grinzii, ceea ce face ca momentul încovoietor produs de forţele reactive să se micşoreze în comparaţie cu situaţia cînd diagrama reacţiunilor are valori mari spre extremităţile zonei de rezemare.

Determinarea tensiunilor în grinda propriu-zisă, în etapa a doua propusă de noi, cu ajutorul metodelor teoriei elasticităţii, confirmă concluziile de mai sus.

Primită la redacţie la 30 septembrie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. Barden L., *An aproximate solution for finite beams resting on elastic soil*, Civ. Engn. Publ. Works Rev., *676* (1962).
2. Cișmigiu Al., *Despre o clasificare tehnică a grinzilor drepte și a bolților cilindrice*, Ind. constr. și a mat. de constr., **VI**, *6*, 332 (1955).
3. Diaconu M., Preda N., *Aplicarea metodei parametrilor inițiali la calculul săgeții grinzilor încovoiate ținînd seama de forțele tăietoare*, Bul. Inst. polit. Iași, **III**, *1—2* (1957).
4. Diaconu M., *Studiul teoretic și experimental al grinzilor de lungime medie și al grinzilor pereți rezemate pe mediu deformabil*, Teza și rezumatul tezei de doctorat. Inst. polit. Iași, 1969.
5. Diaconu M., Popescu-Botez G., *Sur le calcul des bandes sur un sol elastique dans les conditions de l'état plane de déformation*, Rev. de Méc. Appl., *4* (1969).
6. Gorbunov-Posadov M. I., *Calculul construcțiilor pe mediu elastic*, București, Edit. tehnică, 1960.
7. Jemocikin B. N., *Ploscoia zadacia rasceta besconecino dlinnoi balki na uprugom osnovanii*, Rascet balok na uprugom poluprostranstve i poluploscosti, 1937.
8. Jemocikin B. N., Sînițin A. P., *Prakticiskie metodi rasceta fundamentnîh balok i plit na uprugom osnovanii*, Gosstroiizdat, 1962.
9. Kany M., *Berechnung von Flächengründungen*, Berlin, Verlag, W. Ernest & Sohn, 1959.
10. Klepikov S. N., *Rascet konstrukții na uprugom osnovanii*, Izd. „Budivelnik" Kiev, 1967.
11. Lehr Hugo, *Fundații*, vol. II, București, Edit. C.S.C.A.S., 1957.
12. Lehr H., Stănescu E., Andrei S., Manoliu I., *Metode noi în proiectarea și executarea fundațiilor*, București, Edit. tehnică, 1963.
13. Pitliuc D. A., *Rascet stroitelnîh konstrukții na osnove modelirovania*, Stroiizdat, Moskva, 1965.
14. Sanpaolesi L., Salinari N., *Studio fotoelastico di una trave parete di fondazione*, Centro Studi Construzione Metaliche dell'Università di Pisa. Colombo Cursi Edit., Pisa, 1963.
15. Teodorescu P. P., *Sur une méthode d'approximation des conditions aux limites dans le cas du problème plan de la théorie de l'élasticité*, Rev. de Méc. Appl. **II**, *2*, 235 (1957).
16. — *Probleme plane în teoria elasticității*, vol. I Edit. Academiei, București, 1960.
17. Varvak P. M., *Razvitie i prilojenie metoda setok k rascetu plastinok*, I, II. Izd.-vo A.N. U.S.S.R., 1949, 1952.
18. Varvak P. M., Vasiliev V. V., *Razrahunok zalizobetonnîh zascemlenih ta konsolinih balokstinok*, Zbirnik „Doslidjenniia naprujenovo stanu ghidrotehnicinih sporud" Vid-vo A.N. U.R.S.R., 1961.

VIBRAȚIILE VERTICALE AXIAL-SIMETRICE ALE UNUI CORP RIGID REZEMAT PE O FUNDAȚIE INERȚIALĂ DE TIP PASTERNAK

de M. RADEȘ
Institutul politehnic București

Se studiază răspunsul staționar al unui corp cu baza circulară rigidă, rezemat pe un strat deformabil de grosime finită (problema axial-simetrică). Stratul este modelat printr-un model de fundație Pasternak la care se consideră și inerția „stratului forfecat". Calculul vibrațiilor forțate amortizate se face prin introducerea unor parametri complecși ai fundației, pentru considerarea amortizării histeretice a materialului de suport. Se propune o metodă de determinare a parametrilor dinamici ai acestei fundații și se prezintă rezultatele experiențelor efectuate pe un strat de cauciuc buretos avînd o membrană superficială.

1. INTRODUCERE

Problema vibrațiilor unui corp rigid, rezemat pe un strat deformabil de grosime finită, prezintă o serie de particularități încă nerezolvate, în pofida interesului practic și al aplicațiilor multiple în cele mai diverse ramuri ale tehnicii.

Primele cercetări în acest domeniu au înlocuit stratul deformabil printr-o fundație Winkler [1], adică un model discontinuu și neinerțial, format din arcuri liniare, paralele, independente, rezemate pe o bază rigidă, sistemul corp-fundație fiind apoi studiat pe modelul echivalent cu parametri concentrați.

Au urmat lucrările lui Arnold și col. [2], Bycroft [3] și Warburton [4] care au considerat corpuri cu baza circulară, modelînd stratul deformabil prin continuumul elastic, omogen și izotrop. Deși au enunțat problema corect, dificultățile matematice ridicate de folosirea continuumului inerțial i-au determinat să recurgă la o rezolvare aproximativă. Ei au considerat arbitrar o anumită distribuție a presiunii de contact sub corpul rigid (similară cu cea statică, obținută pentru corpul rigid rezemat pe semispațiu), astfel că deplasările punctelor suprafeței fundației în zona de contact au rezultat inegale, alegînd apoi o medie ponderată a acestora pentru a reprezenta deplasarea corpului rigid. Pentru corpuri

rigide cu baza dreptunghiulară, o rezolvare similară au propus Kobori şi col. [5].

Recent, Awojobi [6] şi Gladwell [7] au dat soluţii corecte pentru vibraţiile de rotaţie în jurul unei axe verticale, iar Whitman [8] a propus o metodă de studiu a vibraţiilor de translaţie orizontală, bazată pe folosirea modelelor cu parametri concentraţi.

Vlasov şi Leontiev [9] şi Muravski [10] au reluat problema vibraţiilor verticale ale unui disc circular rigid rezemat elastic, înlocuind stratul de suport printr-un model de fundaţie neinerţial, definit de doi parametri elastici. Autorul [11], [12] a analizat apoi cazul vibraţiilor corpului rigid rezemat pe o fundaţie neinerţială de tip Kerr, definită de trei parametri elastici.

Pornind de la modelul cu doi parametri elastici propus de Pasternak, autorul a propus un nou model inerţial [13], avînd o ecuaţie „constitutivă" similară cu cea a modelelor inerţiale propuse de Vlasov şi Leontiev [9] şi Muravski [14]. Vibraţiile forţate staţionare ale unui corp rigid rezemat pe un astfel de model inerţial bidimensional au fost tratate în studiul [15]. În continuare se prezintă un studiu teoretic şi experimental al vibraţiilor verticale axial-simetrice ale unui disc circular rigid, rezemat pe o fundaţie inerţială de tip Pasternak şi solicitat de o forţă perturbatoare armonică. Aproximarea introdusă prin folosirea modelelor formate din elemente cu parametri concentraţi distribuite continuu constă în impunerea unei relaţii diferenţiale între presiunea normală de contact şi tasarea suprafeţei fundaţiei, condiţiile la limită de tip mixt fiind însă riguros satisfăcute. Experienţele au demonstrat că răspunsul multor medii de rezemare este mai corect descris de aceste modele, decît de modelul continuumului sau de modelul complet discontinuu şi neinerţial al lui Winkler.

2. MODELUL INERŢIAL DE TIP PASTERNAK

Cel mai simplu model continuu care „distribuie sarcina" lateral (are tasări şi în afara zonelor direct solicitate) şi ţine cont şi de inerţia mediului de rezemare, se obţine prin considerarea unei mase distribuite a „stratului forfecat" din modelul Pasternak. Modelul este format dintr-un strat de arcuri liniare, de inerţie neglijabilă, rezemate pe o bază rigidă, ale căror capete sînt unite printr-o „placă", formată din elemente verticale incompresibile, care se deformează numai prin forfecare transversală — stratul forfecat (fig. 1). Constanta elastică a arcurilor k şi a stratului forfecat G, împreună cu masa pe unitatea de suprafaţă m a stratului forfecat, reprezintă cei trei parametri ai fundaţiei. Este acelaşi număr de parametri ca în cazul continuumului elastic inerţial, cu deosebirea că aici cei trei parametri nu sînt simple constante fizice ale materialului fundaţiei, depinzînd de grosimea stratului elastic modelat şi de condiţiile de rezemare.

Ecuaţia constitutivă corespunzătoare (relaţia între presiunea normală exterioară p şi tasarea suprafeţei w) este

$$p = kw - G\nabla^2 w + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{1}$$

unde ∇^2 este operatorul lui Laplace bidimensional. La aceeași ecuație se ajunge dacă se consideră inerția membranei din modelul Filonenko-Borodici [16].

Sfera problemelor ce se pot rezolva folosind astfel de modele de fundații este relativ restrînsă. Modelul este anizotrop, permițînd doar

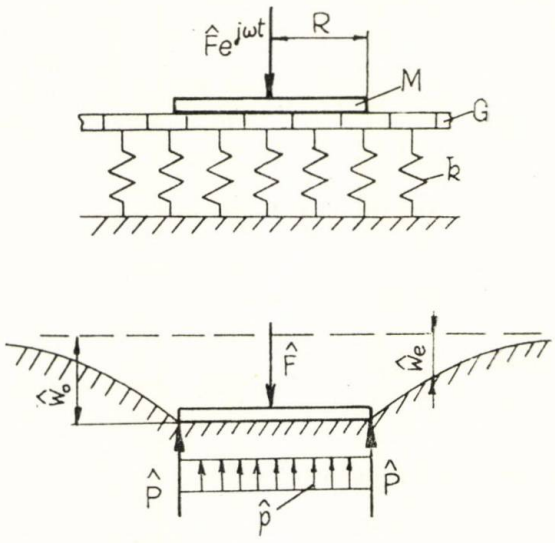


Fig. 1

deplasări verticale și presiuni normale la suprafață. Rezultă că în probleme dinamice se pot considera doar vibrații de translație verticală și de rotație în jurul unei axe orizontale.

Modelul descrie comportarea unor straturi deformabile de grosime finită, rezemate pe o bază rigidă, fiind aplicabil fie unor tipuri speciale de carpete cu proeminențe laterale sau cu caneluri, folosite în izolarea vibrațiilor, fie unor straturi subțiri din materiale cu coeficientul lui Poisson apropiat de zero, avînd, de preferință, inserții sau cruste superficiale. Studiul vibrațiilor amortizate se face ușor, prin introducerea parametrilor complecși ai fundației, cu ajutorul cărora se consideră amortizarea histeretică în materialul de suport.

3. VIBRAȚIILE FORȚATE NEAMORTIZATE

Se consideră discul circular rigid din figura 1, rezemat pe o fundație inerțială de tip Pasternak, avînd o ecuație constitutivă de forma

$$p(r, t) = kw(r, t) - G\nabla_r^2 w(r, t) + m\frac{\partial^2 w(r, t)}{\partial t^2}. \tag{1a}$$

Pentru o excitație staționară

$$p(r, t) = \hat{p}(r)\, e^{j\omega t}, \tag{2}$$

răspunsul fundaţiei elastice este

$$w(r,t) = \hat{w}(r)\, e^{j\omega t}. \tag{3}$$

Înlocuind (2) şi (3) în (1a) şi notînd

$$\rho = \frac{r}{R}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{k}{G}}\, R, \quad \overline{p}(\rho) = \frac{\hat{p}(\rho) R^2}{G}, \tag{4}$$

$$\omega_n = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \Omega_n = \frac{\omega}{\omega_n}, \tag{5}$$

rezultă ecuaţia constitutivă sub forma

$$\frac{d^2\hat{w}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\hat{w}}{d\rho} - \gamma^2(1 - \Omega_n^2)\,\hat{w} = -\,\overline{p}(\rho). \tag{6}$$

Forţa tăietoare în fundaţie este

$$P_f(r,\, t) = \hat{P}_f(r)\, e^{j\omega t} = G\,\frac{\partial w(r,\, t)}{\partial r} \tag{7}$$

sau, ţinînd cont de (3) şi (4),

$$\hat{P}_f(\rho) = \frac{G}{R}\,\frac{d\hat{w}}{d\rho}; \tag{8}$$

Se vor nota cu indicii i, respectiv e, de plasărileîn interiorul şi exteriorul suprafeţei de contact. În cazul vibraţiilor axial-simetrice, condiţiile la limită de tip mixt ale problemei sînt următoarele:
1) tasare uniformă sub discul rigid :

$$0 \leqslant \rho \leqslant 1, \quad \hat{w}_i = \text{const.} = \hat{w}_0, \tag{9}$$

2) presiune normală exterioară nulă pe suprafaţa liberă a fundaţiei :

$$1 < \rho < \infty, \quad \overline{p}\,(\rho) = 0. \tag{10}$$

Condiţia (9) conduce la o distribuţie uniformă a presiunii de contact sub disc

$$\hat{p}(\rho) = k(1 - \Omega_n^2)\,\hat{w}_0. \tag{11}$$

Reacțiunea liniară uniform distribuită pe contur este

$$P = \hat{P}e^{j\omega t} = -\left[P_f(r, t)\right]_{r=R}, \tag{12}$$

în care

$$\hat{P} = -\frac{G}{R}\left[\frac{d\hat{w}_e}{d\rho}\right]_{\rho=1}. \tag{13}$$

Dacă se notează cu M masa totală a discului, ecuația de echilibru pe verticală se scrie

$$F = 2\pi RP + \pi R^2 p + M\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{14}$$

Introducînd „factorul masic"

$$\psi = \frac{M}{\pi R^2 m} \tag{15}$$

și folosind relațiile precedente, ecuația (14) devine

$$\hat{F} = \pi R^2 k\left\{\frac{2}{\gamma^2}\left[\frac{d\hat{w}_e}{d\rho}\right]_{\rho=1} + [1 - (1+\psi)\Omega_n^2]\hat{w}_0\right\}. \tag{16}$$

Cazul I, $\Omega_n < 1$. Se notează

$$\overline{\gamma} = \gamma(1 - \Omega^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{17}$$

Pentru punctele suprafeței libere a fundației $\overline{p}(\rho) = 0$ și ecuația (6) se scrie

$$\frac{d^2\hat{w}_e}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\hat{w}_e}{d\rho} - \overline{\gamma}^2\hat{w}_e = 0, \tag{18}$$

avînd ca soluție generală

$$\hat{w}_e(\rho) = C_1 I_0(\overline{\gamma}\rho) + C_2 K_0(\overline{\gamma}\rho), \tag{19}$$

în care I_0 și K_0 sînt funcții Bessel modificate, de ordinul zero, de speța întîi, respectiv a doua. Constantele de integrare C_1 și C_2 se determină din următoarele condiții la limită:

$$\begin{aligned} &\rho \to \infty, \quad \hat{w}_e(\rho) = 0, \\ &\rho = 1, \quad \hat{w}_e'(1) = \hat{w}_0, \end{aligned} \tag{20}$$

astfel că amplitudinea deplasării verticale a punctelor suprafeţei libere a fundaţiei este

$$\hat{w}_e(\rho) = \hat{w}_0 \frac{K_0(\bar{\gamma}\rho)}{K_0(\bar{\gamma})}. \tag{21}$$

Dacă se introduc notaţiile

$$\Lambda = 1 - \frac{\psi\Omega_n^2}{1-\Omega_n^2}, \quad \Upsilon = \frac{2}{\bar{\gamma}} \frac{K_1(\bar{\gamma})}{K_0(\bar{\gamma})}, \tag{22}$$

se obţin următoarele expresii pentru amplitudinea deplasării verticale a discului

$$\frac{\hat{w}_0}{w_{st_w}} = \frac{1}{1-\Omega_n^2} \frac{1}{\Lambda+\Upsilon}, \tag{23}$$

amplitudinea reacţiunii uniform distribuite sub disc

$$\frac{\pi R^2}{\hat{F}} \hat{p} = \frac{1}{\Lambda+\Upsilon}, \tag{24}$$

şi amplitudinea reacţiunii liniare, uniform distribuite de-a lungul conturului

$$\frac{2\pi R}{\hat{F}} \hat{P} = \frac{\Upsilon}{\Lambda+\Upsilon}, \tag{25}$$

unde

$$w_{st_w} = \frac{\hat{F}}{\pi R^2 k} \tag{26}$$

este săgeata statică a discului pe fundaţie Winkler de parametru k, iar K_1 este funcţia Bessel modificată de ordinul unu şi speţa a doua.

Prin anularea numitorului expresiei (23) rezultă o relaţie implicită a pulsaţiei de rezonanţă

$$\psi = \frac{1-\Omega_{n_{rez}}^2}{\Omega_{n_{rez}}^2} \left[1 + \frac{2}{\bar{\gamma}_{rez}} \frac{K_1(\bar{\gamma}_{rez})}{K_0(\bar{\gamma}_{rez})}\right], \tag{27}$$

reprezentată grafic în figura 2, pentru diferite valori ale parametrului γ. Curbele converg spre pulsaţia $\Omega_{n_{rez}} = 1$ pentru $\psi = 0$, rezultat calitativ similar cu cel obţinut de Arnold şi colab. [2] pentru discul circular rigid rezemat pe un strat elastic izotrop (modelul continuumului).

În figura 3, factorul masic ψ este prezentat ca funcţie de „factorul de pulsaţie la rezonanţă" $\omega_{rez} R/(G/m)^{\frac{1}{2}}$, similar cu cel folosit în teoria

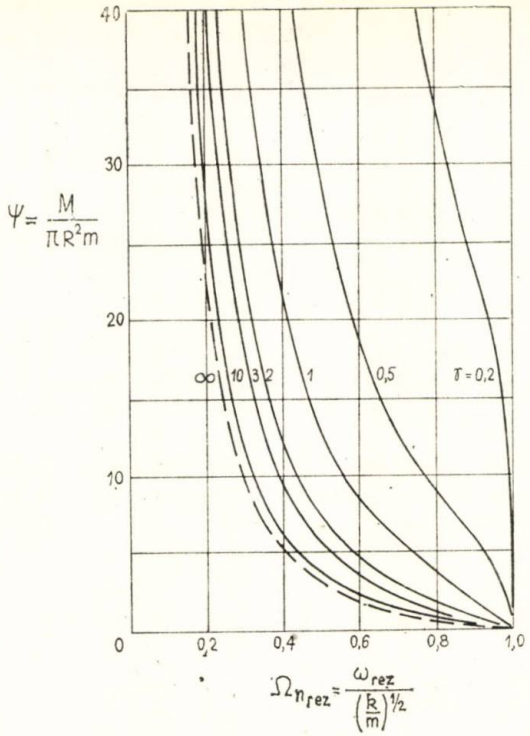

40
30
20
10
0
$\Psi = \frac{M}{\pi R^2 m}$
∞
10
3
2
1
0,5
τ = 0,2
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
$\Omega_{n_{rez}} = \frac{\omega_{rez}}{\left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}}$

Fig. 2

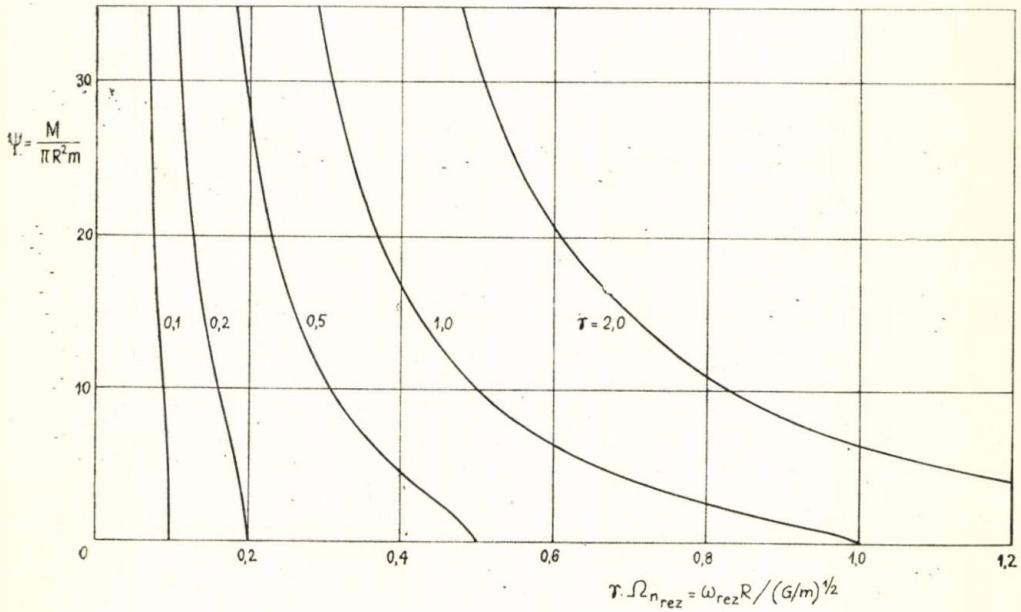

30
20
10
0
$\Psi = \frac{M}{\pi R^2 m}$
0,1
0,2
0,5
1,0
τ = 2,0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
$\tau \cdot \Omega_{n_{rez}} = \omega_{rez} R / (G/m)^{1/2}$

Fig. 3

continuumului elastic izotrop [17]. Curbele au aceeaşi alură cu cele obţinute de Warburton [4] pentru vibraţiile verticale ale discului circular rigid, rezemat pe un strat elastic izotrop.

Cazul II, $\Omega_n > 1$. Cu ajutorul substituţiei

$$\bar{\gamma} = j\bar{\bar{\gamma}}, \tag{28}$$

expresiile (22) devin

$$\Lambda = 1 + \frac{\psi\Omega_n^2}{\Omega_n^2 - 1}, \quad \Upsilon = -\frac{2}{\bar{\bar{\gamma}}} \frac{H_1^{(2)}(\bar{\bar{\gamma}})}{H_0^{(2)}\bar{\bar{\gamma}}}, \tag{29}$$

care, înlocuite în relaţiile (23) — (25), dau expresiile amplitudinilor complexe ale deplasării discului şi ale reacţiunilor fundaţiei. S-au notat cu $H_0^{(2)}$ şi $H_1^{(2)}$ funcţiile Hankel de ordinul zero, respectiv unu, de speţa a doua [18].

Pentru folosirea tabelelor de funcţii cilindrice la trasarea curbelor de răspuns la frecvenţă, este util a scrie expresia (23), în care s-au înlocuit valorile (29), sub forma

$$\frac{\hat{w}_0}{w_{st_w}} = -\frac{1}{\Omega_n^2 - 1} \frac{H_0^{(2)}(\bar{\bar{\gamma}})}{\Lambda H_0^{(2)}(\bar{\bar{\gamma}}) - \frac{2}{\bar{\bar{\gamma}}} H_1^{(2)}(\bar{\bar{\gamma}})} =$$

$$= \frac{1}{\Omega_n^2 - 1} \frac{J_0(\bar{\bar{\gamma}}) + jY_0(\gamma)}{\left[\frac{2}{\bar{\bar{\gamma}}} J_1(\bar{\bar{\gamma}}) - \Lambda J_0(\bar{\bar{\gamma}})\right] - j\left[\frac{2}{\bar{\bar{\gamma}}} Y_1(\bar{\bar{\gamma}}) - \Lambda Y_0(\bar{\bar{\gamma}})\right]}, \tag{30}$$

unde J_0, Y_0 sînt funcţii Bessel de ordinul zero, iar J_1, Y_1 sînt funcţii Bessel de ordinul unu, de speţa întîi, respectiv a doua.

Deoarece în acest caz $\hat{w}_0$ este o amplitudine complexă $\hat{w}_0 = \hat{w}_R + jw_I$, deplasarea discului se poate scrie $w_0 = \hat{w}_0 e^{j\omega t} = (\hat{w}_R + j\hat{w}_I) \times (\cos \omega t + j \sin \omega t)$ şi, conform convenţiei, doar partea reală

$$\mathrm{Re}\,[w_0] = \hat{w}_R \cos \omega t - \hat{w}_I \sin \omega t \tag{31}$$

are sens fizic. Existenţa celui de-al doilea termen din membrul al doilea al expresiei (31) arată că deplasarea discului are o componentă în cuadratură cu forţa perturbatoare, de unde rezultă că pe fiecare ciclu de vibraţie există un aport net de energie în sistem. Aceasta se propagă spre infinit sub formă de unde de suprafaţă. Într-adevăr, înlocuind (28) în (21), rezultă

$$w_e(\rho, t) = \frac{w_{st_w}}{\Omega_n^2 - 1} \frac{H_0^{(2)}(\bar{\bar{\gamma}}\rho)\, e^{j\omega t}}{\frac{2}{\bar{\bar{\gamma}}} H_1^{(2)}(\bar{\bar{\gamma}}) - \Lambda H_0^{(2)}(\bar{\bar{\gamma}})}, \tag{32}$$

descriind o propagare de unde.

Ținînd cont de dezvoltarea asimptotică a funcție Hankel $H_0^{(2)}$, pentru $\rho \to \infty$,

$$H_0^{(2)}(\bar{\bar{\gamma}}\rho) \cong \left(\frac{2}{\pi\bar{\bar{\gamma}}\rho}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-j\left(\bar{\bar{\gamma}}\rho - \frac{\pi}{4}\right)}, \tag{33}$$

expresia (32) se poate aduce la forma

$$w_e(\rho, t) = We^{j\omega\left(t - \frac{\bar{\bar{\gamma}}\rho}{\omega}\right)} = We^{j\omega\left(t - \frac{r}{\frac{\omega R}{\bar{\bar{\gamma}}}}\right)}. \tag{34}$$

Rezultă viteza de propagare a undelor de suprafață

$$V = \frac{\omega R}{\bar{\bar{\gamma}}} = \left(\frac{G}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{\Omega_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{35}$$

în care $(G/m)^{\frac{1}{2}}$ reprezintă viteza de propagare în stratul forfecat inerțial, nerezemat pe arcuri.

4. VIBRAȚIILE FORȚATE AMORTIZATE

Amortizarea internă în materialul fundației se poate introduce în calcule cu ajutorul parametrilor complecși

$$k^* = k(1 + j\delta_k), \quad G^* = G(1 + j\delta_G), \tag{36}$$

în care se consideră deobicei același factor de amortizare $\delta = \delta_k = \delta_G$.

În acest caz, ecuația constitutivă a modelului (6) devine

$$\frac{d^2\hat{w}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\hat{w}}{d\rho} - \gamma^{*2}\hat{w} = \bar{p}^*(\rho), \tag{37}$$

în care

$$\gamma^* = \gamma\left(1 - \frac{\Omega_n^2}{1+j\delta}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{38}$$

$$\bar{p}^*(\rho) = \frac{\hat{p}^*(\rho)R^2}{G(1 + j\delta)},$$

iar $\hat{w}$ este o amplitudine complexă.

Procedînd analog ca în cazul vibraţiilor forţate neamortizate, amplitudinea deplasării verticale a punctelor suprafeţei libere a fundaţiei rezultă

$$\hat{w}_e(\rho) = \hat{w}_0 \frac{K_0(\gamma^* \rho)}{K_0(\gamma^*)}, \tag{39}$$

în care amplitudinea complexă a deplasării verticale a discului $\hat{w}_0$ se obţine din ecuaţia de echilibru pe verticală şi este

$$\frac{\hat{w}_0}{w_{st_w}} = \frac{1}{\left[1 + \frac{2}{\gamma^*} \frac{K_1(\gamma^*)}{K_0(\gamma^*)}\right](1 - \Omega_n^2 + j\delta) - \psi\Omega_n^2}. \tag{40}$$

Pentru evaluarea numerică a expresiei (40) este necesară o transformare a funcţiilor K_0 şi K_1 de argument complex. Se notează

$$\gamma^* = x e^{j\frac{\varphi}{2}}, \tag{41}$$

în care, conform notaţiei (38),

$$x = \gamma \left[\left(1 - \frac{\Omega_n^2}{\Delta^2}\right)^2 + \left(\frac{\delta\Omega_n^2}{\Delta^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\delta}{\frac{\Delta^2}{\Omega_n^2} - 1}, \tag{42}$$

unde

$$\Delta^2 = 1 + \delta^2. \tag{43}$$

În acest caz,

$$K_0(\gamma^*) = Z_0^{(1)}(x, \varphi) + jZ_0^{(2)}(x, \varphi),$$

$$K_1(\gamma^*) = Z_1^{(1)}(x, \varphi) + jZ_1^{(2)}(x, \varphi), \tag{44}$$

în care $Z_0^{(1)}$, $Z_0^{(2)}$, $Z_1^{(1)}$, $Z_1^{(2)}$ sînt date în anexa 1.

Cu notaţiile (42) — (44), expresia (40) se poate aduce la forma

$$\frac{\hat{w}_0}{w_{st_w}} = \frac{\mathfrak{M} + j\mathfrak{N}}{\mathcal{P} + j\mathcal{R}}, \tag{45}$$

în care

$$\mathfrak{M} = Z_0^{(1)}(x,\ \varphi),\quad \mathfrak{N} = Z_0^{(2)}(x,\ \varphi),$$

$$\mathcal{P} = [1 - (1 + \psi)\,\Omega_n^2]\,Z_0^{(1)}(x,\ \varphi) - \delta Z_0^{(2)}(x,\varphi) +$$

$$+\frac{2x}{\gamma^2}\left[\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \delta\sin\frac{\varphi}{2}\right)Z_1^{(1)}(x,\ \varphi) - \left(\sin\frac{\varphi}{2} + \delta\cos\frac{\varphi}{2}\right)Z_1^{(2)}(x,\ \varphi)\right],$$

$$\mathcal{R} = [1 - (1 + \psi)\,\Omega_n^2]\,Z_0^{(2)}(x,\ \varphi) + \delta Z_0^{(1)}(x,\ \varphi) +$$

$$+\frac{2x}{\gamma^2}\left[\left(\sin\frac{\varphi}{2} + \delta\cos\frac{\varphi}{2}\right)Z_1^{(1)}(x,\ \varphi) + \left(\cos\frac{\varphi}{2} - \delta\sin\frac{\varphi}{2}\right)Z_1^{(2)}(x,\ \varphi)\right]. \quad (46)$$

Modulul expresiei (45) este o măsură a răspunsului dinamic al discului circular rigid, rezemat pe o fundație inerțială amortizantă Pasternak.

5. DETERMINAREA EXPERIMENTALĂ A PARAMETRILOR DINAMICI AI FUNDAȚIEI

5.1. PRINCIPIUL METODEI

Determinarea experimentală a parametrilor dinamici ai unei fundații inerțiale Pasternak se poate face printr-o metodă „de rezonanță", în două etape.

Etapa I. Un disc rigid, de rază R și masă M cunoscute, se așează pe o fundație inerțială Pasternak avînd aceeași suprafață ca discul (fig. 4*a*) și este acționat de o forță armonică $\hat{F}e^{j\omega t}$. În aceste condiții, interacțiunile de forfecare ale modelului Pasternak nu se manifestă, astfel că fundația

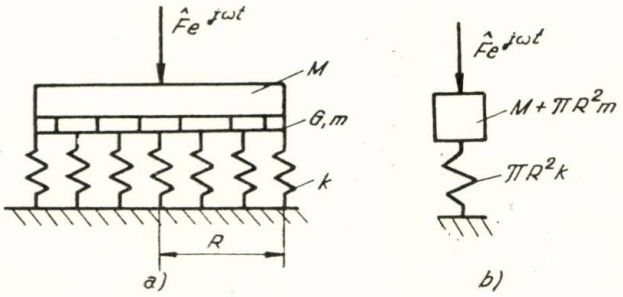


Fig. 4

poate fi asimilată cu un model Winkler inerțial, la care lucrează numai porțiunea în contact direct cu discul.

Sistemul din figura 4*a* poate fi schematizat ca în figura 4*b*. Fie

$$X = \hat{X}e^{j(\omega t - \theta)} \quad (47)$$

răspunsul masei sistemului din figura 4*b*. Dacă la diferite pulsaţii excitatoare ω, se măsoară receptanţa $\hat{X}/\hat{F}$ şi defazajul θ între $\hat{X}$ şi $\hat{F}$, se pot determina trei dintre parametrii sistemului: factorul de amortizare δ, coeficientul de tasare dinamic

$$k = \frac{1}{\pi R^2 \delta \left(\frac{\hat{X}}{\hat{F}}\right)_{\text{rez}}}, \tag{48}$$

şi parametrul inerţial al fundaţiei

$$m = \frac{1}{\pi R^2}\left(\frac{\pi R^2 k}{\omega_n^2} - M\right), \tag{49}$$

unde ω_n este pulsaţia proprie a sistemului, iar $(\hat{X}/\hat{F})_{\text{rez}}$ — receptanţa la $\omega = \omega_n$.

Etapa II. Discul rigid, de rază R, masă $M = M_1$ şi acţionat de forţa $\hat{F}e^{j\omega t}$, se aşează apoi pe o fundaţie inerţială Pasternak avînd o suprafaţă suficient de mare pentru a putea fi considerată infinită şi se determină pulsaţia de rezonanţă ω_{P_1}.

Se calculează factorul masic

$$\psi_1 = \frac{M_1}{\pi R^2 m} \tag{50}$$

şi pulsaţia de rezonanţă adimensională

$$\Omega_{\text{rez}_1} = \frac{\omega_{P_1}}{\left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}} \tag{51}$$

şi se reprezintă grafic punctul respectiv în coordonate $\psi - \Omega_{\text{rez}}$. Se repetă experienţa cu discuri de aceeaşi rază dar de mase diferite M_2, M_3, $M_4, \ldots$, pentru care se determină pulsaţiile de rezonanţă ω_{P_2}, ω_{P_3}, $\omega_{P_4}, \ldots$ şi se reprezintă rezultatele grafic în coordonate $\psi - \Omega_{\text{rez}}$.

Cu ajutorul metodei celor mai mici patrate se determină curba din figura 3 care trece prin aceste puncte. Parametrul adimensional $\gamma = R(k/G)^{\frac{1}{2}}$ al acestei curbe este folosit apoi la determinarea celui de-al doilea parametru elastic al fundaţiei

$$G = k\left(\frac{R}{\gamma}\right)^2. \tag{52}$$

Verificarea se face repetînd experiențele cu discuri de raze diferite, punctele respective din graficul $\psi - \Omega_{rez}$ trebuind să se înscrie pe curbele de parametru corespunzător.

5.2. INSTALAȚIA EXPERIMENTALĂ

Schema bloc a echipamentului folosit este prezentată în figura 5. Discul a fost fixat de un „cap de impedanțe" acționat de un vibrator electromagnetic avînd forța de împingere de 10 N. Excitația vibratorului a fost o oscilație sinusoidală produsă de un generator cu frecvența variabilă și amplificată de un amplificator de putere. Semnalele de forță R_F

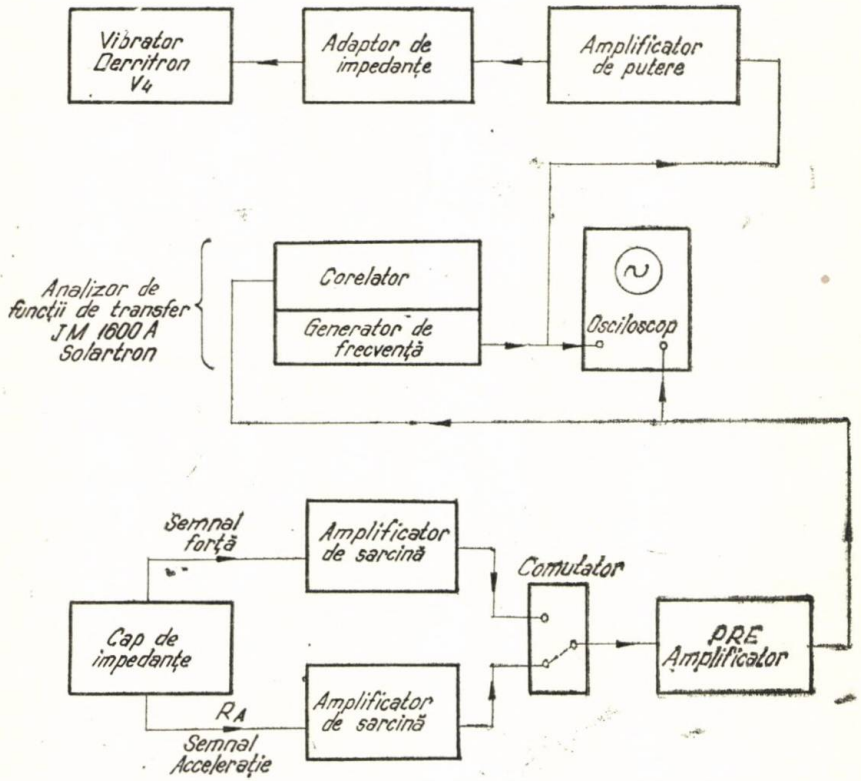


Fig. 5

și de accelerație R_A de la capul de impedanțe au fost întîi amplificate, apoi observate pe un osciloscop și măsurate cu voltmetrul corelatorului analizorului de funcții de transfer JM 1 600 A.

În scopul determinării masei mobile a capului de impedanțe (situată de aceeași parte a captorului de forțe ca și masele discurilor atașate) și a

etalonării instalaţiei de măsură, s-a realizat montajul din figura 6. Ataşînd mase cunoscute sistemului „cap de impedanţe — vibrator electromagnetic", au fost măsurate semnalele la ieşirea captorului de forţe R_F şi a celui de acceleraţii R_A, la cîteva frecvenţe excitatoare. Conform legii a doua a dinamicii şi ţinînd cont de liniaritatea sistemului de măsură, rezultă că trebuie să existe o relaţie liniară între raportul R_F/R_A şi masa

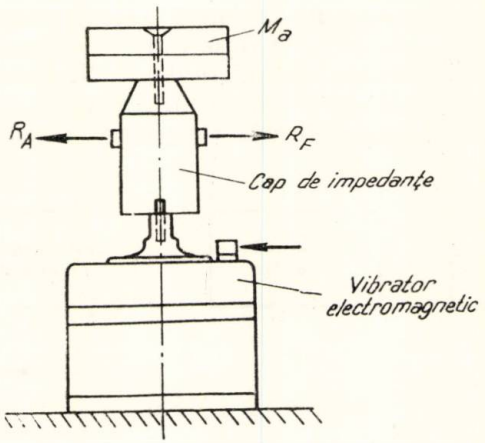


Fig. 6

M_a ataşată sistemului. Dacă forţa este $\hat{F} = \beta_F R_F$, acceleraţia este $\hat{a} = \beta_A R_A$ (unde β_F şi β_A sînt factori de proporţionalitate), M_h este masa mobilă a capului de impedanţe şi M_t este masa mobilă totală, atunci

$$M_t = M_h + M_a = \frac{\hat{F}}{\hat{a}} = \frac{\beta_F}{\beta_A}\frac{R_F}{R_A} = \frac{1}{\beta}\frac{R_F}{R_A},$$

unde s-a notat

$$\beta = \frac{\beta_A}{\beta_F} = \frac{\dfrac{R_F}{R_A}}{M_h + M_a}.$$

Reprezentînd grafic dependenţa $(R_F/R_A) - M_a$, prin extrapolarea dreptei de etalonare s-a obţinut valoarea masei mobile a capului de impedanţe $M_h = 31{,}5$ grame şi valoarea constantei de etalonare $\beta = 9{,}03$ m/N.s^2 folosită la calculul receptanţei cu formula

$$\frac{\text{deplasare}}{\text{forţă}} = \frac{\hat{X}}{\hat{F}} = \frac{\hat{a}}{\omega^2\hat{F}} = \frac{\beta_A}{\beta_F}\frac{R_A}{\omega^2 R_F} = \beta\frac{R_A}{4\pi^2 f^2 R_F} = \beta\frac{R_d}{R_F}. \qquad (53)$$

5.3. STUDIUL PROPRIETĂȚILOR DINAMICE ALE MATERIALULUI FOLOSIT CA SUPORT

Un model de fundație descrie cu atît mai corect comportarea mecanică a unui anumit mediu de rezemare, cu cît proprietățile acestuia din urmă îndeplinesc mai corect ipotezele introduse de modelul analitic. În cazul vibrațiilor verticale simetrice, condiția de deplasări orizontale nule în fundație poate fi realizată numai cu un material de suport la care coeficientul lui Poisson este egal cu zero (sau cel puțin apropiat de zero). Folosind indicațiile din lucrarea [2], s-a ales un cauciuc buretos (similar ca aspect cu poliuretanul expandat) pentru care firma furnizoare a indicat următoarele caracteristici mecanice (la temperatura de 20°C): modulul lui Young la o deformație de 20%, $E_{st} = 0{,}45$ daN/cm^2; coeficientul de contracție transversală, $\nu \cong 0$; masa specifică, $\rho = 0{,}31$ g/cm^3. Materialul este furnizat în straturi de 3 cm grosime, avînd lipită pe o față o pînză cauciucată sub care, datorită răcirii bruște în matriță, există un strat mai dens, cu pori mai mici. În acest fel este materializat „stratul forfecat" din modelul Pasternak sau membrana din modelul Filonenko-Borodici, materialul ales corespunzînd ca structură modelului cu doi parametri elastici.

Pentru determinarea modulului de elasticitate dinamic și a factorului de amortizare ale materialului s-a folosit o metodă bazată pe ana-

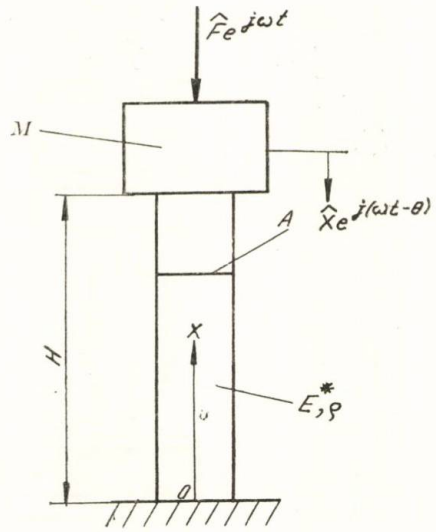


Fig. 7

liza răspunsului dinamic staționar al sistemului din figura 7. Aici masa rigidă M este atașată în capătul unei bare de lungime H și secțiune transversală A, dintr-un material avînd masa specifică ρ și modulul complex $E^* = E_{din}(1 + j\delta)$, lipită la capătul inferior de o suprafață rigidă.

Determinînd, la diverse pulsaţii excitatoare ω, receptanţa sistemului $\hat{X}/\hat{F}$ şi defazajul θ între forţă şi deplasarea masei, s-a determinat E^* prin încercări succesive din relaţiile :

$$\frac{\hat{X}}{\hat{F}} e^{-j\theta} = \frac{1}{\frac{AE^*}{H} \frac{\alpha^* H}{\operatorname{tg} \alpha^* H} - M\omega^2}, \tag{54}$$

$$\alpha^* = \omega \left(\frac{\rho}{E^*}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{55}$$

Experienţele s-au făcut folosind izolatori (6) lipsiţi cu faţa inferioară de o bază rigidă (7) şi cu faţa superioară de discuri (5), fixate cu un

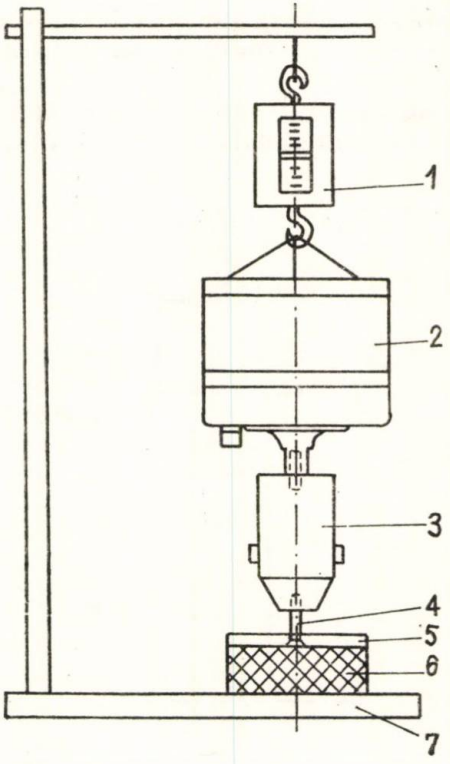


Fig. 8

şurub (4) de capul de impedanţe (3) (fig. 8). Vibratorul (2) a fost suspendat elastic prin intermediul unui dinamometru (1) cu care s-a verificat ca presiunea statică pe izolator să fie aceeaşi în toate determinările.

În domeniul relativ restrîns de frecvențe excitatoare în care s-a lucrat (între 25 și 90 Hz), s-a înregistrat o valoare aproximativ constantă a modulului de elasticitate dinamic $E_{din} = 12{,}45$ N/cm² și un factor de amortizare ale cărui valori au crescut sensibil cu frecvența între limitele $\delta = 0{,}23 \ldots\ldots 0{,}45$, panta dreptei care ar aproxima curba $\delta(f)$ fiind 4/5.

Experiențele au relevat existența concomitentă a două mecanisme de amortizare, unul histeretic — caracterizînd materialul, altul de amortizare vîscoasă aproximativ liniară — determinat de un fenomen de „pompaj" (ieșirea și intrarea aerului în pori).

5.4. DESFĂȘURAREA ȘI REZULTATELE ÎNCERCĂRILOR

În cadrul *primei etape* prezentate în paragraful 5.1., s-au făcut măsurări de receptanță pe izolatori (tăiați din stratul deformabil) avînd diametre de 52, 66 și 78 mm, folosind discuri de același diametru și de mase diferite (varriind între 70 și 420 grame).

S-a folosit montajul din figura 8 și instalația din figura 6. Pentru fiecare din cele 12 cazuri studiate s-a desenat o diagramă polară a receptanței complexe de tipul celei trasate cu linie continuă în figura 9 din care, pe baza etalonării globale prealabile și folosind metoda Kennedy-Pancu [19], s-au determinat caracteristicile dinamice ale sistemului respectiv. Folosind relațiile (48) și (49) s-au determinat doi dintre parametrii modelului de fundație inerțială Pasternak

$$k = 4{,}15 \text{ N/cm}^2 \quad \text{și} \quad m = 2{,}05 \text{ kg/m}^2.$$

În cadrul *etapei a doua*, s-a folosit tot montajul din figura 8, cu diferența că izolatorul (6) a fost înlocuit cu un strat deformabil de aceeași grosime, însă de suprafață mult mai mare. Stratul de cauciuc buretos a fost lipit pe toată suprafața inferioară de un bloc metalic masiv, iar discul a fost lipit pe toată suprafața de contact de stratul deformabil. Aceasta a modificat puțin condițiile la limită admise în analiza teoretică, în schimb a asigurat condiția de contact bilateral, realizînd și o ghidare a mișcării masei oscilante.

S-a folosit aceeași gamă de discuri ca în etapa I, ridicîndu-se în fiecare caz o diagramă polară de tipul celei trasate cu linie întreruptă în figura 9, pe care s-a determinat frecvența de rezonanță pe baza criteriului Kennedy-Pancu. Se observă că membrana superficială a diminuat disiparea de energie prin „pompaj", împiedicînd mișcarea aerului prin pori, astfel că diagrama polară nu mai este rotită. S-au calculat mărimile ψ și Ω_{rez} conform relațiilor (50) și (51), iar punctele corespunzătoare au fost reprezentate în figura 10, trasîndu-se și curbele teoretice de ecuație (27) care aproximează cel mai bine aceste puncte. Determinînd parametrul γ al fiecărei curbe, din relația (52) a rezultat al treilea parametru al fundației, media valorilor obținute fiind $G = 17{,}7$ N/cm. Procedeul are dezavantajele inerente unei metode grafice, fiind însă folosit în mod curent la determinarea parametrilor elastici ai multor medii de rezemare.

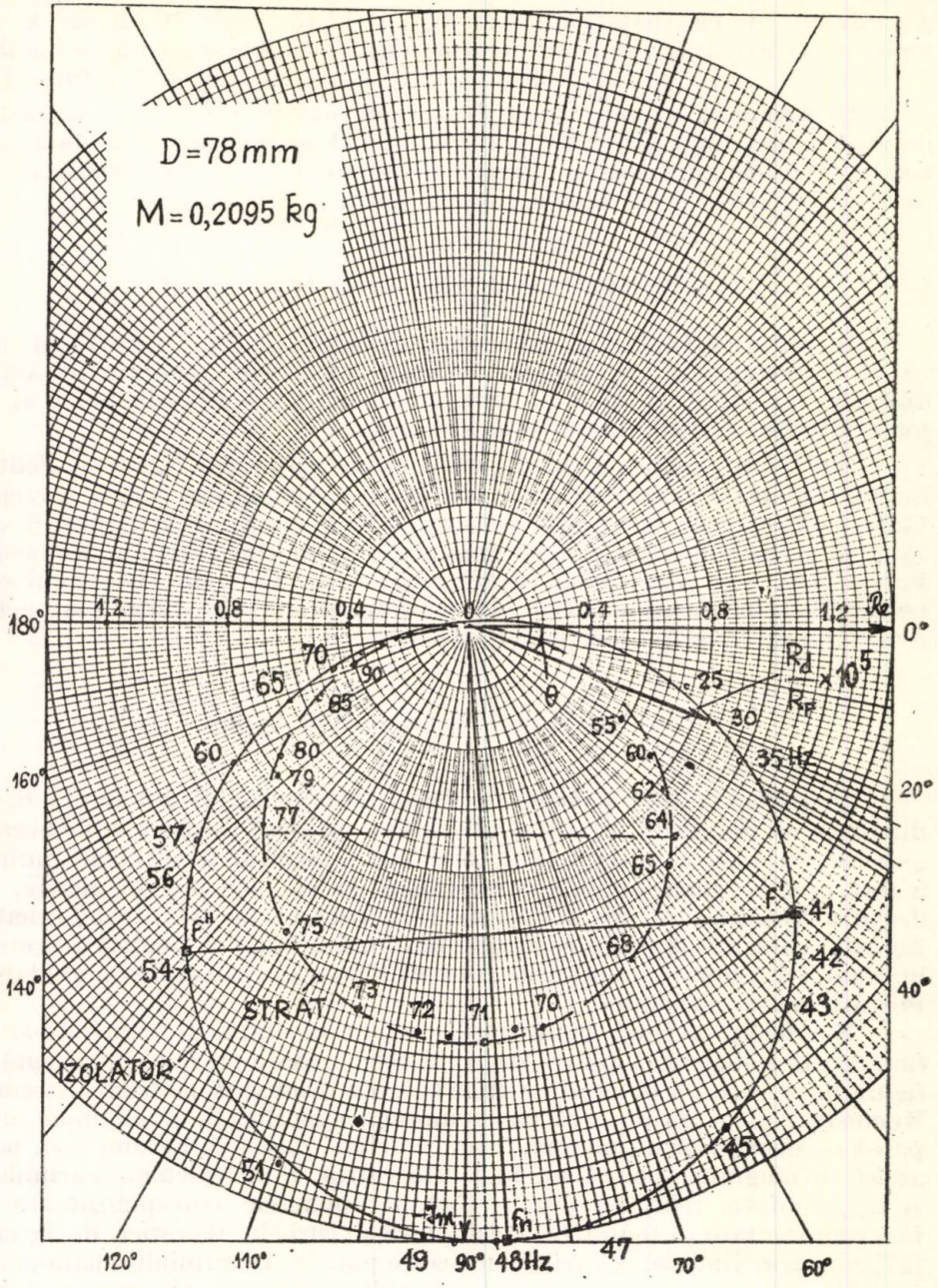

D=78 mm
M=0,2095 kg
180°
160°
140°
120°
110°
90°
70°
60°
0°
20°
40°
1,2
0,8
0,4
0
0,4
0,8
1,2
Re
$\frac{R_d}{R_F} \times 10^5$
θ
35 Hz
48 Hz
STRAT
IZOLATOR
F'
F''
Im
fn
25
30
35
41
42
43
45
47
49
51
54
56
57
60
65
70
55
60
62
64
65
68
70
71
72
73
75
77
79
80
85
90

Fig. 9

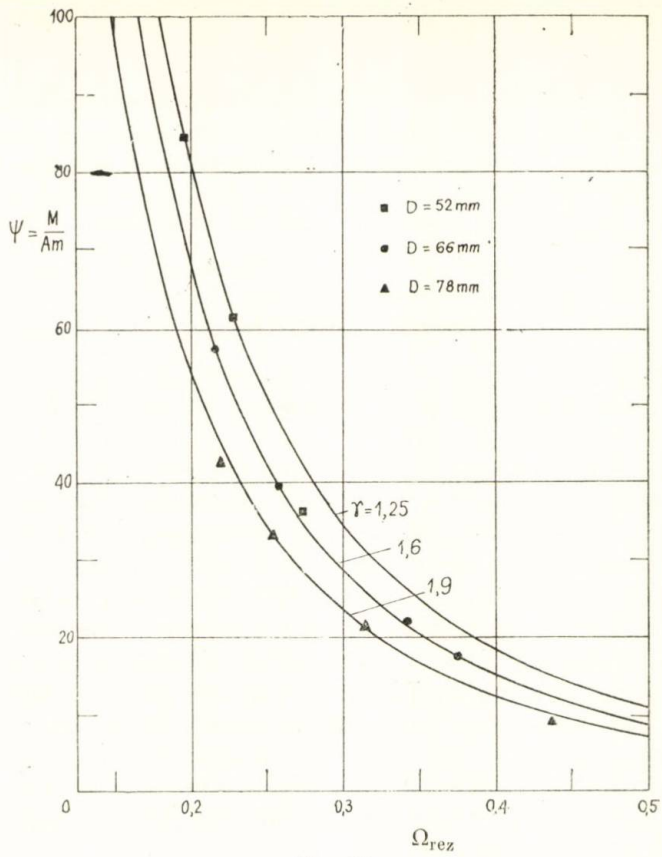


Fig. 10

6. CONCLUZII

Răspunsul dinamic al stratului deformabil studiat *poate* fi descris de modelul de fundație inerțială Pasternak atunci cînd interesează exclusiv frecvența de rezonanță a mișcării armonice a discului rigid așezat pe suprafața stratului.

Fundația inerțială Pasternak este cel mai simplu model care propagă unde de suprafață și la care răspunsul unui corp rigid rezemat continuu depinde de dimensiunile suprafeței de contact. Modelul are două domenii de frecvențe cu răspuns calitativ diferit.

În cazul discului cu masă proprie neglijabilă, acestea sînt următoarele : 1 — Pentru $\omega < (k/m)^{\frac{1}{2}}$, fundația lucrează ca un element elastic cu parametri concentrați, energia acumulată într-o parte a ciclului de vibrație ($T = 2\pi/\omega$) fiind redată integral discului în cealaltă parte a ciclului. Deplasările se fac în fază cu excitația. Nu există amortizare prin radiație. 2 — Pentru $\omega > (k/m)^{\frac{1}{2}}$, fundația lucrează ca un absorbitor continuu de energie. Deplasarea discului este defazată față de excitație,

astfel că existenţa unei componente în cvadratură cu excitaţia produce amortizare prin radiaţie. La suprafaţa fundaţiei se propagă unde a căror viteză variază de la o valoare infinită — pentru $\omega = (k/m)^{\frac{1}{2}}$, la valoarea corespunzătoare stratului forfecat inerţial nerezemat pe arcuri $(G/m)^{\frac{1}{2}}$ — — pentru $\omega \to \infty$. Distribuţia presiunii de contact sub disc, deşi discontinuă, este dependentă de frecvenţa perturbatoare, rezultat ce se poate obţine doar cu un model inerţial. Modelul propus are o singură pulsaţie proprie $\omega = (k/m)^{\frac{1}{2}}$, deci aproximează răspunsul la joasă frecvenţă al unui strat deformabil amortizant continuu.

În cazul discului cu masă proprie, frecvenţa de rezonanţă se deplasează în domeniul $\omega < (k/m)^{\frac{1}{2}}$, deci rezonanţa nu este limitată de radiaţie (ca la modelele semi-infinite), deplasările crescînd nelimitat dacă se neglijează amortizarea internă.

În cazul materialului studiat, existenţa concomitentă a trei mecanisme diferite de disipare a energiei — amortizare histeretică, vîscoasă şi prin radiaţie — la care s-a adăugat modificarea condiţiilor de contact — adeziv în loc de rezemare liberă — au făcut imposibilă calcularea amplitudinilor la rezonanţă pe baza teoriei dezvoltate în paragraful 4. Acesta este însă un dezavantaj comun tuturor metodelor experimentale propuse sau efectuate pînă în prezent. În această situaţie, o primă cerinţă este extinderea metodei Kennedy-Pancu la diagrame polare ce descriu răspunsul unui sistem cu amortizare vîscoasă puternică. De asemenea, pentru evitarea diferenţelor între strat şi izolatorul decupat din strat (în ceea ce priveşte amortizarea), obiectul cercetărilor ulterioare îl constituie fundamentarea unei metode experimentale în care toate determinările să se facă numai pe strat.

ANEXA 1

Expresiile funcţiilor din relaţiile (46) :

$$Z_0^{(1)}(x, \varphi) = \frac{1}{2}\left[K_0(xe^{j\frac{\varphi}{2}}) + K_0(xe^{-j\frac{\varphi}{2}})\right] =$$

$$= X_0^{(1)}(x, \varphi)\left(\ln\frac{2}{x} - \gamma\right) + \frac{\varphi}{2} X_0^{(2)}(x, \varphi) +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{(m!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m}\right)\cos m\varphi,$$

$$Z_0^{(2)}(x,\varphi)=\frac{1}{2j}[K_0(xe^{j\frac{\varphi}{2}})-K_0(xe^{-j\frac{\varphi}{2}})]=$$

$$=X_0^{(2)}(x,\varphi)\left(\ln\frac{2}{x}-\gamma\right)-\frac{\varphi}{2}X_0^{(1)}(x,\varphi)+$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{(m!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}\right)\sin m\varphi,$$

$$Z_1^{(1)}(x,\varphi)=\frac{1}{2}[K_1(xe^{j\frac{\varphi}{2}})+K_1(xe^{-j\frac{\varphi}{2}})]=$$

$$=\left(\ln\frac{x}{2}+\gamma\right)X_1^{(1)}(x,\varphi)-\frac{\varphi}{2}X_1^{(2)}(x,\varphi)+\frac{1}{x}\cos\frac{\varphi}{2}-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1}\cos(2m+1)\frac{\varphi}{2}}{m!(m+1)!}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}+\right.$$

$$\left.+1+\ldots+\frac{1}{m+1}\right),$$

$$Z_1^{(2)}(x,\varphi)=\frac{1}{2j}[K_1(xe^{j\frac{\varphi}{2}})-K_1(xe^{-j\frac{\varphi}{2}})]=$$

$$=\left(\ln\frac{x}{2}+\gamma\right)X_1^{(2)}(x,\varphi)+\frac{\varphi}{2}X_1^{(1)}(x,\varphi)-\frac{1}{x}\sin\frac{\varphi}{2}-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1}\sin(2m+1)\frac{\varphi}{2}}{m!\,(m+1)!}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}+\right.$$

$$\left.+1+\ldots+\frac{1}{m+1}\right)$$

$\gamma=0{,}577215$ este constanta lui Euler.

$$X_0^{(1)}(x,\varphi)=\frac{1}{2}[I_0(xe^{j\frac{\varphi}{2}})+I_0(xe^{-j\frac{\varphi}{2}})]=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{(m!)^2}\cos m\varphi,$$

$$X_0^{(2)}(x,\varphi)=\frac{1}{2j}[I_0(xe^{j\frac{\varphi}{2}})-I_0(xe^{-j\frac{\varphi}{2}})]=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{(m!)^2}\sin m\varphi,$$

$$X_1^{(1)}(x, \varphi) = \frac{1}{2}\left[I_1(xe^{j\frac{\varphi}{2}}) + I_1(xe^{-j\frac{\varphi}{2}})\right] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1}}{m!\,(m+1)!} \cos(2m+1)\frac{\varphi}{2},$$

$$X_1^{(2)}(x, \varphi) = \frac{1}{2j}\left[I_1(xe^{j\frac{\varphi}{2}}) - I_1(xe^{-j\frac{\varphi}{2}})\right] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1}}{m!\,(m+1)!} \sin(2m+1)\frac{\varphi}{2}.$$

Cu substituția

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

funcțiile de mai sus pot fi transformate în funcțiile folosite de Vlasov și Leontiev la calculul plăcilor rezemate elastic:

$$u_0(x, \alpha) = X_0^{(1)}(x, \varphi), \qquad u_1(x, \alpha) = X_1^{(2)}(x, \varphi),$$

$$v_0(x, \alpha) = -X_0^{(2)}(x, \varphi), \qquad v_1(x, \alpha) = X_1^{(1)}(x, \varphi),$$

$$f_0(x, \alpha) = -\frac{2}{\pi} Z_0^{(2)}(x, \varphi), \qquad f_1(x, \alpha) = -\frac{2}{\pi} Z_1^{(1)}(x, \varphi),$$

$$g_0(x, \alpha) = -\frac{2}{\pi} Z_0^{(1)}(x, \varphi), \qquad g_1(x, \alpha) = \frac{2}{\pi} Z_1^{(2)}(x, \varphi),$$

tabelate în lucrarea [9] pentru o gamă redusă de valori x și α.

Primită la redacție la 10 martie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. A. D. Kerr, *Elastic and viscoelastic foundation models*, Journal of Applied Mechanics, **31**, 491–498 (1964).
2. R. N. Arnold, G. N. Bycroft și G. B. Warburton, *Forced vibrations of a body on an infinite elastic solid*, Journal of Applied Mechanics, **22**, 391–401 (1955).
3. G. N. Bycroft, *Forced vibrations of a rigid circular plate on a semi-infinite elastic space and on an elastic stratum*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, **248**, *A 948*, 327–368 (1956).
4. G. B. Warburton, *Forced vibration of a body on an elastic stratum*, Journal of Applied Mechanics, **24**, 55–58 (1957).
5. T. Kobori, R. Minai și T. Suzuki, *Dynamic ground compliance of rectangular foundation on an elastic stratum over a semi-infinite rigid medium*, Annual Report, Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University, **10A**, 315–341 (1967).

6. A. O. Awojobi, *Torsional vibration of a rigid circular body on an infinite elastic stratum*, International Journal of Solids and Structures, **5**, 369–378 (1969).
7. G. M. L. Gladwell, *The forced torsional vibration of an elastic stratum*, International Journal of Engineering Science, **7**, 1011–1024 (1969).
8. R. V. Whitman, *Equivalent lumped system for structure founded upon stratum of soil*, Proceedings 4th World Conference on Earthquake Engineering, Santiago de Chile, **3**, 133–142 (1969).
9. V. Z. Vlasov și N. N. Leontiev, *Balki, plitî i obolociki na uprugom osnovanii*, Fizmatghiz, Moskva, 1960.
10. G. B. Muravski, *K rascetu vînujdennîh vertikalinîh kolebanii kroglovo ștampa, opiraiușcegosia na uprugoe osnovanie, Osnovania, Fundamentî i Mehanika* Gruntov, **1**, 7–8, (1966).
11. M. Radeș, *Forced vibrations of a rigid body on a three-parameter foundation*, International Journal of Mechanical Sciences, **13**, 573–583 (1971).
12. — *Dynamic response of a rigid circular plate on a Kerr-type foundation model*, International Journal of Engineering Science, **9**, 1061–1073 (1971).
13. — *Steady-state response of a finite beam on a Pasternak-type foundation*, International Journal of Solids and Structures, **6**, 739–756 (1970).
14. G. B. Muravski, *O modeli uprugovo osnovania*, Stroitelnaia Mehanika i Rascet Soorujenii, *6*, 14–17, (1967).
15. M. Radeș, *Dynamic analysis of a Pasternak-type inertial foundation*, Revue Roumaine des Sciences Techniques – Mécanique Appliquée, **16**, 1107–1134 (1971).
16. M. M. Filonenko-Borodici, *Nekotorîe priblijennîe teorii uprugovo osnovania*, Ucenie Zapiski Moskovskogo Gosud. Universiteta, Mehanika, **46**, 3–18 (1940).
17. F. E. Richart Jr. J. R. Hall Jr. și R. D. Woods, *Vibrations of Soils and Foundations*, Prentice-Hall, N. J., 1970.
18. G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, 1945.
19. Ch. Kennedy și C. D. P. Pancu, *Use of vectors in vibration measurement and analysis*. Journal of the Aeronautical Sciences, **14**, 603–625 (1947).

RECENZII

ISTVÁN SZABÓ, *Höhere Technische Mechanik. Nach Vorlessungen. Fünfte verbesserte und erweiterte Auflage* (Mecanică tehnică superioară. După prelegeri. Ediția a cincea ameliorată și lărgită). Springer-Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1972. XII + 546 pag., 446 fig.

Încercarea de a cuprinde într-un singur volum toate ramurile principale ale mecanicii corpurilor rigide și deformabile, văzute sub aspectul aplicării lor în problemele tehnicii, este destul de temerară. Marea experiență științifică și pedagogică a autorului i-a permis însă să realizeze un manual care, judecînd după faptul că a ajuns la a cincea ediție, corespunde unor cerințe reale și poate fi utilizat cu folos.

Cartea este împărțită în patru capitole, care corespund, cu unele excepții, celor patru ramuri ale mecanicii tratate. Primul capitol, intitulat principiile mecanicii, cuprinde o fundamentare a staticii pe baza principiului lucrului mecanic virtual, aplicarea acestui principiu la teoria elasticității (metodele energetice ale acestei teorii), principiul lui D'Alembert, acela al lui Hamilton, vibrațiile corzilor, membranelor și barelor, ecuațiile lui Lagrange, mișcarea spațială a solidului rigid și aplicațiile calculului variațional în mecanică.

În capitolul al doilea este prezentată o selecție din problemele teoriei elasticității. După o introducere referitoare la starea de tensiuni și de deformații în elasticitatea liniară, se tratează succesiv starea de tensiuni plană și aceea axial-simetrică. Se trece apoi la teoria plăcilor subțiri, în ipoteza lui Kirchhoff, la o introducere în teoria învelitorilor. Ultimele două paragrafe cuprind torsiunea barelor și problemele de instabilitate.

Capitolul al treilea reprezintă o introducere în teoria plasticității în care, după o serie de considerații cu caracter general, sînt expuse mai multe probleme specifice.

În sfîrșit, ultimul capitol, intitulat teoria lichidelor și gazelor, cuprinde o introducere în mecanica fluidelor. Sînt tratate pe rînd dinamica fluidelor ideale incompresibile, insistîndu-se mai mult asupra mișcărilor potențiale plane, dinamica fluidelor viscoase, în special teoria stratului limită și dinamica gazelor ideale, în special mișcările potențiale și undele de șoc.

Din această sumară prezentare a conținutului cărții credem că se poate constata că autorul a reușit să includă problemele cele mai reprezentative din capitolele de care s-a ocupat. Tratarea este făcută la un nivel matematic corespunzător, în spiritul școlii germane. Un număr destul de mare de aplicații și exerciții completează în mod fericit lucrarea și accentuează caracterul tehnic al acesteia.

Scris cu multă claritate, redactat deosebit de sistematic, manualul se citeşte cu uşurinţă. El se adresează în primul rînd celor care doresc să se familiarizeze cu problemele mecanicii tehnice, fiind deci un manual de învăţămînt. Nu este însă mai puţin adevărat că specialiştii într-unul sau altul din domeniile mecanicii pot găsi în această carte informaţii interesante asupra ansamblului disciplinei.

Prezentarea grafică este excelentă, la nivelul obişnuit al cunoscutei edituri care a publicat-o.

T. Oroveanu

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 32, nr. 2 1973

SUMAR

STUDII

Pag.

E. CARAFOLI şi H. DUMITRESCU, Determinarea undei de combustie într-o curgere supersonică conică 259

CORNELIU I. CRĂCIUN, Creşterea capacităţii de transport în mişcarea de antrenare a fluidelor vîscoase prin procedeul de injecţie 277

N. N. ANTONESCU, Stabilirea eforturilor din eclisele lanţurilor cu role şi zale scurte 291

A. RAICU, Schemele cinematice ale mecanismului cu patru elemente 329

I. VLAD, I. HIRSCH, I. PREDA, ŞT. PARTENIE şi A. POPOVICI, Unele rezultate privind comportarea grupurilor de forţă Diesel-hidraulice ale instalaţiilor de foraj, la mersul în gol şi în sarcină, pe baza cercetărilor experimentale 341

CHIRIAC VASILIU şi I. GHIŢĂ, Corelaţii între rugozitatea căii şi aderenţa pneurilor de automobil 371

VICTOR GIONCU, Stabilitatea elastică a cupolelor pe contur pătrat 387

GORUN MANOLESCU, Starea de echilibru natural pentru rocile din masivele neatacate 421

MIRCEA V. SOARE, MIHAI SIMONICI, Cercetări privind conlucrarea ansamblelor de elemente din beton celular la solicitări orizontale 441

S. CONSTANTINESCU-CĂTUNEŞTI, Cercetări asupra recrudescenţei relaxării de tensiune la sîrme din oţel superior, supuse la coroziune sub tensiune, tratate în prealabil pentru eliminarea totală a relaxării 465

NOTE

TR. BĂDOIU, Notă privind flutterul supersonic al panourilor plane, dreptunghiulare, eterogene, anizotrope 475

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

DAN GH. IONESCU, Contribuţii la istoria mecanicii fluidelor în România pînă la începutul secolului XX 481

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE

VASILE MARCU, A 6-a conferinţă internaţională de metalizare prin pulverizare . . . 495

RECENZII 511

DETERMINAREA UNDEI DE COMBUSTIE ÎNTR-O CURGERE SUPERSONICĂ CONICĂ

de E. CARAFOLI şi H. DUMITRESCU

I.M.F.C.A.

În această lucrare se prezintă o metodă analitică pentru determinarea distribuţiei de viteze şi presiuni în cele două regiuni ale curgerii supersonice din jurul unui con circular, situate de o parte şi de cealaltă a unei unde de combustie. Metoda utilizată [1] se bazează pe o soluţie analitică închisă a mişcării care se produce în spatele undei de şoc şi în spatele undei de combustie, ambele unde presupuse ataşate vîrfului obstacolului conic, ţinînd seama de condiţiile la limite, pe suprafeţele celor două unde, de şoc şi de combustie, precum şi pe suprafaţa conului.

Comparaţia arată că valorile obţinute de J. F. Clarke [2] utilizînd diagrame, pentru o curgere particulară, în care ansamblul undă de şoc şi undă de combustie modifică mărimile caracteristice ale curgerii conservîndu-i, însă, direcţia, concordă cu formulele deduse pe calea acestei metode analitice. Se prezintă, de asemenea, rezultatele pentru trei valori ale semiunghiului la vîrf, $\theta_c = 10°$, $20°$ şi $30°$, considerînd trei valori ale numărului Mach, $M_\infty = 2$, 3 şi 4.

1. CONSIDERAŢII INTRODUCTIVE

Problema curgerilor supersonice, în care o undă de şoc este asociată cu o undă de combustie, poate fi tratată după modelul propus de Clarke [4], potrivit căruia combustia unui amestec gazos reactant este reprezentată ca o suprafaţă de discontinuitate, prin care condiţiile curgerii trec brusc de la valorile lor nearse (reci), la cele arse (calde).

Această aproximaţie locală a fenomenului real de combustie a fost utilizată mai întîi în calculul unor curgeri supersonice bidimensionale [3], şi apoi în cazul curgerii axial-simetrice din jurul unui con circular, fără incidenţă [4], [6]. Pentru acest din urmă caz, metodele de calcul propuse, fie că se bazează pe grafice [4], fie pe aproximaţii succesive, plecînd de la ecuaţia lui Taylor şi Maccoll [6], sînt laborioase şi nu aduc o soluţie analitică pentru determinarea condiţiilor locale ale curgerii în funcţie numai de caracteristicile fizico-chimice ale curentului neperturbat de la infinit.

În lucrarea prezentă ne propunem ca, pe baza soluţiei dată de E. Carafoli şi C. Berbente [1] pentru curgerea fără ardere, să obţinem soluţii

analitice unitare pentru mişcarea produsă de energia degajată prin ardere într-un curent supersonic din jurul unui con circular, fără incidenţă.

Să considerăm, prin urmare, curgerea supersonică axial-simetrică în jurul unui con circular drept cu incidenţă zero, a unui amestec gazos reactant, în ipoteza că acesta se aprinde brusc chiar în vîrful conului datorită creşterii presiunii şi temperaturii în spatele undei de şoc. Curentul reactant neperturbat, paralel cu axa conului, este definit prin numărul Mach M_∞. Curgerea, după un salt prin unda de şoc, suferă o compresie izentropică pînă la suprafaţa undei de combustie, unde are un al doilea salt, după care se comprimă din nou izentropic pînă la suprafaţa conului. De asemenea, presupunem că undele de şoc şi de combustie sînt ataşate în vîrful conului şi că, după fiecare undă, curgerea este supersonică, cu deosebirea că între unda de şoc şi unda de combustie amestecul gazos are aceeaşi compoziţie chimică cu a curentului neperturbat, pe cînd după unda de combustie amestecul este format din gaze arse. În aceste condiţii se poate admite că mişcarea, atît după unda de şoc, cît şi după unda de combustie este conică, adică toate caracteristicile aerodinamice ale curgerii rămîn constante în lungul unei raze vectoare care porneşte din vîrful conului O.

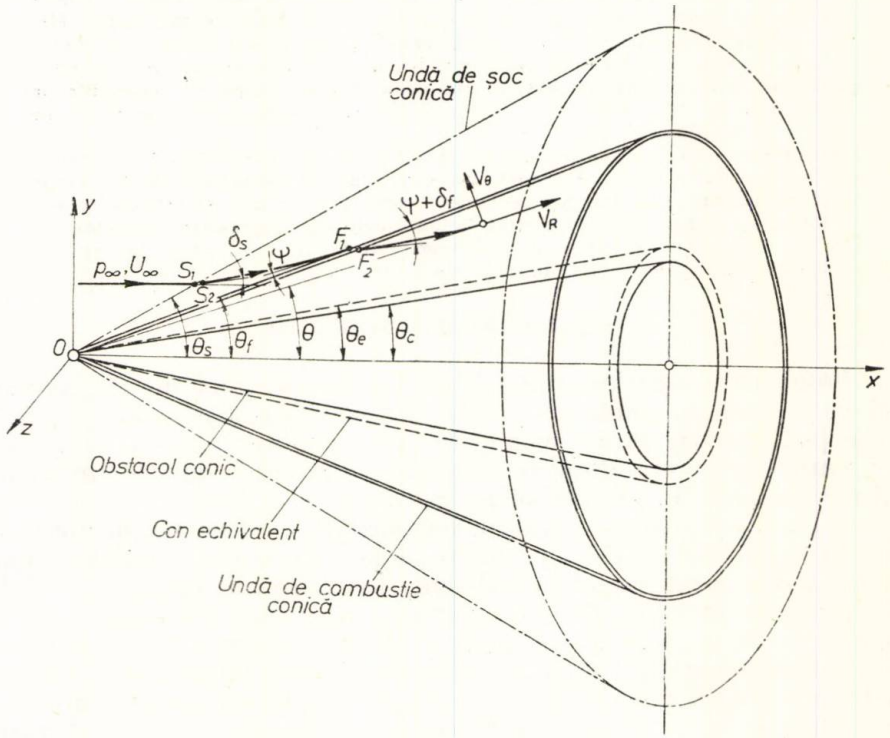


Fig. 1

O asemenea mişcare compresibilă conică poate fi complet determinată în funcţie de variaţiile componentelor vitezei v_R şi v_θ, pe direcţia razei vectoare şi, respectiv, pe normala la aceasta, cu unghiul conic θ (fig. 1). În lucrarea [1] se arată că ecuaţia diferenţială a potenţialului

vitezelor, dedusă din ecuaţiile generale de mişcare şi continuitate, poate fi pusă sub forma

$$V'' + V'\operatorname{ctg}\theta + 2V = \frac{V'^2}{a^2}(V'' + V) = -F(\theta), \tag{1}$$

în care V este o funcţie numai de variabila θ_0

$$v_R = V,\ v_\theta = \frac{dV}{d\theta} = V',\ \frac{d^2V}{d\theta^2} = V'', \tag{2}$$

şi a este viteza sunetului.

În prima aproximaţie se liniarizează ecuaţia (1), observînd că termenul neliniar este foarte mic, de ordinul al doilea, şi deci se poate neglija, fiind riguros zero pe con ($\theta = \theta_c$) şi scăzînd rapid cu creşterea parametrului $K = M_\infty \sin\theta$ pe conul undei de şoc ($\theta = \theta_s$). Astfel se rezolvă ecuaţia simplificată:

$$V'' + V'\operatorname{ctg}\theta + 2V = 0, \tag{3}$$

a cărei integrală generală este

$$V_i = C_{0i}[1 + \cos\theta \operatorname{lntg}(\theta/2)] + D_{0i}\cos\theta. \tag{4}$$

Această relaţie se aplică separat pentru fiecare din cele două regiuni ale curgerii, rece ($i = 1$), şi caldă ($i = 2$), constantele de integrare C_{0i} şi D_{0i}, unghiul undei de şoc θ_s şi unghiul undei de combustie θ_f fiind determinate de condiţiile la limite pe suprafeţele conului, undei de combustie şi undei de şoc.

Următoarea etapă constă în rezolvarea ecuaţiei complete

$$V'' + V'\operatorname{ctg}\theta + 2V = -F(\theta), \tag{5}$$

în care

$$F(\theta) = -\frac{V'^2}{a^2}(V'' + V) = \frac{C_{0i}^3}{a^2}\left[\frac{D_{0i}}{C_{0i}} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \operatorname{lntg}(\theta/2)\right]^2 \simeq$$

$$\simeq \frac{C_{0i}^3}{a_s^2}\left[\frac{D_{0i}}{C_{0i}} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \operatorname{lntg}(\theta/2)\right]^2 \tag{6}$$

se deduce din prima aproximaţie.

Integrala generală a ecuaţiei (5) se obţine uşor din soluţia ecuaţiei omogene (3), aplicînd metoda variaţiei constantelor. Astfel, se găseşte

$$V_i = [C_i + H(\theta)][1 + \cos\theta \operatorname{lntg}(\theta/2)] + [D_i - L(\theta)]\cos\theta. \tag{7}$$

Constantele C_i și D_i, unghiul undei de șoc θ_s și unghiul undei de combustie θ_f, se determină, de asemenea, din condițiile la limite, $H(\theta)$ și $L(\theta)$, putînd fi calculate din

$$H(\theta) = -\frac{1}{2}\int_{\theta_c}^{\theta} F(\theta') \sin 2\theta' \, d\theta', \tag{8a}$$

$$L(\theta) = -\frac{1}{2}\int_{\theta_c}^{\theta} [\sec \theta' + \ln \operatorname{tg}(\theta'/2)] F(\theta') \sin 2\theta' \, d\theta'. \tag{8b}$$

Soluțiile ecuației (1), obținute mai sus, (4) și (7), reprezintă întregul cîmp al curgerii din spatele unei unde de șoc conice de semiunghi θ_s, pînă la suprafața corpului conic de semiunghi θ_c.

Deși am stabilit mai sus expresiile vectorului viteză V, în cazul aproximativ (4) și în cazul complet (7), vom remarca totuși că soluția aproximativă este suficientă pentru toate curgerile, avînd $M_\infty > 1{,}4$. În felul acesta, calculele devin foarte comode, soluțiile fiind totuși foarte apropiate de cele exacte, ceea ce reprezintă o simplificare considerabilă a problemei.

2. DETERMINAREA CONULUI UNDEI DE COMBUSTIE

După cum am văzut, curgerea pe care am considerat-o, înainte de a ajunge la suprafața $\theta = \theta_c$, întîlnește un front de flacără conic de semiunghi θ_f, cu $\theta_c < \theta_f < \theta_s$. Frontul de flacără este o regiune în cîmpul curgerii în care se produc modificări rapide în compoziția chimică a fluidului, astfel că, grosimea lui este, în general, foarte mică, și se consideră numai schimbările finale ale stării fluidului datorită combustiei. În aceste condiții, unda de combustie este o discontinuitate care depinde de doi parametri, de obicei numărul Mach de propagare m, și inversul raportului densităților (sau raportul componentelor normale ale vitezelor) λ. Acum, în funcție de m și λ se pot exprima diversele proprietăți ale undei de combustie [4], urmărind figura 1,

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{m}{\sqrt{M_{1f}^2 - m^2}}, \tag{9a}$$

$$\operatorname{tg} \delta_f = \frac{(\lambda - 1) \operatorname{tg}\psi}{1 + \lambda \operatorname{tg}^2 \psi}, \tag{9b}$$

$$M_{2f}^2 \sin^2(\psi + \delta_f) = \left[\frac{1}{\lambda m^2} - \gamma\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\right]^{-1}, \tag{9c}$$

unde M_{1f} este numărul Mach din faţa undei de combustie. Mai departe, între m, λ şi energia Q, degajată de unitatea de masă de amestec gazos prin combustie, există relaţia

$$(\gamma+1)(\lambda-1)=\left(\frac{1}{m^2}-1\right)-\left[\left(\frac{1}{m^2}-1\right)^2-2(\gamma^2-1)\frac{Q}{m^2a_{1f}^2}\right]^{1/2}. \quad (10)$$

Indicii $1f$ şi $2f$ se referă la valorile din punctele situate imediat în faţa şi spatele undei de combustie, iar γ este raportul căldurilor specifice, pe care îl presupunem acelaşi, $\gamma = 1{,}405$, atît pentru amestecul proaspăt, cît şi pentru cel ars.

Determinarea acestor valori depinde de determinarea semiunghiului undei de combustie θ_f, care permite apoi stabilirea cîmpului de viteze şi presiuni pentru cele două regiuni ale curgerii, rece şi caldă. În acest scop, vom scrie condiţiile la limite pe suprafeţele conice ale obstacolului, undei de combustie şi undei de şoc, sub forma

$$\theta=\theta_c,\quad v_{\theta 2}=V'_{2c}=0, \quad (11a)$$

$$\theta=\theta_f,\quad v_{\theta 2}=\lambda v_{\theta 1},\ \text{sau}\ V'_{2f}=\lambda V'_{1f},\quad (V'_{1f}=-ma_{1f}\simeq -ma_s) \quad (11b)$$

$$\theta=\theta_f,\quad v_{R2}=v_{R1}\ \text{sau}\ V_{2f}=V_{1f}, \quad (11c)$$

$$\theta=\theta_s,\quad v_{R1}=V_{1s}=U_\infty\cos\theta_s, \quad (11d)$$

$$\theta=\theta_s,\quad v_{\theta 1}=V'_{1s}=-\left(k+\frac{1-k}{K_s^2}\right)U_\infty\sin\theta_s, \quad (11e)$$

în care am introdus

$$k=\frac{\gamma-1}{\gamma+1},\quad K_s=M_\infty\sin\theta_s. \quad (12)$$

După cum se observă, condiţiile la limite (11) sînt suficiente pentru determinarea cîmpului de viteze — constantele de integrare C_{01}, C_{02}, D_{01}, D_{02}—, a unghiului undei de combustie θ_f şi cel al undei de şoc θ_s; dar rezolvarea sistemului de ecuaţii obţinut prin utilizarea condiţiilor (11) în relaţia (4) este greoaie. Pentru simplificare, vom introduce un con solid echivalent, de semiunghi $\theta_e(\theta_e<\theta_f)$, în ipoteza că după unda de combustie, adică pentru $\theta<\theta_f$, curgerea conică ar continua fără să fie influenţată de energia degajată prin ardere. Pentru a vedea semnificaţia fizică a acestui con echivalent, să scriem conservarea masei, o dată între suprafeţele $\theta=\theta_{1f}$ şi $\theta=\theta_e$ şi apoi între $\theta=\theta_{2f}$ şi $\theta=\theta_c$:

$$-(\rho_{1f}\,v_{\theta 1f})\sin\theta_f+\int_{\theta_e}^{\theta_f}(\rho_1 v_{R1})\sin\theta d\theta=0, \quad (13a)$$

$$-(\rho_{2f}\,v_{\theta 2f})\sin\theta_f+\int_{\theta_c}^{\theta_f}(\rho_2 v_{R2})\sin\theta d\theta=0. \quad (13b)$$

Comparînd relaţiile (13a) şi (13b) şi ţinînd seama de (11b), (11c) şi de faptul că densitatea în curgerea caldă este mult mai scăzută ($\rho_2 = \rho_1/\lambda$), rezultă că

$$\theta_e > \theta_c,$$

ceea ce arată că energia degajată prin ardere are un efect de deplasare similar cu o creştere a unghiului obstacolului conic de la θ_c la valoarea θ_e. Prin urmare, vom defini un unghi θ_d, pe care îl vom numi unghi de deplasare,

$$\theta_d = \theta_e - \theta_c,$$

şi care este o măsură a intensităţii undei de combustie pentru un con θ_c dat.

Acum, la condiţiile (11) se mai adaugă condiţia limită pe suprafaţa conului echivalent

$$\theta = \theta_e, \; v_{\theta 1} = V'_{1e} = 0, \tag{14}$$

şi întreaga problemă revine la rezolvarea următorului sistem de ecuaţii:

$$C_{02}\left[\frac{\cos\theta_c}{\sin^2\theta_c} - \operatorname{lntg}(\theta_c/2)\right] - D_{02} = 0, \tag{15a}$$

$$C_{02}\left[\frac{\cos\theta_f}{\sin^2\theta_f} - \operatorname{lntg}(\theta_f/2)\right] - D_{02} = -\frac{\lambda\, m a_{1f}}{\sin\theta_f}, \tag{15b}$$

$$(C_{02} - C_{01})\left[\frac{1}{\cos\theta_f} + \operatorname{lntg}(\theta_f/2)\right] + (D_{02} - D_{01}) = 0, \tag{15c}$$

$$C_{01}\left[\frac{\cos\theta_f}{\sin^2\theta_f} - \operatorname{lntg}(\theta_f/2)\right] - D_{01} = -\frac{m a_{1f}}{\sin\theta_f}, \tag{15d}$$

$$C_{01}\left[\frac{1}{\cos\theta_s} + \operatorname{lntg}(\theta_s/2)\right] + D_{01} = U_\infty, \tag{15e}$$

$$C_{01}\left[\frac{\cos\theta_s}{\sin^2\theta_s} - \operatorname{lntg}(\theta_s/2)\right] - D_{01} = -U_\infty\left(k + \frac{1-k}{K_s^2}\right), \tag{15f}$$

$$C_{01}\left[\frac{\cos\theta_e}{\sin^2\theta_e} - \operatorname{lntg}(\theta_e/2)\right] - D_{01} = 0. \tag{15g}$$

După cîteva calcule algebrice simple, sistemul (15) se reduce la un sistem de două ecuaţii transcendente cu două necunoscute, θ_f şi θ_e,

$$\frac{\dfrac{\cos\theta_e}{\sin^2\theta_e}-\dfrac{\cos\theta_f}{\sin^2\theta_f}+\ln\dfrac{\operatorname{tg}(\theta_f/2)}{\operatorname{tg}(\theta_e/2)}}{\dfrac{1}{\cos\theta_f}+\dfrac{\cos\theta_e}{\sin^2\theta_e}+\ln\dfrac{\operatorname{tg}(\theta_f/2)}{\operatorname{tg}(\theta_e/2)}}=\frac{1}{\lambda}\,\frac{\dfrac{\cos\theta_c}{\sin^2\theta_c}-\dfrac{\cos\theta_f}{\sin^2\theta_f}+\ln\dfrac{\operatorname{tg}(\theta_f/2)}{\operatorname{tg}(\theta_c/2)}}{\dfrac{1}{\cos\theta_f}+\dfrac{\cos\theta_c}{\sin^2\theta_c}+\ln\dfrac{\operatorname{tg}(\theta_f/2)}{\operatorname{tg}(\theta_c/2)}} \tag{16a}$$

$$\frac{U_\infty}{\lambda m a_{1f}}\cdot\frac{1}{\dfrac{1}{\cos\theta_s}+\dfrac{\cos\theta_e}{\sin^2\theta_e}+\ln\dfrac{\operatorname{tg}(\theta_s/2)}{\operatorname{tg}(\theta_e/2)}}=\frac{\lambda-1}{2\lambda}\cdot\sin(2\theta_f)+$$

$$+\frac{1}{\left[\dfrac{\cos\theta_c}{\sin^2\theta_c}-\dfrac{\cos\theta_f}{\sin^2\theta_f}+\ln\dfrac{\operatorname{tg}(\theta_f/2)}{\operatorname{tg}(\theta_c/2)}\right]\sin\theta_f}, \tag{16b}$$

în care

$$\sin\theta_s=\left[\left(1+\frac{M_\infty^2\left(\dfrac{C_{01}}{U_\infty}\sec\theta_s-\sin^2\theta_e\right)}{1-k+K_e^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{M_\infty^2}+\frac{\sin^2\theta_e}{1-k}\right)\right]^{1/2}\simeq$$

$$\simeq\left(\frac{1}{M_\infty^2}+\frac{\sin^2\theta_e}{1-k}\right)^{1/2}\quad(K_e=M_\infty\sin\theta_e), \tag{17a}$$

$$\frac{a_{1f}}{a_\infty}\simeq\frac{a_s}{a_\infty}=\left\{\left[k+\frac{1-k}{K_s^2}\right]\cdot[(1+k)K_s^2-k]\right\}^{1/2}(K_s=M_\infty\sin\theta_s)\cdot \tag{17b}$$

Pentru valorile M_∞, m, λ şi θ_c date, prin rezolvarea sistemului (16), se găseşte unghiul conului de combustie θ_f şi al conului echivalent θ_e, cu ajutorul cărora obţinem mai departe

$$C_{01}=V_e\sin^2\theta_e, \tag{18a}$$

$$D_{01}=C_{01}\left(\frac{\cos\theta_e}{\sin^2\theta_e}-\operatorname{lntg}\frac{\theta_e}{2}\right), \tag{18b}$$

$$\frac{U_\infty}{V_e}=\cos\theta_e+\left[\sec\theta_s+\ln\frac{\operatorname{tg}(\theta_s/2)}{\operatorname{tg}(\theta_e/2)}\right]\sin^2\theta_e, \tag{18c}$$

$$C_{02}=V_c\sin^2\theta_c, \tag{18d}$$

$$D_{02} = C_{02}\left(\frac{\cos\theta_c}{\sin^2\theta_c} - \ln \operatorname{tg}\frac{\theta_c}{2}\right), \tag{18e}$$

$$\frac{V_c}{V_e} = \frac{\sin^2\theta_e}{\sin^2\theta_c} \cdot \frac{\dfrac{1}{\cos\theta_f} + \dfrac{\cos\theta_e}{\sin^2\theta_e} + \ln\dfrac{\operatorname{tg}(\theta_f/2)}{\operatorname{tg}(\theta_e/2)}}{\dfrac{1}{\cos\theta_f} + \dfrac{\cos\theta_c}{\sin^2\theta_c} + \ln\dfrac{\operatorname{tg}(\theta_f/2)}{\operatorname{tg}(\theta_c/2)}}, \tag{18f}$$

V_e şi V_c fiind, respectiv, viteza pe suprafaţa conului echivalent ($\theta = \theta_e$) şi pe suprafaţa conului real ($\theta = \theta_c$).
Unghiul conului undei de şoc este dat de relaţia (17a). Pentru soluţia completă se folosesc tot condiţiile la limite (11) şi (14), dar cu relaţia (7). Se constată, efectuînd corecţia soluţiei aproximative, că se găseşte din nou relaţia (17a), care mai poate fi pusă sub forma [1]

$$K_s^2 = 1 + \frac{K_e^2}{1-k}, \tag{19}$$

iar constantele C_i, D_i şi raportul vitezelor pe con V_c/V_e sînt date de relaţii similare cu acelea obţinute în prima aproximaţie (18 a, b, d, e, f), cu deosebirea că viteza pe conul echivalent V_e, are acum o expresie de forma

$$V_e = \frac{U_\infty + L(\theta_s) - [\sec\theta_s + \ln\operatorname{tg}(\theta_s/2)]H(\theta_s)}{\cos\theta_e + \left[\sec\theta_s + \ln\dfrac{\operatorname{tg}(\theta_s/2)}{\operatorname{tg}(\theta_e/2)}\right]\sin^2\theta_e}. \tag{20}$$

Întrucît ne interesează creşterea presiunii pe suprafaţa obstacolului conic prin combustie, vom calcula acum următoarele rapoarte de presiuni:

$\nu_s = \dfrac{p_s}{p_\infty}$ — creşterea de presiune prin unda de şoc (p_∞ la infinit, p_s în spatele undei de şoc);

$\dfrac{p_1}{p_s}$ — raportul dintre presiunea din faţa undei de combustie şi presiunea din spatele undei de şoc;

$\nu_f = \dfrac{p_2}{p_1}$ — căderea de presiune prin unda de combustie (p_1 în faţa undei de combustie, p_2 în spatele undei de combustie);

$\dfrac{p_c}{p_2}$ — raportul dintre presiunea pe suprafaţa conului şi presiunea din spatele undei de combustie (p_c pe con).

Se ştie că după unda de şoc avem [5]

$$\nu_s = \frac{p_s}{p_\infty} = (1+k)\,K_s^2 - k. \tag{21}$$

Aplicînd ecuația energiei și ecuația de stare între două puncte din regiunea rece, situate pe razele vectoare $\theta = \theta_s$ și $\theta = \theta_f$, se găsește

$$\frac{p_1}{p_s} = \left[\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \left(1 - \frac{W_1^2}{U_\infty^2}\right)}{\nu_s \left(k + \frac{1-k}{K_s^2}\right)} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \tag{22}$$

în care W_1 este modulul vectorului viteză în fața undei de combustie. Căderea de presiune la traversarea undei de combustie poate fi evaluată din ecuația de impuls [4]

$$\nu_f = \frac{p_2}{p_1} = 1 - \gamma m^2 (\lambda - 1), \tag{23}$$

și mai rămîne de determinat raportul dintre presiunea pe suprafața obstacolului și presiunea din spatele undei de combustie. Analog cu relația (22) se găsește

$$\frac{p_c}{p_2} = \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \frac{M_1^2}{\nu_f \cdot \lambda} \left[(\lambda^2 - 1) \frac{m^2}{M_1^2} + 1 - \frac{V_c^2}{W_1^2} \right] \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \tag{24}$$

în care M_1 este numărul Mach în fața undei de combustie ($M_1 = W_1/a_1$). Cu ajutorul formulelor de mai sus, (21), (22), (23) și (24), se poate calcula acum raportul p_c/p_∞, și anume

$$\frac{p_c}{p_\infty} = \nu_s \cdot \nu_f \left\{ \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \frac{M_1^2}{\nu_f \cdot \lambda} \left(\frac{m^2}{M_1^2} (\lambda^2 - 1) + 1 - \frac{V_c^2}{W_1^2} \right) \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \left(1 - \frac{W_1^2}{U_\infty^2}\right)}{\nu_s \left(k + \frac{1-k}{K_s^2}\right)} \right] \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \tag{25}$$

iar coeficientul de presiune pe con este dat de

$$C_p = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{p_c}{p_\infty} - 1 \right) = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \times$$

$$\times \left\{ \nu_s \, \nu_f \left[\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \frac{M_1^2}{\nu_f \cdot \lambda} \left(\frac{m^2}{M_1^2} (\lambda^2 - 1) + 1 - \frac{V_c^2}{W_1^2} \right) \right) \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \left(\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \left(1 - \frac{W_1^2}{U_\infty^2}\right)}{\nu_s \left(k + \frac{1-k}{K_s^2}\right)} \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\}. \tag{26}$$

3. EXEMPLE DE CALCUL

În cele ce urmează, vom aplica metoda prezentată mai sus, în cazul particular al unei curgeri cilindrice, care a fost întîi deviată printr-o undă de şoc conică şi apoi, prin ardere, a redevenit cilindrică, cu alte cuvinte, pentru cazul $\theta_c = 0$ [2]. Configuraţia curgerii considerate este

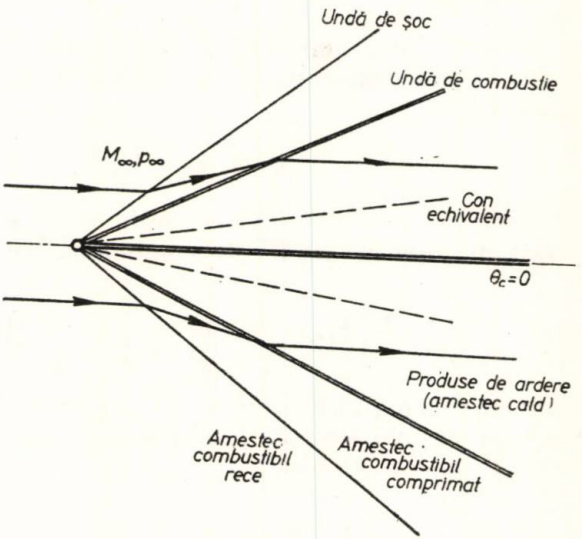


Fig. 2

arătată în figura 2, în care mişcarea fiind nevîscoasă, orice tub de curent poate fi înlocuit printr-un corp solid. În aceste condiţii, sistemul de ecuaţii (16) devine

$$\frac{1}{(\cos\theta_f)(\sin^2\theta_f)} + (\lambda - 1)\left(\frac{\cos\theta_f}{\sin^2\theta_f} - \operatorname{lntg}\frac{\theta_f}{2}\right) = (\lambda - 1)\left(\frac{\cos\theta_e}{\sin^2\theta_e} - \operatorname{lntg}\frac{\theta_e}{2}\right), \tag{27a}$$

$$m = \frac{2M_\infty \left\{\left[\frac{1}{\cos\theta_s} + \frac{\cos\theta_e}{\sin^2\theta_e} + \ln\frac{\operatorname{tg}(\theta_s/2)}{\operatorname{tg}(\theta_e/2)}\right]\sin 2\theta_f\right\}^{-1}}{(\lambda - 1)\left\{\left[k + \frac{1-k}{K_s^2}\right]\cdot[(1+k)K_s^2 - k]\right\}^{1/2}}. \tag{27b}$$

Pentru rezolvarea acestui sistem de ecuaţii transcendente s-a procedat în felul următor:

— pentru un M_∞ şi λ dat, s-a ales un con echivalent de unghi θ_e, şi s-a rezolvat numeric ecuaţia (27a); iar apoi, din ecuaţia (27b), s-a determinat numărul Mach de propagare m. Aceste valori, introduse acum în relaţiile (18), determină constantele C_{0i} şi D_{0i} din expresiile distribuţiei de viteze, atît pentru regiunea rece, cît şi pentru cea caldă.

Deoarece în acest caz presiunea rămîne constantă în regiunea caldă şi egală cu valoarea ei din spatele undei de combustie p_2, raportul presiunilor (25) devine

$$\frac{p_2}{p_\infty} = \nu_s \cdot \nu_f \left[\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \left(1 - \frac{W_1^2}{U_\infty^2}\right)}{\nu_s \left(k + \frac{1-k}{K_s^2}\right)} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \tag{28}$$

Rezultatele acestor calcule sînt reprezentate în figurile 3*a*, *b*, *c*, pentru numărul Mach $M_\infty = 2, 3, 4$, dînd p_2/p_∞ funcţie de m pentru $\lambda = 1{,}5$; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5 şi $\theta_e = 5°$, 10°, 15°, 20°, 25°, atît în prima, cît şi în a doua aproximaţie. În figura 3*a*, distribuţia presiunilor pentru $M_\infty = 2$, calculată cu metoda prezentată, este comparată cu soluţiile numerice obţinute pe bază de tabele [2]. Se constată că formulele prezentate urmează îndeaproape soluţiile numerice.

În mod analog se tratează şi cazul general al unui obstacol conic oarecare, utilizînd însă sistemul (16) şi relaţia (25). Distribuţiile presiunilor pe con calculate pentru trei conuri, $\theta_c = 10°$, 20°, 30°, şi trei numere Mach, $M_\infty = 2, 3, 4$ sînt prezentate în diagramele din figurile 4*a*, *b*, *c*; 5*a*, *b*, *c*; 6*a*, *b*, *c* pentru aceleaşi valori ale lui λ. De asemenea, sînt arătate liniile de unghi de deplasare θ_d constant pentru $\theta_d = 2°$, 4°, 6°, 8°, 10°.

Faptul că raportul p_c/p_∞ scade de-a lungul acestor linii arată că, pe măsură ce m creşte, frontul de flacără se deplasează spre unda de şoc (care este de intensitate constantă pe orice linie de θ_d constant), deci spre regiuni de presiune mai joasă, la care se adaugă şi o scădere de presiune prin ardere mai importantă. Intersecţia liniilor θ_d, constant cu axa $m = 0$, indică presiunea care s-ar găsi pe suprafaţa conului echivalent.

O altă observaţie se referă la faptul că, pentru un anumit raport λ, există o valoare m, pentru care se obţine o creştere de presiune maximă, prin urmare, există o anumită compoziţie optimă a amestecului reactant, prin arderea căruia se produce o creştere maximă de presiune.

De asemenea, se constată că cea mai importantă creştere de presiune are loc în regiunea rece, în special datorită undei de şoc, cîmpul compresibil dintre unda de combustie şi obstacolul conic contribuind în mică măsură la aceasta.

4. CONCLUZII

Metoda prezentată în această lucrare, bazată pe o soluţie analitică a curgerii în jurul unui con circular, a permis determinarea expresiilor distribuţiilor de viteză şi presiune pentru domeniul unei curgeri compresibile conice, care susţine o undă de combustie total supersonică. În acest fel, s-a putut trata problema directă, determinîndu-se proprietăţile undei de combustie cunoscînd condiţiile aerodinamice (M_∞, p_∞) şi

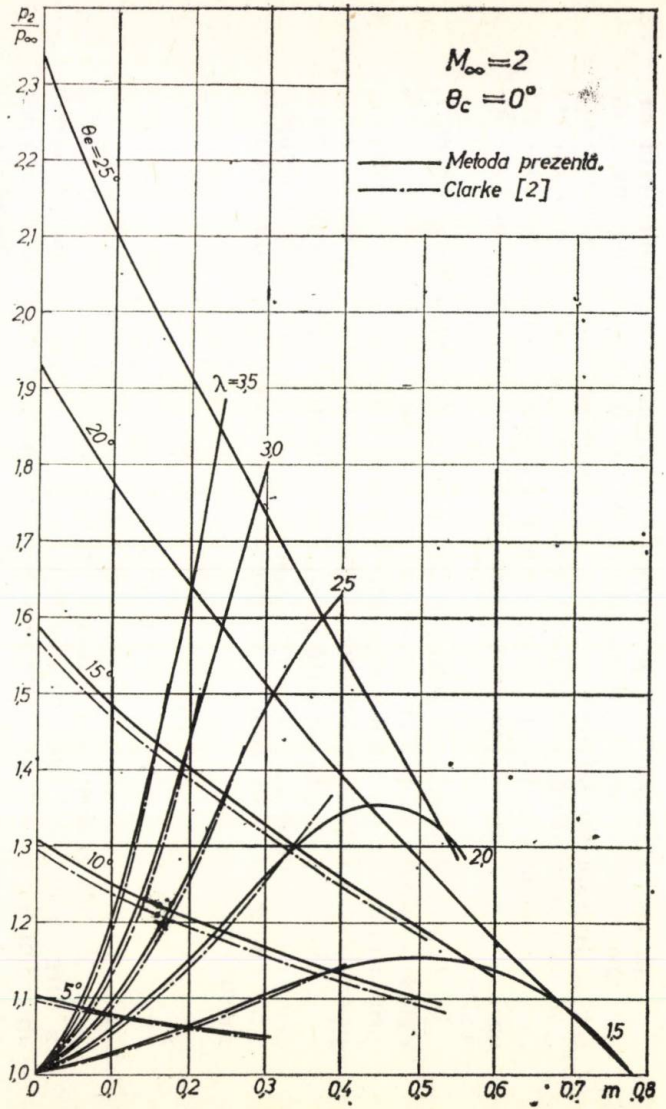
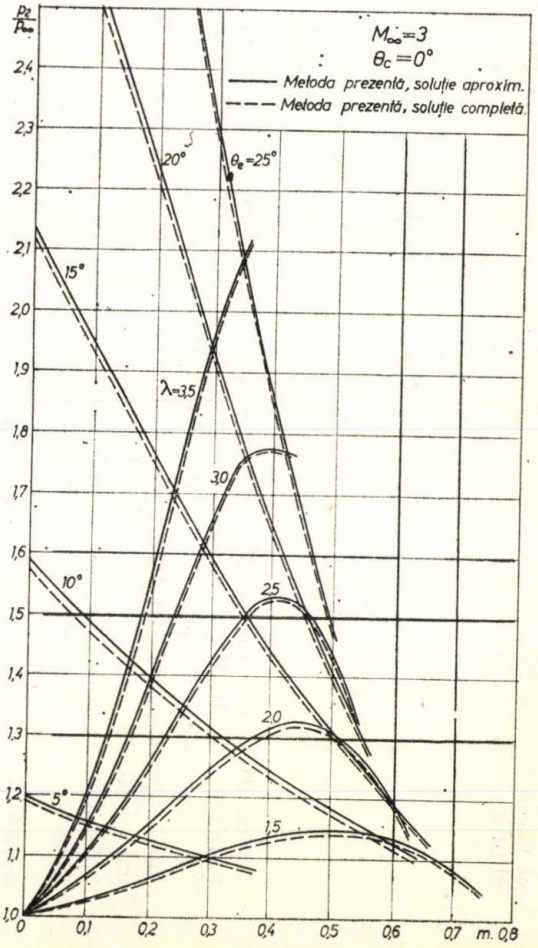

$\frac{p_2}{p_\infty}$
$M_\infty = 2$
$\theta_c = 0°$
Metoda prezentă.
Clarke [2]
$\theta_e = 25°$
$\lambda = 3,5$
3,0
2,5
2,0
1,5
20°
15°
10°
5°
m

Fig. 3a


$\frac{p_2}{p_\infty}$
$M_\infty = 3$
$\theta_c = 0°$
Metoda prezentă, soluție aproxim.
Metoda prezentă, soluție completă.
$\theta_e = 25°$
20°
15°
10°
5°
$\lambda = 3,5$
3,0
2,5
2,0
1,5
m.

fizico-chimice (λ, m) ale curentului din amonte, ca şi caracteristica geometrică (θ_c) a obstacolului solid. Rezultatele găsite pentru o curgere cilindrică particulară, pentru care s-au efectuat deja unele calcule numerice [2], scot în evidenţă eficienţa metodei prezentate mai sus şi rigoarea

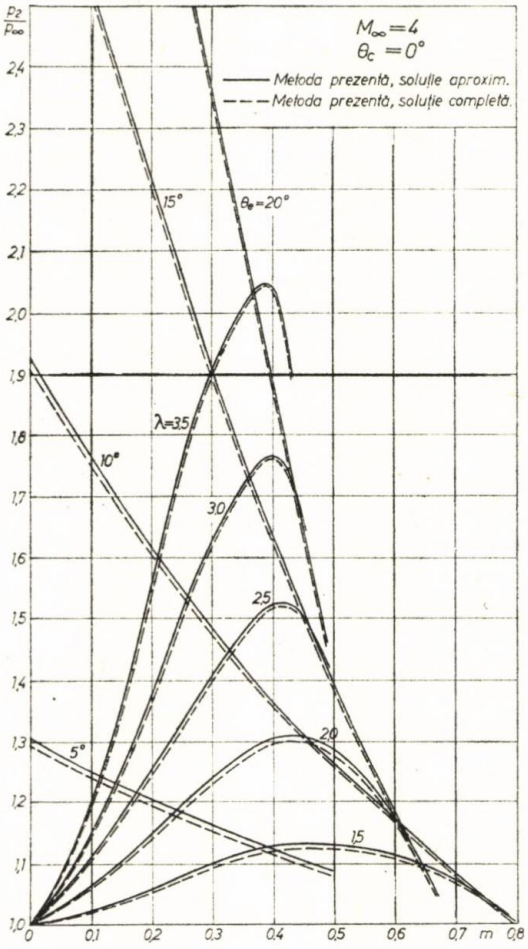


Fig. 3c

rezultatelor obţinute. Remarcăm că soluţiile analitice date sînt foarte comode şi practice dacă se observă că pentru $M_\infty \geqslant 1{,}4$ se poate utiliza numai soluţia aproximativă (4), fără să mai fie necesară o corecţie a acesteia.

De asemenea, metoda propusă oferă în continuare posibilitatea luării în consideraţie a influenţei unghiului de incidenţă, precum şi a altor forme de obstacole, ca, de exemplu, curgerea în jurul unui con eliptic, probleme de care ne vom ocupa într-o altă lucrare.

Primită la redacţie la 25 octombrie 1972

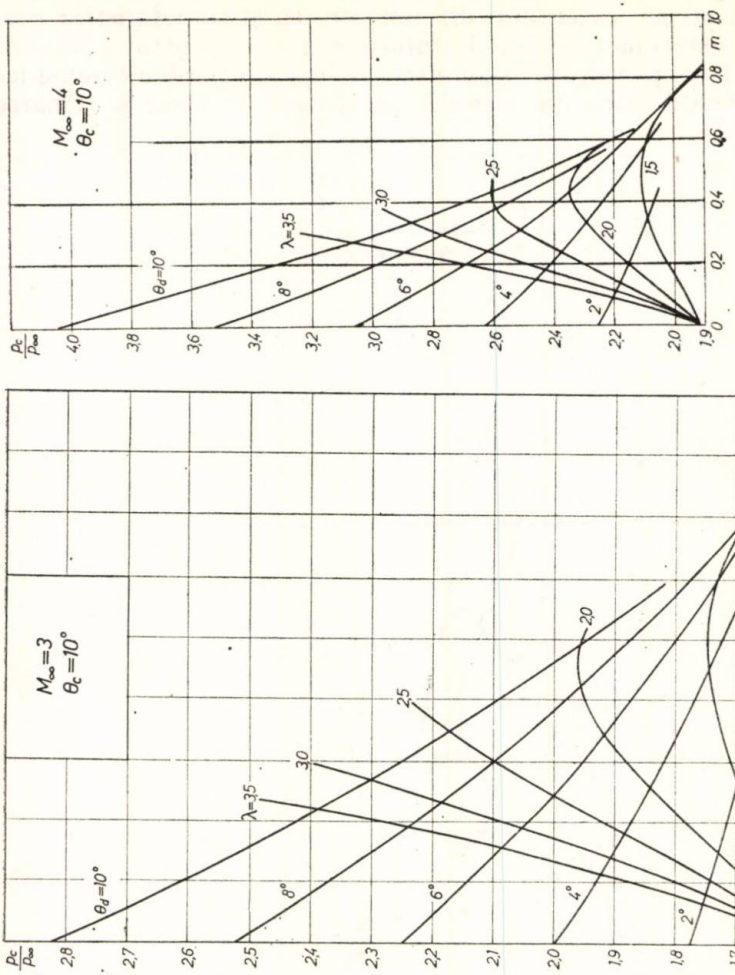


Fig. 4a

Fig. 4b

Fip. 4c

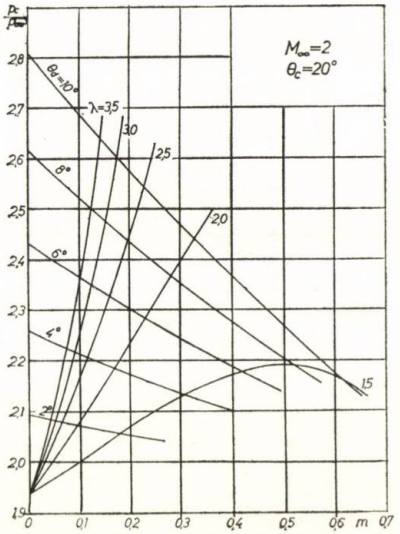


Fig. 5a

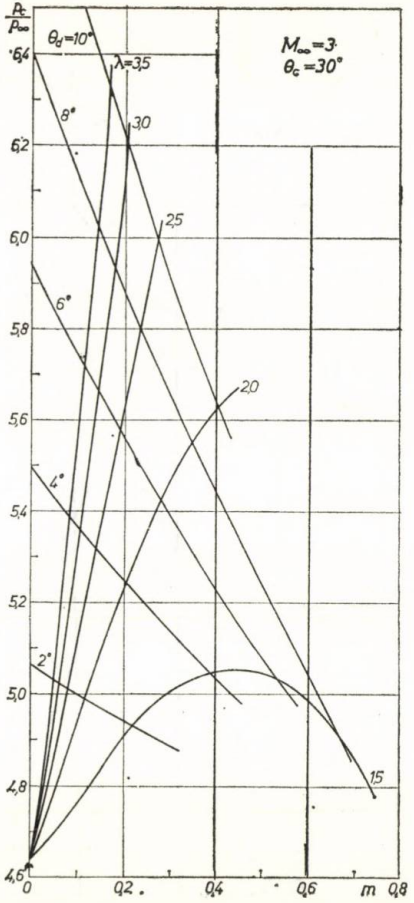


Fig. 5b

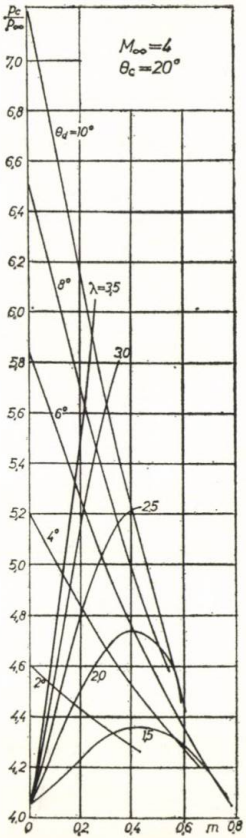


Fig. 5c

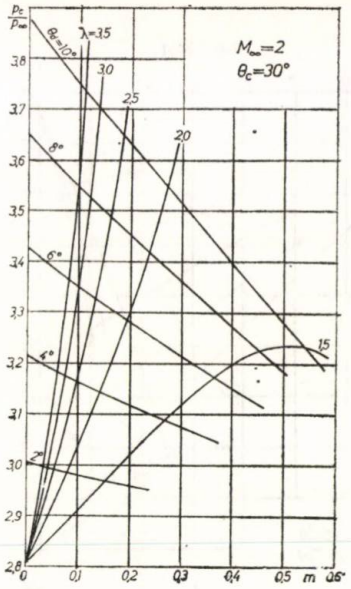


Fig. 6a

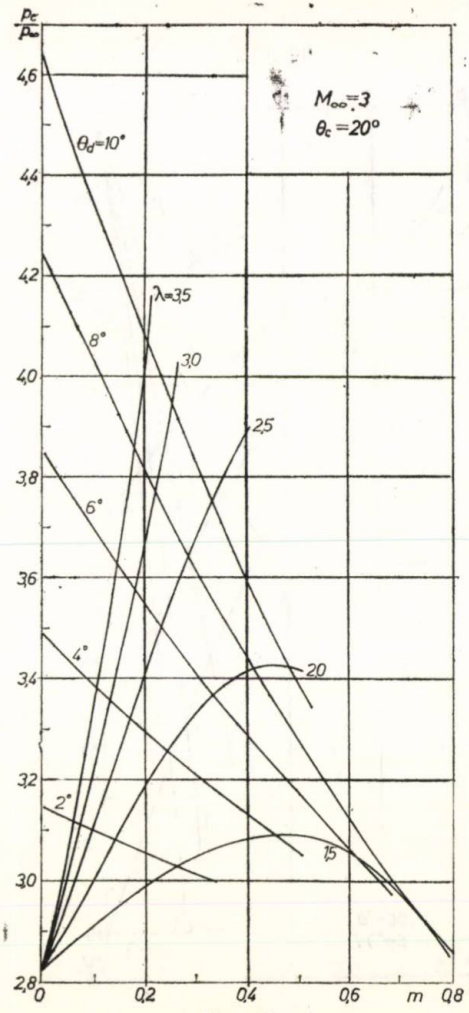


Fig. 6b

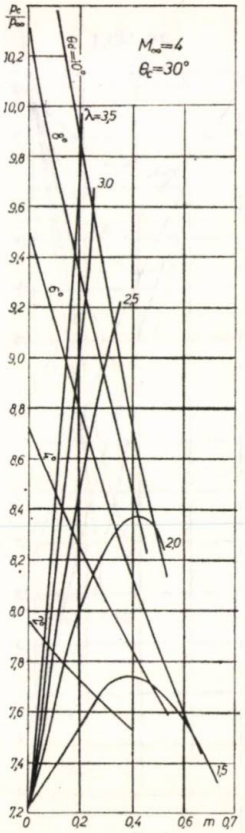


Fig. 6c

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, C. Berbente, *Considerations on the Supersonic and Hypersonic Motion past the Circular Cone at Angle of Attack*, Z. Flugwiss. **18**, *2/3* (1970).
2. J. F. Clarke, D. G. Petty, *The Supersonic Flow Field Associated with a Conical Flame Sheet*, The Aeronautical Quarterly, **XXI**, November (1970).
3. Foster R., Clarke J. F., *Supersonic Flow past a Wedge with a Flame at its Apex*, The Aeronautical Quarterly, **XIX**, February (1968).
4. Clarke J. F., *Some Remarks on the Treatment of Fully Supersonic Flames as Gasodynamical Discontinuities*, The College of Aeronautics, CoA Report Aero 179, 1965.
5. E. Carafoli, *Aerodinamica vitezelor mari*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1957.
6. D. Pantazopol, Tr. Comanescu, *La combustion supersonique autour d'un obstacle conique*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., **13**, *5* (1968).

CREȘTEREA CAPACITĂȚII DE TRANSPORT ÎN MIȘCAREA DE ANTRENARE A FLUIDELOR VÎSCOASE PRIN PROCEDEUL DE INJECȚIE

de CORNELIU I. CRĂCIUN

Centrul de cercetări Hidraulice București

Se demonstrează că debitul de fluid vîscos transportat în mișcarea de antrenare între două plăci (de tip Couette) poate să crească prin injecția lîngă placa fixă, într-un strat de grosime convenabilă, a unui lichid mai puțin vîscos. Se obține în același timp o reducere a energiei necesare antrenării.

I. INTRODUCERE

În ultimul timp, în țări interesate în transportul produselor petroliere, există preocupări privitoare la creșterea capacității de transport în sistemele de pompare prin conducte, cu ajutorul injecției unei cantități de apă [1], [2]. Din punct de vedere teoretic problema prezintă serioase dificultăți, fiind necesară în primul rînd determinarea distribuției vitezelor în curgerea a două fluide în aceeași conductă, apoi calculul debitelor și în final studiul dependenței acestora de diferiții parametri ce intervin. Ca urmare s-au dezvoltat cercetările experimentale și cele bazate pe analiza numerică.

Ne-am propus să abordăm problema sub aspect teoretic, începînd cu cazurile cele mai simple, pentru a da o justificare procedeului de injecție. În articolul de față vom prezenta rezultatele privind mișcarea de antrenare între două plăci paralele*.

II. DISTRIBUȚIA DE VITEZE ȘI DEBITELE

Fie două plăci orizontale, cea inferioară fixă, iar cea superioară în translație în propriul plan cu viteza $\vec{V}$. Dacă alegem un sistem de referință ca planul xOz să coincidă cu placa fixă și axa Ox să aibă sensul

* Comunicare la Colocviul de mecanica fluidelor, Arad, 1970.

vitezei de translație $\vec{V}$, atunci cei doi pereți au ecuațiile $y = 0$, respectiv $y = h$.

Un fluid vîscos aflat între plăci, în absența unui gradient de presiune, este antrenat (mișcare de tip Couette) cu viteza [3]

$$v(y) = \frac{V}{h} y. \tag{1}$$

Debitul

$$Q^0 = \frac{Vh}{2} \tag{2}$$

este independent de viscozitatea fluidului transportat. Vom numi „debit de referință" debitul Q^0 din curgerea unui singur fluid între plăci.

Efortul tangențial, același în tot fluidul, are valoarea

$$\tau = \mu \frac{V}{h}. \tag{3}$$

În cazul a două fluide nemiscibile separate de planul $y = h_1$ $(0 < h_1 < h)$ distribuția de viteze a fost dată în [4]:

$$v_1(y) = \frac{mV}{(m-1)h_1 + h} y, \qquad 0 \leqslant y \leqslant h_1, \tag{4}$$

$$v_2(y) = \frac{V}{(m-1)h_1 + h} (y - h) + V, \qquad h_1 \leqslant y \leqslant h, \tag{5}$$

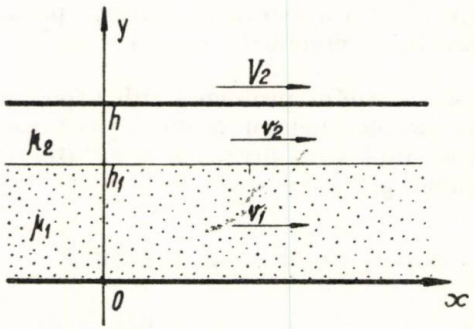


Fig. 1

în care s-a notat cu m raportul viscozităților dinamice

$$m = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \tag{6}$$

Efortul tangențial, constant în fiecare fluid, trebuind să fie egal la interfață, este același peste tot și are valoarea

$$\tau = \frac{\mu_1 \mu_2 V}{(\mu_2 - \mu_1)h_1 + \mu_1 h}. \tag{7}$$

Mai general, în cazul a n fluide stratificate de densități ρ_k și viscozități μ_k, cînd fluidul din stratul $k (k = 1, 2, \ldots, n)$ este cuprins între planele $y = h_{k-1}$ și $y = h_k$, vitezele au expresia

$$v_k(y) = \frac{V}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu_i}(h_i - h_{i-1})} \left[\frac{1}{\mu_k}(y - h_k) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\mu_i}(h_i - h_{i-1}) \right], \quad h_{k-1} \leqslant y \leqslant h_k. \tag{8}$$

Factorul din fața parantezei reprezintă tocmai efortul tangențial, același în orice strat:

$$\tau = \frac{V}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu_i}(h_i - h_{i-1})}. \tag{9}$$

Rămînînd la cazul a două fluide, formulele (4) și (5) permit determinarea debitelor

$$Q_1 = \frac{Vh}{2} \frac{m}{(m-1)\frac{h_1}{h} + 1} \left(\frac{h_1}{h}\right)^2, \tag{10}$$

$$Q_2 = \frac{Vh}{2} \frac{(2m-1)\frac{h_1}{h} + 1}{(m-1)\frac{h_1}{h} + 1} \left(1 - \frac{h_1}{h}\right). \tag{11}$$

Am făcut să apară aici debitul de referință (2), din cazul cînd între plăci ar fi antrenat un singur fluid, și raportul adimensional

$$\frac{h_1}{h} = H. \tag{12}$$

Avem în definitiv

$$Q_1 = Q^0 \frac{m}{(m-1)H + 1} H^2, \tag{13}$$

$$Q_2 = Q^0 \frac{(2m-1)H + 1}{(m-1)H + 1} (1 - H). \tag{14}$$

Variabila m poate lua orice valoare pozitivă finită. Valorile limită, zero şi infinit, ar corespunde fie cazului cînd unul din fluide este lipsit de viscozitate, fie cazului cînd unul devine solid, ceea ce face ca problema să degenereze.

Variabila H poate lua valori în intervalul închis [0,1]. Valoarea $H = 0$ corespunde antrenării fluidului de viscozitate μ_2 în toată zona dintre plăci iar valoarea $H = 1$ corespunde antrenării fluidului de viscozitate μ_1 în aceeaşi zonă.

III. CAPACITATEA DE TRANSPORT A SISTEMULUI

Să presupunem că pentru un sistem dat $\{h$ şi $V\}$ avem de transportat un fluid vîscos. Valoarea (2) a debitului care depinde numai de parametrii sistemului de transport, se modifică dacă se injectează între plăci un al doilea fluid. După cum acesta se va plasa în vecinătatea plăcii, $y = 0$ sau $y = h$, vom avea injecţie inferioară, respectiv injecţie superioară. În cîmp gravitaţional, ordinea stratificării depinde de densităţi ($\rho_1 > \rho_2$).

La injecţia superioară mărimile caracteristice fluidului transportat vor purta indice 1 iar cele ale fluidului injectat indice 2.

La injecţia inferioară mărimile caracteristice fluidului transportat vor purta indice 2, iar ale celui injectat indice 1.

În cele ce urmează vom studia dependenţa debitului transportat, Q_1 la injecţia superioară, respectiv Q_2 la injecţia inferioară, în funcţie de parametrii m şi H, adică în funcţie de viscozităţi şi grosimile celor două straturi şi vom trage concluzii cu privire la capacitatea de transport a sistemului.

Variaţia debitului cu viscozităţile. Ne vom fixa asupra unui raport $H \in [0,1]$.

a) Injecţia superioară. Debitul transportat Q_1 dat de (13),

$$Q_1 = Q^0 \frac{m}{(m-1)H + 1} H^2,$$

apare ca o funcţie de m. La capetele intervalului de variaţie al lui m se obţin valori limită.

Pentru $m = 0$, adică pentru $\mu_2 = 0$,

$$Q_1 = 0. \tag{13'}$$

Fluidul injectat fiind lipsit de viscozitate nu este antrenat de placa $y = h$ şi nu transmite mişcarea fluidului inferior care trebuie transportat.

Pentru $m \to \infty$, adică pentru $\mu_2 \to \infty$,

$$Q_1 = Q^0 H \tag{11''}$$

sau, ţinînd seama de semnificaţia mărimilor Q^0 şi H,

$$Q_1 = \frac{Vh}{2} \frac{h_1}{h} = \frac{Vh_1}{2}.$$

Fluidul superior avînd viscozitate infinită se comportă ca un perete solid, în translație cu viteza V. Debitul transportat corespunde antrenării fluidului inferior de către placa situată la înălțimea $y = h_1$.

Derivata debitului transportat (13) în raport cu m este

$$\frac{dQ_1}{dm} = \frac{Q^0 H^2 (1-H)}{[(m-1)H+1]^2}. \tag{15}$$

Ea este pozitivă, independent de H și m:

$$\frac{dQ_1}{dm} > 0.$$

Cînd m variază de la zero la infinit odată cu μ_2, debitul Q_1 crește continuu de la zero la valoarea $Q^0 H$. Dar cum H este subunitar, debitul rămîne inferior valorii Q^0 din cazul cînd fluidul transportat ar fi singur. Totuși, pentru un H dat, Q_1 este cu atît mai mare cu cît viscozitatea fluidului injectat este mai mare.

b) Injecția inferioară. Debitul transportat este (14):

$$Q_2 = Q^0 \frac{(2m-1)H+1}{(m-1)H+1}(1-H).$$

Pentru $m = 0$, adică pentru $\mu_1 \to \infty$,

$$Q_2 = Q^0(1-H). \tag{14'}$$

Înlocuind Q^0 și H obținem

$$Q_2 = \frac{V(h-h_1)}{2}.$$

Fluidul injectat se comportă ca un perete imobil la distanța $y = h_1$ așa încît debitul corespunde antrenării unui singur fluid între plăcile $y = h_1$ și $y = h$.

Pentru $m \to \infty$, adică pentru $\mu_1 \to 0$,

$$Q_2 = 2Q^0(1-H) \tag{12''}$$

sau

$$Q_2 = V(h - h_1).$$

Fluidul injectat fiind lipsit de viscozitate, pe suprafața de contact $y = h_1$ nu există frecare. Fluidul superior se mișcă în tot domeniul $h_1 < y < h$ cu viteza V a plăcii superioare și debitul se obține înmulțind viteza constantă cu secțiunea de curgere $(h - h_1) \times 1$.

Derivata debitului transportat (14) în raport cu m este

$$\frac{dQ_2}{dm} = \frac{Q^0 H(1-H)^2}{[(m-1)H+1]^2}. \tag{16}$$

Ea este pozitivă pentru orice $H \in [0,1]$, deci debitul crește cu m de la valoarea $Q^0(1-H)$ pentru $m=0$ la dublul acestei valori $2\,Q^0(1-H)$ pentru $m \to \infty$.

Derivata a doua a debitului,

$$\frac{d^2Q_2}{dm^2} = -\frac{2Q^0H^2(1-H)^2}{[(m-1)H+1]^3}, \tag{17}$$

este negativă pentru orice valoare a lui H.

Variația debitului în funcție de m este reprezentată în figura 2. Înclinarea tangentei în punctul inițial al curbei ($m=0$) depinde de valoarea lui H:

$$\left.\frac{dQ_2}{dm}\right|_{m=0} = Q^0H.$$

În concluzie, pentru un H dat, pe măsură ce viscozitatea fluidului injectat este mai mică, debitul crește de la valoarea corespunzătoare antrenării între plăci situate la $y=h_1$ și $y=h$ pînă la dublul acestei valori.

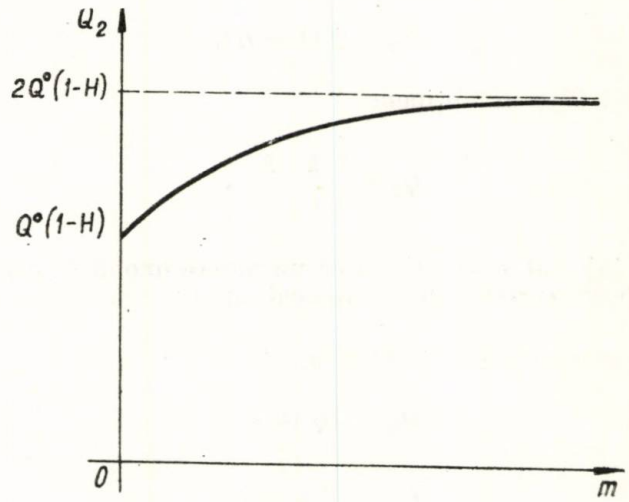


Fig. 2

Dacă $2Q^0(1-H) > Q^0$, adică dacă $H < \frac{1}{2}\left(\text{sau } h_1 < \frac{1}{2}h\right)$, valoarea limită a debitului pentru $m \to \infty$ depășește debitul de referință Q^0.

Se poate afirma că, cel puțin pentru valori mari ale lui m, dacă H este convenabil de mic $\left(H < \frac{1}{2}\right)$, debitul transportat poate depăși valoarea de referință Q^0, adică debitul din cazul antrenării unui singur fluid.

De aceea, interesantă din punct de vedere al capacității de transport a sistemului este numai injecția inferioară în strat de grosime mai mică decît jumătatea distanței dintre plăci.

Variația debitului cu H la injecția inferioară. Să ne fixăm asupra unei valori a parametrului m, deci asupra naturii celor două lichide, și să studiem variația debitului Q_2 dat de (14) în funcție de H, adică de grosimea stratului injectat.

La capetele intervalului de variație a lui H obținem următoarele valori limită ale debitului:

Pentru $H = 0$,

$$Q_2 = Q^0 \qquad (Q_1 = 0). \tag{18}$$

Între plăci se află antrenat un singur fluid, cel de viscozitate μ_2 deoarece $h_1 = 0$ (nu are loc injecția).

Pentru $H = 1$,

$$Q_2 = 0 \qquad (Q_1 = Q^0). \tag{19}$$

Între plăci se află numai fluid de viscozitate μ_1 deoarece $h_1 = h$.

Derivata debitului Q_2 în raport cu H este

$$\frac{\mathrm{d}Q_2}{\mathrm{d}H} = \frac{(2m-1)(1-m)H^2 - 2(2m-1)H + m - 1}{[(m-1)H+1]^2} Q^0. \tag{20}$$

La capetele intervalului de variație avem

$$\left.\frac{\mathrm{d}Q_2}{\mathrm{d}H}\right|_{H=0} = m - 1, \tag{21}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}Q_2}{\mathrm{d}H}\right|_{H=1} = -2. \tag{22}$$

Comportarea la capătul $H = 0$ se schimbă după cum m este mai mare sau mai mic decît unitatea.

Derivata a doua a debitului în raport cu H este

$$\frac{\mathrm{d}^2Q_2}{\mathrm{d}H^2} = -\frac{2Q^0 m^2}{[(m-1)H+1]^3}.$$

Pentru orice valoare $m > 0$ și $H \in [0,1]$ derivata a doua este negativă, deci funcția $Q_2(H)$ este concavă.

Semnul primei derivate (20) ca şi valorile care o anulează coincid cu ale funcţiei

$$F(H) = (2m-1)(1-m)H^2 - 2(2m-1)H + m - 1. \tag{23}$$

Funcţia $F(H)$ este un trinom de gradul doi cu parametru m al cărui discriminant este

$$\delta = m^2(2m - 1). \tag{24}$$

Dacă $m < \frac{1}{2}$, discriminantul este negativ şi funcţia păstrează semnul produsului $(2m - 1)\ (1 - m)$. Acesta fiind negativ funcţia $F(H)$ este negativă pentru orice valoare H.

Dacă $m > \frac{1}{2}$, discriminantul este pozitiv şi funcţia se anulează pentru două valori reale

$$H_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{m^2}{2m-1}}}{1 - m}. \tag{25}$$

Cantitatea de sub radical este totdeauna supraunitară:

$$\frac{m^2}{2m - 1} > 1. \tag{26}$$

Inegalitatea este echivalentă cu

$$m^2 - 2m + 1 > 0.$$

Ultima este satisfăcută deoarece discriminantul acestui trinom este nul şi el păstrează semnul coeficientului lui m^2. Vom distinge aici două situaţii diferite după cum m este mai mic sau mai mare ca unu. Dacă $m < 1$ $\left(\frac{1}{2} < m < 1\right)$ în (25) numitorul este pozitiv. Pentru semnul minus al radicalului rezultă o rădăcină $H_1 < 0$ şi pentru semnul plus o rădăcină pozitivă $H_2 > 1$. Intervalul [0,1] este situat în întregime între rădăcinile H_1 şi H_2. În acest interval funcţia $F(H)$ din (23) are semn contrar coeficientului lui H^2. Cum coeficientul $(2m - 1)\ (1 - m)$ este pozitiv funcţia $F(H)$ este negativă în interval, ca şi pentru $m < \frac{1}{2}$.

Dacă $m > 1$, în (25) numitorul este negativ. În virtutea inegalităţii (26), pentru semnul plus al radicalului numărătorul este pozitiv, deci

rădăcina corespunzătoare negativă. Pentru semnul minus al radicalului rezultă o rădăcină pozitivă subunitară pe care o vom nota H^*.

$$H^* = \frac{\sqrt{\frac{m^2}{2m-1}} - 1}{m-1}. \tag{27}$$

Existența unei rădăcini a funcției $F(H)$ în interval era indicată și de schimbarea semnului ei la capetele intervalului atunci cînd $m > 1$.

Pe scurt pentru :

$m < 1$, funcția $F(H)$ este negativă în intervalul [0,1],

$m > 1$, funcția $F(H)$ schimbă semnul în interval, anulîndu-se în H^* dat de (27).

Revenind la derivata debitului care se comportă ca $F(H)$ putem afirma următoarele :

$m < 1$, $\frac{dQ_2}{dH} < 0$. Debitul descrește continuu de la valoarea Q^0 pînă la zero. Injectarea unui fluid de viscozitate mai mare ca a celui transportat nu poate duce la creșterea debitului peste valoarea de referință Q^0.
Scăderea debitului transportat este cu atît mai accentuată cu cît înălțimea stratului injectat inferior este mai mare.

$m > 1$, $\left.\frac{dQ_2}{dH}\right|_{H=H^*} = 0 \quad \left.\frac{d^2Q_2}{dH^2}\right|_{H=H^*} < 0$. Pentru valoarea H^* dată de (27) debitul are un maxim. În intervalul [0, H^*] debitul crește de la valoarea Q^0 la Q^*, pentru ca apoi în intervalul [H^*,1] să descrească pînă la zero. Injecția inferioară a unui fluid mai puțin vîscos ($\mu_1 < \mu_2$) poate duce la creșterea debitului peste valoarea de referință Q^0. Explicația rezidă în micșorarea frecărilor la peretele inferior ca urmare a unei viscozități mai mici. Scăderea ulterioară a debitului se explică prin reducerea secțiunii active de curgere $h - h_1$ pe măsura creșterii grosimii stratului injectat h_1.

Cele două cazuri $m > 1$ și $m < 1$ conduc la curbe de variație a debitului de tipul celor din figura 3.

Pe grafic se observă că în $H = 0$ panta tangentei este pozitivă sau negativă după valorile lui m, corespunzător relației (21). Pentru $m = 1$ panta este zero, iar curba de variație, dedusă din (14), un arc de parabolă.

În punctul $H = 1$ toate curbele au aceeași pantă care, conform cu (22), trebuie să fie egală cu -2.

Efortul unitar și energia necesară transportului. Efortul unitar pe placă în cazul antrenării unui singur fluid de viscozitate μ_2 este, după (3),

$$\tau^0 = \frac{\mu_2 V}{h}. \tag{28}$$

În cazul a două fluide stratificate el este dat de formula (7) în care, dacă punem în evidenţă efortul de referinţă (28) şi parametrii adimensionali m şi H, obţinem

$$\tau = \frac{\mu_2 V}{h} \frac{1}{(m-1)H+1} = \tau^0 \frac{1}{(m-1)H+1}. \tag{29}$$

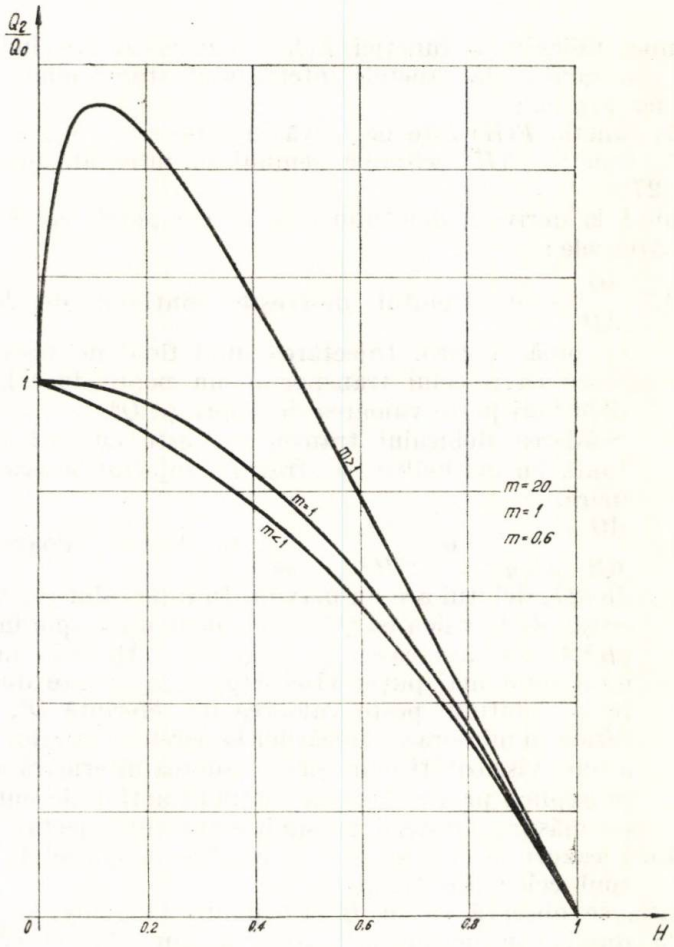


Fig. 3

Pentru valori $m > 1$ fracţia este subunitară, oricare ar fi H.

Dacă se injectează inferior un fluid de viscozitate μ_1, cu $\mu_1 < \mu_2$, efortul este mai mic decît în cazul antrenării unui singur fluid.

Pentru configuraţia la care debitul transportat este maxim, adică pentru $H = H^*$ dat de (27), efortul este

$$\tau^* = \tau^0 \frac{\sqrt{2m-1}}{m}. \tag{30}$$

Deoarece efortul este inferior celui de referință τ^0, atît forța de antrenare a plăcii, cît și energia consumată pentru transport vor fi mai mici decît în cazul unui singur lichid.

Se realizează astfel transportul unei cantități sporite de lichid, pentru aceeași distanță între plăci și aceeași viteză de antrenare (același sistem de transport), cu un efort mai mic.

Privind lucrurile puțin diferit, odată cu transportul fluidului de viscozitate μ_2, poate fi transportat un al doilea fluid.

Injectînd un fluid de viscozitate μ_1 mai mică ($m > 1$), putem pune problema determinării acelei configurații a straturilor $\frac{h_1^0}{h} = H^0$, pentru care debitul fluidului transportat este egal cu cel inițial (fig. 4):

$$Q_2 = Q^0.$$

Condiția se scrie folosind (14)

$$\frac{(2m-1)H+1}{(m-1)H+1}(1-H) = 1. \tag{31}$$

Rezolvarea ecuației (31) conduce la două rădăcini. Prima $H = 0$, adică $h_1 = 0$, cazul banal cînd curge numai fluidul inițial. A doua

$$H^0 = \frac{m-1}{2m-1}. \tag{32}$$

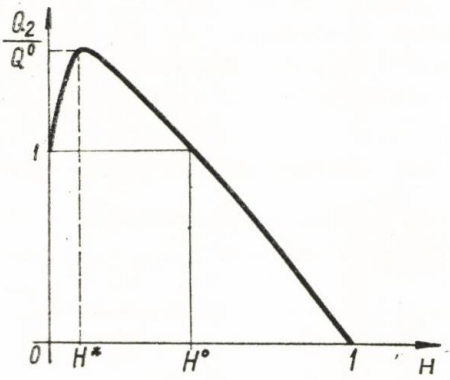


Fig. 4

Pentru $m > 1$, valoarea H^0 se află în intervalul [0,1], ceea ce pe graficul din figura 4 corespunde intersecției curbei debitului cu orizontala $\frac{Q_2}{Q^0} = 1$.

Pentru valoarea H^0 din (32), la aceeași distanță h între plăci și aceeași viteză V de translație, odată cu debitul de fluid cu viscozitate μ_2, $Q_2 = Q^0$, se transportă și din al doilea fluid un debit

$$Q_1 = Q^0 \frac{m(m-1)^2}{2m-1}. \tag{33}$$

Aceasta se realizează fără un efort suplimentar, ba chiar cu un efort inferior celui din cazul unui singur fluid. Efortul unitar

$$\tau = \tau^0 \frac{2m - 1}{m^2} \tag{34}$$

este mai mic decît τ^0 deoarece $\frac{2m-1}{m^2} < 1$ în baza inegalității (26). El este chiar mai mic decît τ^* dat de (30) din cazul transportului debitului maxim Q_2^*.

Economia de energie necesară transportului se explică prin reducerea frecării la peretele inferior datorită viscozității mai mici a celui de-al doilea fluid injectat.

IV. REZULTATE DE CALCUL

În legătură cu creşterea capacității de transport ne-am propus să calculăm cîteva exemple privind injecţia inferioară.

Pentru mai multe valori ale parametrului supraunitar m, în figura 5 am reprezentat grafic debitul raportat $\frac{Q_2}{Q^0}$, pe baza formulei (14).

Independent de această reprezentare am determinat, pe baza formulelor stabilite, valorile importante care au intervenit în dezvoltările teoretice. În baza formulei (27) am calculat H^* corespunzător debitul maxim din (14) şi debitul injectat din (13), ambele raportate la debitul de referinţă Q^0.

Din relaţia (30) am calculat efortul unitar raportat $\frac{\tau^*}{\tau^0}$, exercitat pe placă pentru debitul maxim transportat.

Rezultatele se găsesc în coloana 2,3,4, şi 5 din tabela alăturată.

1	2	3	4	5	6	7	8
m	H^*	Q_2^*/Q°	Q_1^*/Q°	τ^*/τ°	H°	Q_1^0/Q°	τ/τ°
2	0,1547	1,0718	0,0414	0,865	0,333	0,1662	0,748
20	0,1159	1,5241	0,0839	0,312	0,487	0,4627	0,097
50	0,0821	1,6681	0,0671	0,199	0,495	0,4853	0,039
100	0,0615	1,7527	0,0508	0,141	0,497	0,4920	0,019

Studiul graficului şi al valorilor din tabelă arată că, pe măsura creşterii parametrului m (cînd viscozitatea fluidului injectat scade), punctul de maxim al debitului se deplasează spre origine (grosimi mai mici ale stratului injectat), valoarea maximă creşte, iar efortul unitar scade.

Pentru aceleași valori ale parametrului m s-a calculat configurația la care debitul transportat are valoarea din cazul unui singur fluid și suplimentar se transportă prin sistem fluidul injectat.

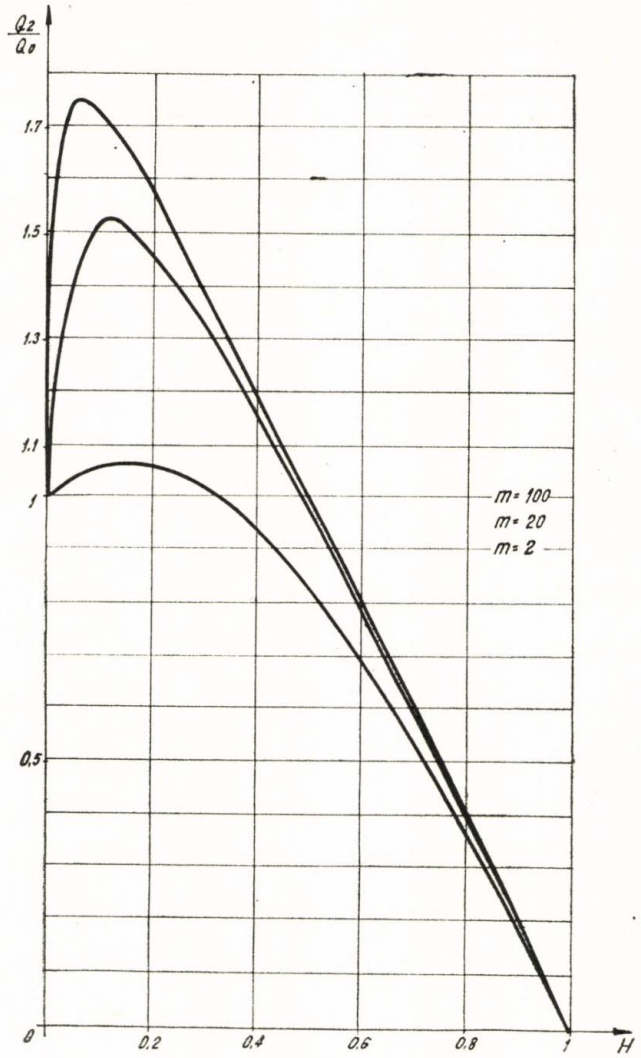


Fig. 5

Relația (32) determină pe H^0 care, înlocuit în (13), dă debitul transportat prin injecție. Efortul tangențial corespunzător a fost calculat cu formula (34). Rezultatele se află în coloanele 7 și 8 din tabelă.

Primită la redacție la 20 septembrie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. Ch. M. E., REDBERGHER, *The reduction of presure gradients in oil pipelines by the addition of water: numerical analysis of stratified flow*, Canadian Journal Chem, Engng, **40**, *2*, 70—75, 1962.
2. A. Ş. ASATURIAN, *Dvijenie nesmeşivaiuşcihsia jidkostei razlicinoi viazcosti v ţilindriceskih tubah*, Referativnîi Jurnal Mek., *7*, 80, 1964.
3. T. OROVEANU, *Mecanica fluidelor vtscoase*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1967, p. 52.
4. CORNELIU CRĂCIUN, *Mişcarea de antrenare şi transferul de căldură pentru fluide vtscoase stratificate*, St. cerc. mec. apl., **28**, *3*, 585, 1969.

STABILIREA EFORTURILOR DIN ECLISELE LANȚURILOR CU ROLE ȘI ZALE SCURTE

de N. N. ANTONESCU

Institutul de Petrol Ploiești

Se studiază problema stabilirii eforturilor din eclisele lanțurilor cu role și zale scurte provenite din diverse solicitări cum sînt : ajustajele cu strîngere ale zalelor, sarcina de lucru din transmisie, erori de execuție sau montaj ș.a. Se elaborează o metodă generală de calcul a eforturilor din eclisele lanțului, bazată pe anumite ipoteze teoretice, și confirmată experimental prin măsurători de fotoelasticitate și tensometrie. Metoda elaborată permite atît realizarea unei proiectări corecte a elementelor lanțului, cît și stabilirea eforturilor unitare, minime și maxime, în vederea efectuării calculului de durabilitate la oboseală a lanțului.

Aplicațiile numerice prezentate în această lucrare sînt efectuate pentru lanțurile cu role și zale scurte tip A (STAS 5174-67) care au o largă răspîndire în industrie în general și la instalațiile pentru forajul sondelor în special.

Lucrarea este o generalizare a unor probleme abordate de autor în cadrul tezei de doctorat [1].

1. PROBLEME GENERALE

Lanțurile cu role și zale scurte sînt standardizate atît la noi în țară (STAS 5174—67), cît și în celelalte țări. Principalele lor elemente componente sînt reprezentate în figura 1.

În literatura de specialitate, sînt puține lucrări care s-au ocupat, mai pe larg, de problema stabilirii eforturilor în elementele lanțului sau pentru piese asemănătoare acestora [2]—[7] ș.a. În aceste lucrări sînt tratate diverse aspecte, legate de problemele stabilirii eforturilor din elementele lanțurilor, bazate pe ipoteze mai mult sau mai puțin corecte.

Toate lucrările cercetate, acceptă ideea că eforturile din elementele zalelor se datoresc suprapunerii efectelor fretării (ajustaje cu strîngere) și sarcinilor cu care este încărcată transmisia (încărcarea exterioară, forțe dinamice ș.a.), lucru ce concordă cu realitatea.

Calculul pentru stabilirea eforturilor provenite din fretare este făcut pe baza teoriei tuburilor cu pereți groși, de lungime infinită (Lamé) sau, uneori, ținînd seama de lungimea finită a asamblării. Considerăm

că această ipoteză este corectă, ea fiind admisă și în prezenta lucrare, ca urmare ea a fost adoptată corespunzător pentru cazul lanțurilor, extinsă și în domeniul plastic, generalizată și finalizată prin stabilirea unui criteriu științific de calcul și alegere a ajustajelor cu strîngere ale zalelor lanțurilor.

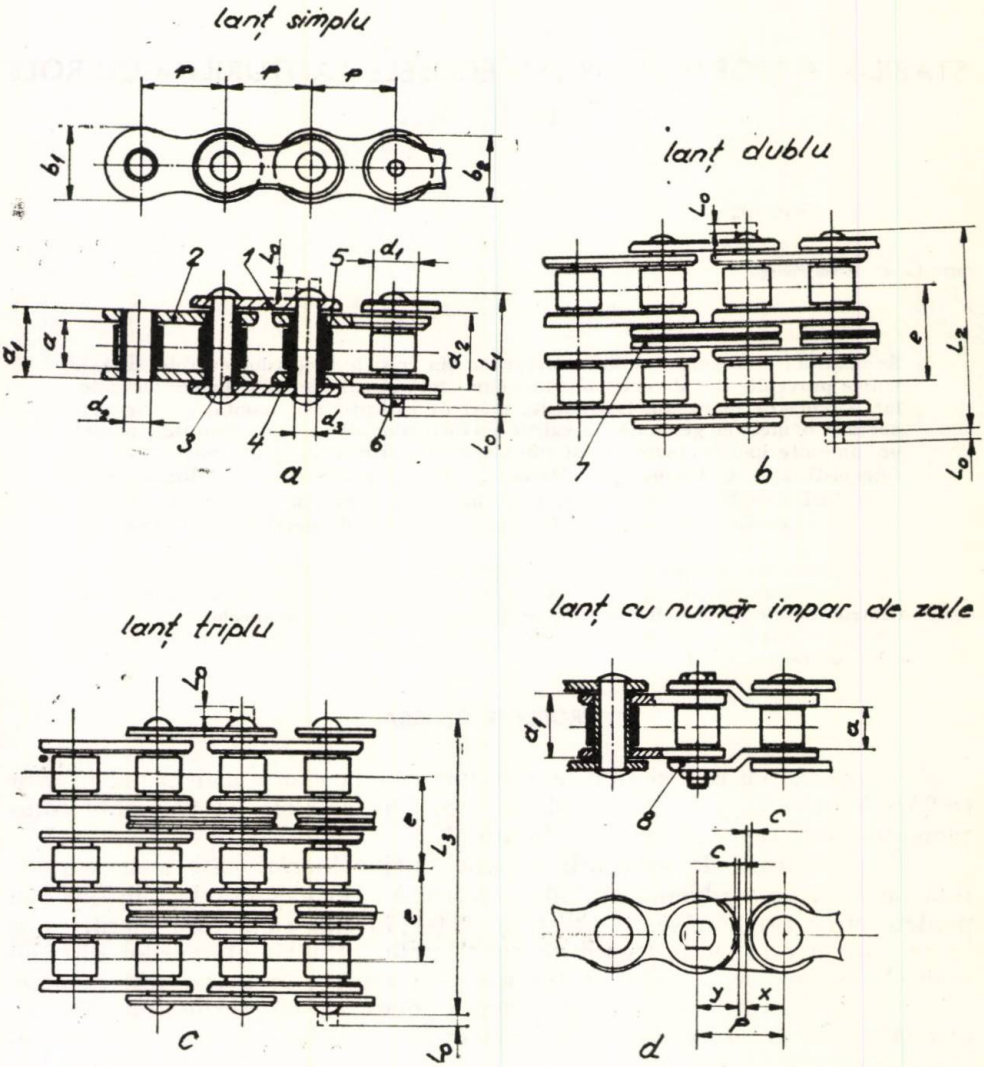


Fig. 1. — Lanț de uz general cu role și zale scurte (STAS 5174—66): *1* — eclisă exterioară; *2* — eclisă interioară; *3* — bolț; *4* — bucșă; *5* — rolă; *6* — bolț de legătură; *7* — eclisă intermediară; *8* — eclisă cotită.

Pentru calculul eforturilor datorate încărcării transmisiei cu forța rezultantă F, majoritatea lucrărilor tratează problema, considerînd ochiul

eclisei ca o bară curbă și aplicînd metoda simplificată a lui Bernhard expusă în [8], după schema din figura 2 pentru care rezultă :

$$M_B = \frac{F \cdot r}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \sin \alpha_1 - \cos \alpha_1 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right)\right],$$

$$M_A = -\frac{F \cdot r}{2}\left(1 - \cos \alpha_1\right) + M_B, \tag{1}$$

$$N_B = \frac{F}{2}\ ; \quad N_A = 0,$$

unde $\alpha_1 = 70°$ pentru condiții normale,

$$\sigma_0 = \frac{N}{A} + \frac{M}{r \cdot A} + \frac{M \cdot r}{J_0} \cdot \frac{y}{r+y}\ ; \quad \sigma_r = 0\ ; \quad \tau_{r0} = 0, \tag{2}$$

$$J_0 = x \cdot A \cdot r^2, \tag{3}$$

$$x = -1 + \frac{r}{h} \ln \frac{2r + h}{2r - h}. \tag{4}$$

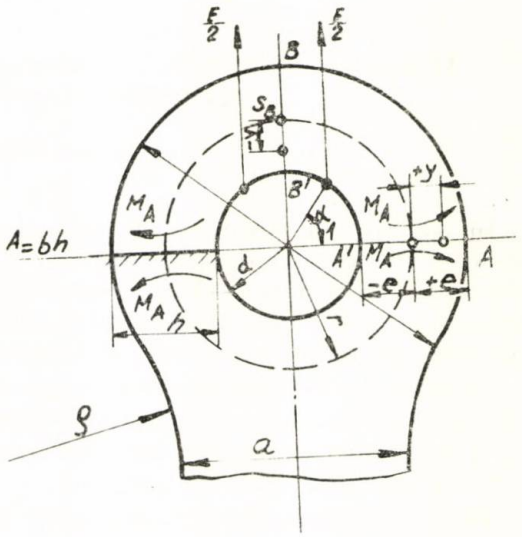


Fig. 2. — Schema de calcul a eforturilor după Bernhard.

Conform acestei scheme de calcul, secțiunea periculoasă este după direcția BB', lucru ce concordă cu realitatea.

Considerăm că această metodă de calcul (elaborată cu mult timp în urmă pentru piese în formă de ochi de dimensiuni mari) nu poate fi

aplicată pentru cazul ecliselor de lanț, așa cum se face în marea majoritate a lucrărilor actuale, deoarece este necorespunzătoare datorită, printre altele, următoarelor cauze:

— secțiunea BB' nu îndeplinește cerințele unei încastrări;

— forța de la arbore (bolț sau bucșă) la alezajul eclisei nu se transmite prin două forțe concentrate (lucru discutabil chiar la ajustajele cu joc), ci după o anumită lege de repartiție;

— forța poate acționa și după o direcție diferită față de axa eclisei, caz în care metoda nu se mai poate aplica;

— metoda nu permite calcularea eforturilor unitare și în alte secțiuni decît BB' și AA'.

În lucrarea [6] se folosește tot ipoteza barelor curbe, însă se acceptă că încărcarea exterioară se transmite de la arbore la alezajul eclisei, distribuindu-se după o lege cosinusoidală, ipoteză mult mai aproape de realitate. Lucrarea [6] studiază un caz particular cu forța în lungul axei ecliselor (ca și celelalte lucrări de altfel), pentru un tip de lanț, caz care nu este valabil decît pentru zalele din ramura activă, nu și pentru cele care angrenează cu roțile la care forța F face un unghi ω cu axa ecliselor. În plus, metoda expusă în [6] alege arbitrar și incorect secțiunea de încastrare a ochiului la corpul eclisei și face unele simplificări care viciază sensibil rezultatele.

Prezenta lucrare își propune să continue cercetările din lucrările menționate mai sus, și să elaboreze o metodă teoretică generală pentru determinarea eforturilor din eclisele lanțurilor verificată experimental.

2. STABILIREA EFORTURILOR DIN ELEMENTELE LANȚULUI DATORITĂ AJUSTAJULUI CU STRÎNGERE

2.1. GENERALITĂȚI

În construcția lanțurilor cu role și zale scurte se întîlnesc două ajustaje cu strîngere și anume, între bolț și eclisele exterioare (simbolizat în prezenta lucrare prin b—EE), respectiv între bucșe și eclisele interioare (simbolizat prin B—EI). Durabilitatea în exploatare a lanțurilor depinde foarte mult, pe lîngă alți factori, de precizia și calitatea acestor ajustaje.

Un ajustaj cu strîngere este corespunzător [9], [10] ș.a., cînd garantează imobilitatea asamblării în cazul valorii minime a strîngerii efective ($S_{\text{min. ef}}$) și piesele conjugate nu sînt suprasolicitate pentru valoarea maximă a strîngerii efective ($S_{\text{max.ef}}$).

Rezistența asamblării cu strîngere este influențată de o serie de factori foarte variați, dintre care cei mai importanți sînt: mărimea strîngerii, lungimea, grosimea pereților și materialele din care sînt confecționate piesele conjugate, macro și microgeometria suprafețelor conjugate ș.a.

Considerăm că în calcule trebuie lucrat cu valorile strîngerilor efective, și (ținînd seama de faptul că elementele componente ale lanțului

se fabrică în producție de mare serie sau masă) cu valorile probabile ale strîngerilor,

$$S_{ef} = S - (C_D \cdot R_{z_D} + C_d \cdot R_{z_d}), \tag{5}$$

$$S_{min.p} = S_{min} + \frac{T_S - T_{S_p}}{2} = S_{med} - \frac{T_{S_p}}{2},$$

$$S_{max.p} = S_{max} - \frac{T_S - T_{S_p}}{2} = S_{med} + \frac{T_{S_p}}{2}, \tag{6}$$

în care R_{z_D} și R_{z_d} reprezintă rugozitatea suprafeței alezajului, respectiv arborelui;

C_D și C_d — coeficienți stabiliți experimental ($C_D \approx \approx C_d \approx 1 \ldots 1,2$);

T_S și T_{S_p} — toleranțele ajustajului cu strîngere teoretic S, respectiv probabil S_p.

În toate calculele privind determinarea eforturilor datorită fretării, strîngerea va fi notată cu S, iar pentru stabilirea corectă a acestora trebuie întotdeauna considerate valorile efective limită probabile ($S_{p.max.ef}$, respectiv $S_{p.min.ef}$).

2.2. CALCULUL AJUSTAJELOR CU STRÎNGERE ALE LANȚURILOR ÎN DOMENIUL ELASTIC

Așa cum s-a arătat în § 1, datorită formei și caracterului asamblărilor cu strîngere *b—EE* și *B—EI*, acestea se asimilează tuburilor cu pereți groși fretate.

Calculul presiunii de fretare p, dintre arborele *1* și alezajul *2* (fig. 3) se poate face în două moduri și anume: după teoria elementară (Lamé), care ține seama numai de mărimea strîngerii și diametrele pieselor conjugate (rapoartele K_1 și K_2), sau după teoria corectată (Rankine ș.a.), care, în plus, ține seama și de lungimea finită a asamblării.

Eforturile unitare la tuburile fretate (fig. 3) se calculează cu relațiile următoare [11], [12] ș.a.:

$$\sigma_r = -\frac{p}{1 - K_1^2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right),$$

$$\sigma_\theta = -\frac{p}{1 - K_1^2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right), \quad \text{— pentru arbore,} \tag{7}$$

$$\sigma_r = \frac{p}{1 - K_2^2}\left(K_2^2 - \frac{r_0^2}{r^2}\right),$$

$$\sigma_\theta = \frac{p}{1 - K_2^2}\left(K_2^2 + \frac{r_0^2}{r^2}\right), \quad \text{— pentru alezaj} \tag{8}$$

în care r_0 este raza suprafeței de contact (după asamblare);
$K_1 = a/r_0$ și $K_2 = r_0/b$, coeficienți adimensionali ai tuburilor.

Presiunea de fretare se calculează din egalarea sumei valorilor absolute ale deplasărilor radiale u_1 și u_2, produse de aceasta în punctele

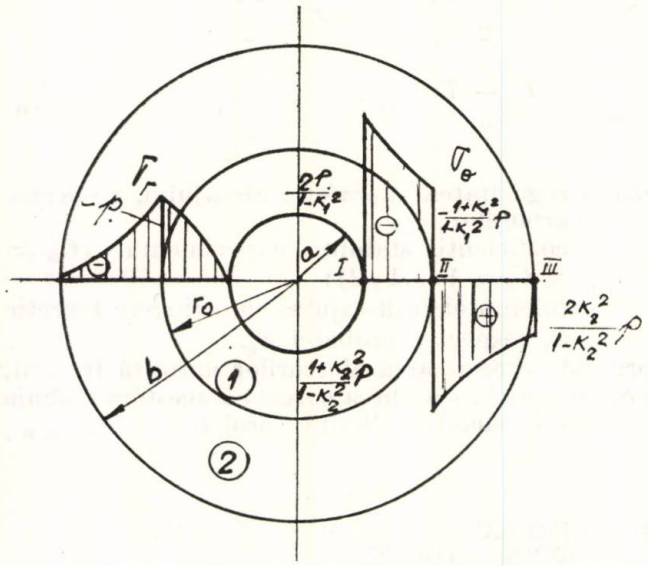


Fig. 3. — Diagramele de eforturi la tuburile fretate.

de contact dintre arbore și alezaj ($r = r_0$), cu jumătatea strîngerii care a produs această presiune.

Pentru teoria elementară (Lamé) rezultă:

$$u_1 = \frac{p \cdot r_0}{E_1}\left(\frac{1 + K_1^2}{1 - K_1^2} - \mu_1\right); \quad u_2 = \frac{p \cdot r_0}{E_2}\left(\frac{1 + K_2^2}{1 - K_2^2} + \mu_2\right), \tag{9}$$

$$u_1 + u_2 = \frac{S}{2}, \tag{10}$$

$$p = \frac{S}{2r_0} \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{E_1}\left(\dfrac{1 + K_1^2}{1 - K_1^2} - \mu_1\right) + \dfrac{1}{E_2}\left(\dfrac{1 + K_2^2}{1 - K_2^2} + \mu_2\right)}. \tag{11}$$

Pentru cazul cînd piesele sînt din același material (oțel), avem $E_1 = E_2 = E$ și $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, relația (11) devenind

$$p = \frac{S \cdot E}{2r_0} \cdot \frac{1}{\dfrac{1 + K_1^2}{1 - K_1^2} + \dfrac{1 + K_2^2}{1 - K_2^2}}. \tag{12}$$

În realitate ajustajele cu strîngere ale lanțurilor nu sînt de lungime infinită, ci au o lungime bine determinată, arborele fiind mai lung decît alezajul. În acest caz presiunea de fretare nu se mai distribuie uniform în lungul asamblării, datorită capetelor arborelui (bolț sau bucșe) care ies din alezajele ecliselor, împiedecînd deformația lor. Se obține astfel la marginea asamblării, o presiune mult mai mare, așa cum se vede și din diagrama de distribuție reală, obținută experimental (fig. 4).

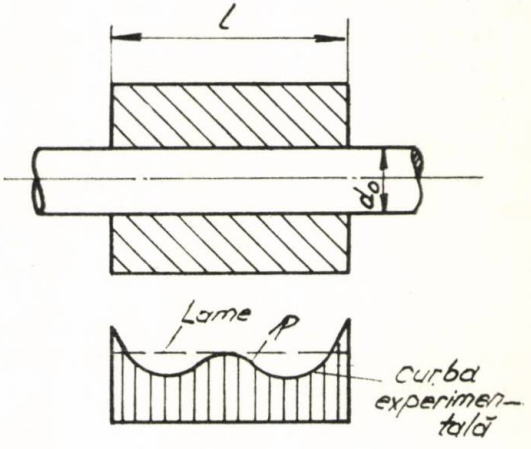


Fig. 4. — Variația presiunii de fretare la tuburi fretate de lungimi finite.

Legea de distribuție a presiunii de fretare pe lungime nu este cunoscută suficient, metoda de calcul cea mai apropiată de realitate fiind cea propusă de Rankiné ș.a. [12] care constă în următoarele:

— se consideră presiunea p_{med} uniform distribuită pe lungimea l;
— se determină valoarea deplasării medii pe suprafețele arborelui (u_{1med}) și alezajului (u_{2med});
— se egalează suma deplasărilor medii cu jumătatea strîngerii și se calculează p_{med}

$$u_{1\,med} = \int_0^l \frac{u \cdot dz}{l} = k \frac{p_{med} \cdot r_0}{E_1} \left(\frac{1 + K_1^2}{1 - K_1^2} - \mu_1 \right),$$

$$u_{2\,med} = u_{2_{r=r_0}} = \frac{p_{med} \cdot r_0}{E_2} \left(\frac{1 + K_2^2}{1 - K_2^2} + \mu_2 \right), \tag{13}$$

$$u_{1\,med} + u_{2\,med} = \frac{S}{2}, \tag{14}$$

$$p_{med} = \frac{S}{2r_0} \cdot \frac{1}{\frac{k}{E_1}\left(\frac{1 + K_1^2}{1 - K_1^2} - \mu_1 \right) + \frac{1}{E_2}\left(\frac{1 + K_2^2}{1 - K_2^2} + \mu_2 \right)}. \tag{15}$$

în care $k = u_{1\,med}/u_1$ și este un coeficient funcție de raportul l/d_0 și K_1 [12].

Pentru $E_1 = E_2 = E$ și $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, rezultă

$$p_{med} = \frac{S \cdot E}{2r_0} \cdot \frac{1}{k\left(\frac{1+K_1^2}{1-K_1^2} - \mu\right) + \left(\frac{1+K_2^2}{1-K_2^2} + \mu\right)}. \tag{16}$$

Din figura 3 rezultă că, punctele cele mai solicitate sînt : I pentru tubul interior (bolț sau bucșe) și II pentru tubul exterior (eclisă).

Determinarea valorii limită a presiunii de fretare (p_c), pentru care în piesele conjugate nu se obțin eforturi care să producă deformații plastice, se face aplicînd un criteriu de rezistență. Considerăm că pentru acest caz trebuie aplicat criteriul energiei de variație a formei (rel. 17) în loc de cel al efortului tangențial maxim (folosit în alte lucrări [6] ș.a.) deoarece este mai complex și dă rezultate mai apropiate de realitate în astfel de cazuri

$$\sigma_{ech} = \sigma_\theta^2 + \sigma_r^2 - \sigma_\theta \cdot \sigma_r \leqslant \sigma_c. \tag{17}$$

Înlocuind în relația (17) valorile eforturilor unitare σ_θ și σ_r, date de relațiile (7), respectiv (8), pentru punctul I la tubul interior și punctul II la cel exterior, rezultă

$$\sigma_{ech1} = p\sqrt{\left(\frac{1+K_1^2}{1-K_1^2}\right)^2 + \frac{1+K_1^2}{1-K_1^2} + 1} \leqslant \sigma_{c1};$$

$$p_c = \frac{\sigma_{c1}}{\sqrt{\left(\frac{1+K_1^2}{1-K_1^2}\right)^2 - \frac{1+K_1^2}{1-K_1^2} + 1}},$$

$$\sigma_{ech\,2} = p\sqrt{\left(\frac{1+K_2^2}{1-K_2^2}\right)^2 + \frac{1+K_2^2}{1-K_2^2} + 1} \leqslant \sigma_{c2}; \tag{18}$$

$$p_c = \frac{\sigma_{c2}}{\sqrt{\left(\frac{1+K_2^2}{1-K_2^2}\right)^2 + \frac{1+K_2^2}{1-K_2^2} + 1}}.$$

Din relațiile (18) se vede că presiunea limită de fretare p_c depinde de calitatea materialului σ_c și de elementele geometrice ale tuburilor K_1 și K_2. În cazul lanțurilor, tuburile interioare (bolțul sau bucșa) sînt executate din materiale cu rezistență ceva mai ridicată decît cele ale ecliselor [13], [14] ș.a. Ținînd seama și de valorile obișnuite ale coeficienților K_1 și K_2, pentru acest caz, rezultă că tubul exterior (eclisa) are capacitatea de încărcare cea mai redusă. Din această cauză presiunea limită p_c trebuie să se determine întotdeauna, la ajustajele cu strîngere ale lanțurilor, cu a doua dintre relațiile (18).

Valoarea strîngerii limită S_c se poate calcula din relația (12) pentru ipoteza lui Lamé, respectiv din relația (16) pentru ipoteza lui Rankiné, rezultînd :

$$S_c = \frac{d_0 \cdot p_c}{E}\left(\frac{1 + K_1^2}{1 - K_1^2} + \frac{1 + K_2^2}{1 - K_2^2}\right), \tag{19}$$

$$S_c = \frac{d_0 \cdot p_c}{E}\left[k\left(\frac{1 + K_1^2}{1 - K_1^2} - \mu\right) + \left(\frac{1 + K_2^2}{1 - K_2^2} + \mu\right)\right]. \tag{20}$$

Pentru calculele practice de proiectare sau verificare se va folosi relația (20) deoarece este mai aproape de realitate.

Dacă în relația (17) în loc de σ_c se trece rezistența admisibilă σ_a din relațiile (18), va rezulta o presiune de fretare admisibilă p_a. Aceasta, introdusă în relația (20), va da strîngerea admisibilă S_a, pe baza căreia se poate alege ajustajul cu strîngere optim.

Valoarea optimă a strîngerii (ajustajul optim) se poate calcula și direct din relația (20) aplicîndu-i anumiți coeficienți de siguranță.

Piesele conjugate care formează ajustaje cu strîngere la lanțuri se execută din oțeluri diverse [13], [14] ș.a. cu caracteristici fizico-mecanice diferite. La fabricația curentă a lanțurilor, pentru aceste piese, se folosesc oțeluri de tipul celor trecute în tabela 1, avînd caracteristicile fizico-mecanice stabilite prin cercetările făcute în lucrările [13], [14] ș.a.

Folosind relațiile (18) și (20) precum și valorile medii date în tabela 1, s-au calculat p_c, S_c precum și strîngerea relativă limită $s_c = S_c/d_0$, pentru ajustajele $b—EE$ și $B—EI$ ale principalelor tipuri de lanțuri folosite curent în industrie (tabela 2).

Din valorile prezentate în tabela 2, rezultă că presiunea limită p_c, respectiv strîngerea relativă limită s_c, sînt practic aceleași la toate dimensiunile de lanț, pentru același ajustaj.

Considerăm că pentru prescrierea corectă a ajustajelor cu strîngere ale lanțurilor, trebuie procedat după un criteriu științific și nu în mod arbitrar așa cum se face actualmente în practică. Apreciem că cel mai indicat criteriu este cel al strîngerii relative limită, s_c, căruia să i se aplice un coeficient de siguranță ales corespunzător, astfel ca să nu se depășească capacitatea de încărcare a pieselor conjugate și să rămînă o rezervă suficientă și pentru eforturile date de încărcarea exterioară. Eventual se poate lucra direct cu o strîngere relativă admisibilă, s_a, stabilită pe baza rezistenței admisibile a materialului respectiv.

Precizăm că această idee a fost însușită de cei interesați și va fi aplicată la proiectarea ajustajelor lanțurilor fabricate la noi.

În tabela 3, se dau ajustajele folosite pînă acum la fabricarea unor lanțuri de acest tip (notate cu U_z) și unele propuse de autor, prescrise corect după criteriul expus mai sus (notate cu A). În această tabelă, pentru calculul strîngerilor efective, s-a considerat rugozitatea pieselor tip arbore $R_{z_d} = 3{,}2$ μm, (valoarea prescrisă actualmente), iar la piesele tip alezaj $R_{z_D} = 12{,}5$ μm pentru cele notate cu U_z (valoarea

Tabe

Oţelurile şi caracteristicile lor fizico-mecanice, folosite la execuţia

Piesă	Oţel	Tratament termic	HV	σ_r
			kgf/mm^2	
Eclisă	41MoC11	Îmbunătăţire	340—400	125—135
Bolţ	SoVC11	Îmbunătăţire	450—500	155—175
Bucşă	13CN25	Cementat	670—780	230—260

prescrisă actualmente), respectiv $R_{z_D} = 6{,}3$ μm pentru cele notate cu A (valoare propusă de autor ca fiind mai corectă).

Analizînd datele pentru ajustajele actuale, U_z, prezentate în tabela 3, rezultă că valorile strîngerilor diverselor tipuri de lanţuri sînt prescrise cu totul arbitrar, practic independent de dimensiunile pieselor conjugate şi de perechile care îl formează. Valorile strîngerilor prescrise sînt mult prea mari, în special la ajustajele $b—EE$, iar la lanţurile de dimensiuni mici şi la cele $B—EI$, fapt ce creează în eclise, încă din montaj, eforturi unitare cu mult peste limita de curgere. Dacă se ţine seama de faptul că, în unele secţiuni ale ochiului eclisei, aceste eforturi unitare au acelaşi semn cu cele date de forţa exterioară F, situaţia se agravează şi mai mult, lucru ce explică desele ruperi ale ecliselor şi durabilitatea relativ scăzută a acestor lanţuri.

Rezultă clar că prescrierea valorilor strîngerilor s-a făcut fără nici o bază de calcul, lucru rezultat, evident, şi din faptul că la ajustajele $b—EE$ se prescriu valori absolute chiar mai mari decît la cele $B—EI$, deşi primele au o valoare limită a strîngerii relative mai mică ($s_c = 6{,}25$ faţă de $s_c = 8{,}80 \ldots 9{,}15$).

Ajustajele propuse în lucrarea (A) sînt stabilite pe criteriul strîngerii relative limită căreia i s-a aplicat un coeficient de siguranţă. Acestea, eventual cu unele mici corecţii, pot fi recomandate pentru folosirea lor imediată, în practică.

În afară de criteriul valorilor limită maxime, determinate ca mai sus, trebuie verificată şi stabilitatea ajustajelor la deplasarea axială, respectiv la rotirea pentru valorile minime ale strîngerilor. Aceste verificări sînt inutile pentru cazul ajustajelor cu strîngere de la lanţuri, din considerentele următoare:

— slăbirea ajustajelor prin deplasarea axială a arborelui (bolţul sau bucşa) nu se poate produce, deoarece, în mod normal, zalele nu sînt supuse la eforturi după această direcţie; aceste forţe pot apare numai din cauze accidentale cum ar fi erorile de execuţie sau montaj ale pieselor componente ale lanţului sau ale organelor transmisiei;

— forţele active din lanţ sînt mult mai mici, decît cele minime admise (din considerente de durabilitate la oboseală), astfel încît nu există pericolul de slăbire al ajustajelor prin rotire decît în cazul unor accidente (execuţie necorespunzătoare a ajustajelor cu strîngere ş.a..)

la 1

pieselor conjugate ale ajustajelor cu strîngere ale lanțurilor cu role

σ_c kgf/mm²	δ_5 [%]	E kgf/cm²	G kgf/cm²	E_p kgf/cm²	μ
110—130	10—13	$2{,}1 \cdot 10^6$	$8{,}07 \cdot 10^5$	$5{,}3 \cdot 10^4$	0,3
150—170	8— 9	$2{,}1 \cdot 10^6$	$8{,}07 \cdot 10^5$	$5{,}3 \cdot 10^4$	0,3
210—240	—	$2{,}1 \cdot 10^6$	$8{,}07 \cdot 10^5$	$5{,}3 \cdot 10^4$	0,3

2.3. CALCULUL AJUSTAJELOR CU STRÎNGERE ALE LANȚURILOR ÎN DOMENIUL PLASTIC

În acest caz se pot considera două situații și anume:

— cînd se ajunge în domeniul plastic datorită prescrierii unei strîngeri prea mari;

— cînd se creează pe suprafețele de asamblare o stare de tensiuni remanente, de sens contrar celei date de fretare, pentru a se mări capacitatea de rezistență a pieselor conjugate (în acest caz prezintă importanță practică în special deformarea prealabilă a alezajelor ecliselor).

Metoda de calcul în domeniul plastic se poate aplica fie pentru a se stabili zona plastificată (raza r_c) din cauza prescrierii unor strîngeri prea mari, fie pentru cazul deformării prealabile a pieselor conjugate în vederea măririi capacității lor de rezistență. Din punct de vedere practic interesează numai a doua situație, prima nefiind permis să se obțină la o proiectare corectă.

Tabela 2

Presiunile și strîngerile limită obținute la realizarea fretării ajustajelor lanțurilor

Tipul de lanț	Ajustajul	K_1	K_2	$1/d_0$	k	p_c kgf/cm²	S_c μm	s_c μm/mm
16 A	*b-EE*	0	0,380	0,41	0,80	5350	49	6,25
	B-EI	0,720	0,485	0,29	0,60	5400	102	9,15
24 A	*b-EE*	0	0,354	0,44	0,81	6070	69	6,25
	B-EI	0,690	0,450	0,30	0,62	5580	143	8,80
32 A	*b-EE*	0	0,343	0,45	0,83	6100	89	6,25
	B-EI	0,704	0,426	0,31	0,63	5600	187	9,15
40 A	*b-EE*	0	0,380	0,41	0,80	5950	123	6,25
	B-EI	0,702	0,472	0,29	0,60	5330	250	8,80

Tabela 3

Ajustajele cu strângere pentru principalele tipuri de lanțuri

Tip lanț	Ajustajul		Toleranța T[μm]		Strângerea relativă s în μm/mm								
			Teoretică T_S	Probabilă T_{S_p}	max.	min.	max. p.	min. p.	max.p.ef.	min.p.ef.	medie	medie. ef.	limită
16 A	*b-EE*	*Uz*	45	35,5	15,30	9,60	14,60	10,35	12,60	8,40	12,45	10,50	6,25
		A	31	24	6,40	2,30	5,95	2,80	4,70	1,70	4,35	3,20	
	B-EI	*Uz*	53	39,5	9,90	5,10	9,25	5,75	7,85	4,35	7,50	6,10	9,15
		A	45	33	8,90	5,10	8,30	5,55	7,65	4,35	7,00	6,00	
24 A	*b-EE*	*Uz*	53	39,5	12,65	7,85	12,00	8,50	10,60	7,10	10,25	8,85	6,25
		A	38	29	6,30	2,90	5,30	3,30	5,05	2,45	4,60	3,75	
	B-EI	*Uz*	53	39,5	7,45	4,15	6,95	4,55	6,00	3,60	5,80	4,80	8,80
		A	43	33	6,20	3,50	5,85	3,80	5,25	3,25	4,85	4,25	
32 A	*b-EE*	*Uz*	53	39,5	11,35	7,55	10,80	8,00	9,75	6,95	9,40	8,35	6,25
		A	43	33	5,70	2,60	5,30	2,95	4,60	2,30	4,15	3,45	
	B-EI	*Uz*	66	49,5	6,85	3,65	6,45	4,00	5,75	3,25	5,25	4,50	9,15
		A	54	38	6,80	4,20	6,45	4,60	6,00	4,10	5,50	5,05	
40 A	*b-EE*	*Uz*	66	49,5	9,15	5,75	8,70	6,20	7,90	5,40	7,45	6,65	6,25
		A	54	38	5,55	2,85	5,15	3,25	4,70	2,70	4,20	3,70	
	B-EI	*Uz*	70	51,5	5,80	2,80	5,00	3,10	4,45	2,55	4,30	3,50	8,80
		A	54	38	5,20	3,40	5,00	3,65	4,60	3,30	4,30	3,95	

Stabilirea eforturilor unitare, în cazul solicitării în domeniul plastic-elastic, se face folosind ecuațiile de echilibru mecanic și criteriile de plasticitate [11], [12] ș.a. (în acest caz teoria energiei de variație a formei).

Pentru variația eforturilor unitare cu deformațiile peste limita de curgere, se folosesc, în general, două diagrame simplificate (fig. 5) și anume fără întărire ($E_p = 0$) și cu întărire ($E_p > 0$).

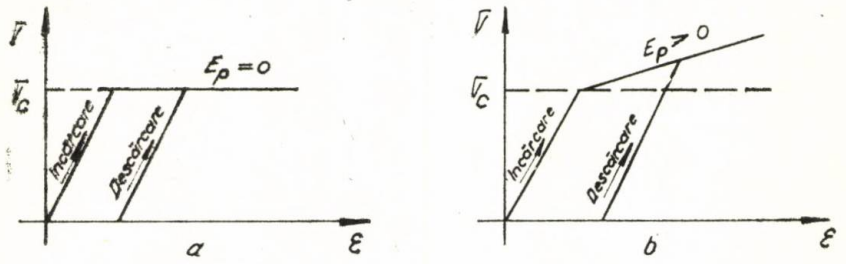


Fig. 5. — Curbe simplificate pentru variația deformațiilor peste banta de curgere: *a* — fără întărire ($E_p = 0$); *b* — cu întărire ($E_p > 0$).

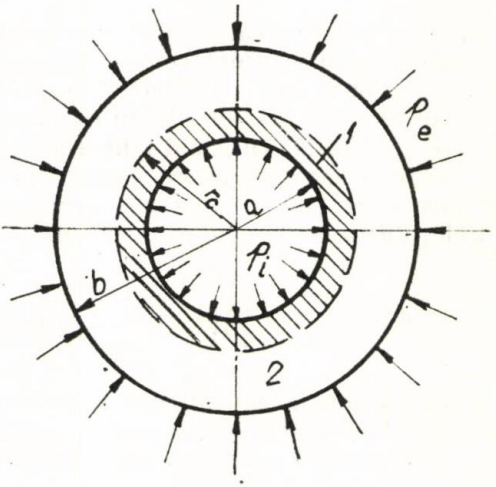


Fig. 6. — Tub cu pereți groși plastificat parțial.

Se consideră un tub (fig. 6) plastificat pînă la raza r_c cu presiunea $q_c m$ dintre zona plastificată *1* și cea elastică *2*. Se folosesc următoarele notații:

$$\beta = r_c/a = 1/K_1; \quad \alpha = b/a = 1/K; \quad \rho = r/a; \quad \lambda = 1 - E_p/E. \tag{21}$$

Pentru zona *1* plastificată total rezultă:

$$\sigma_r = -p_i + \operatorname{sing}(p_i - p_e)\frac{\sigma_c}{\sqrt{3}}\left[(1-\lambda)\left(\beta^2 - \frac{\beta^2}{\rho^2}\right) + 2\lambda \ln \rho\right],$$

$$\sigma_\theta = -p_i + \operatorname{sing}(p_i - p_e)\frac{\sigma_c}{\sqrt{3}}\left[2\lambda + (1-\lambda)\left(\beta^2 + \frac{\beta^2}{\rho^2}\right) + 2\lambda \ln \rho\right]. \tag{22}$$

Pentru zona 2, aflată în domeniul elastic, rezultă:

$$\sigma_r = -p_i + \operatorname{sing}(p_i - p_e)\frac{\sigma_c}{\sqrt{3}}\left[\beta^2 - \frac{\beta^2}{\rho^2} - \lambda(\beta^2 - 1) + 2\lambda \ln \beta\right],$$
$$\sigma_\theta = -p_i + \operatorname{sing}(p_i - p_e)\frac{\sigma_c}{\sqrt{3}}\left[\beta^2 + \frac{\beta^2}{\rho^2} - \lambda(\beta^2 - 1) + 2\lambda \ln \beta\right]. \quad (23)$$

Valorile pentru q_c și $p_i - p_e$ sînt:

$$q_c = \sqrt{3}\,\frac{|p_i - p_e|}{\sigma_c} = 1 - \lambda - \frac{1}{\alpha^2}\Big)\beta^2 + \lambda + 2\lambda \ln \beta, \quad (24)$$

$$|p_i - p_e| = \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}}\left(1 - \lambda - \frac{1}{\alpha^2}\right)\cdot \beta^2 + \lambda + 2\lambda \ln \beta. \quad (25)$$

Pentru mărirea capacității de rezistență a tuburilor se folosește efectul autofretării prin deformarea prealabilă a acestora cu ajutorul unei presiuni interioare la care apar deformații plastice.

Autofretarea se face fie la un regim cu zonă elastică, fie la un regim cu plastificare totală. În cazul lanțurilor se aplică autofretarea cu plastificarea parțială fără întindere axială (prin sisteme mecanice cum sînt mandrinarea, tragerea pe dorn, calibrarea etc.).

Relațiile dintre presiunea de autofretare, $p_a = p_i$ și r_c, sînt:

$$p_a = p_i = \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}}\left[\left(1 - \lambda - \frac{1}{\alpha^2}\right)\cdot \beta^2 + \lambda + 2\lambda \ln \beta\right]. \quad (26)$$

După dispariția cauzei, tubul se descarcă elastic (vezi fig. 5) dar rămîne cu o deformație permanentă. Descărcarea elastică se face la $p_i = -p_a$, fapt pentru care se aplică relațiile lui Lamé. Suprapunînd cele două stări de tensiuni (încărcare și descărcare) se obține diagrama tensiunilor remanente.

Realizînd ajustajele cu strîngere cu o astfel de eclisă, se produce o nouă încărcare exterioară în domeniul elastic, care dă o presiune de fretare $p' = p_i$ și se aplică relațiile lui Lamé pentru σ_r și σ_θ. Suprapunînd aceste valori peste cele remanente se obțin eforturile unitare efective σ_r^{ef} și σ_θ^{ef}.

După cum se arată în diverse lucrări de specialitate [15], [16] ș.a. ecruisarea prin întindere sau compresiune mărește rezistența la oboseală cu 10...40 %. Efectul deformării plastice prealabile este și mai important la ciclurile de solicitare la care coeficientul de asimetrie este $0 < R < 1$, așa cum este cazul lanțurilor de transmisie.

Deoarece elementul care limitează presiunea de fretare și forța exterioară de încărcare este eclisa, se va studia numai cazul deformării prealabile a alezajului eclisei.

Pentru acest caz se consideră că se încarcă eclisa pînă se produce o deformare plastică pe adîncimea radială δ, rezultînd

$$\beta = \frac{a + \delta}{a} = 1 + \frac{\delta}{a}. \tag{27}$$

Dînd diverse valori lui δ, respectiv β, se poate calcula presiunea de autofretare p_a cu relația (26). În funcție de această presiune, se calculează starea de tensiuni în cele două zone ale tubului (fig. 7).

Calculînd raportul p_a/σ_c, se vede că el depinde numai de λ, β și α. Deoarece λ este practic același pentru toate oțelurile folosite la fabricarea eclisele, raportul p_a/σ_c depinde numai de β și α. Calculînd coeficienții $\alpha = b/a$, pentru eclisele diverselor dimensiuni de lanț de același tip (standardizate), se constată că el are o variație redusă și anume pentru lanțurile tip A: $\alpha = 2{,}70 \ldots 2{,}90$ pentru eclisele exterioare ($\alpha_{med} \approx 2{,}80$), și $\alpha = 2{,}16 \ldots 2{,}28$ pentru cele interioare ($\alpha_{med} \approx 2{,}22$). Datorită acestei constatări se poate calcula raportul p_a/σ_c (cu relația 26) în funcție numai de β pentru toate dimensiunile de lanț de același tip. Efectuînd acest calcul se obțin rezultatele prezentate în figura 8.

Eforturile unitare (σ_{inc}) date de încărcarea pentru deformarea plastică prealabilă cu p_a, se calculează cu relațiile (22) și (23), iar cele obținute la descărcarea în domeniul elastic (σ_{desc}) la presiunea $p_i = -p_a$, cu relațiile (8). După descărcare va rezulta o stare de tensiuni remanente dată de relația

$$\sigma_{rem} = \sigma_{inc} + \sigma_{desc}. \tag{28}$$

Variația tensiunilor remanente în punctele A, C și B funcție de β, este reprezentată grafic în figura 9.

Realizînd acum ajustajul cu strîngere, încărcarea se realizează în domeniul elastic și se creează presiunea de fretare p' care produce, pentru eclisă, starea de tensiuni din figura 3 în care $p = p'$. Suprapunînd diagrama de eforturi din figura 3 peste cea a tensiunilor remanente din figura 7, rezultă următoarele valori:

$$(\sigma_r^A)_{ef} = -p'; \; (\sigma_r^C)_{ef} = \frac{p'}{\alpha^2 - 1}\left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) + C_r' \cdot \sigma_c; \; (\sigma_r^B)_{ef} = 0,$$

$$(\sigma_\theta^A)_{ef} = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1}p' + A_r \cdot \sigma_c; \; (\sigma_\theta^C) = \frac{p'}{\alpha^2 - 1}\left(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) + C_r \cdot \sigma_c, \tag{29}$$

$$(\sigma_\theta^B)_{ef} = \frac{2p'}{\alpha^2 - 1} + B_r \cdot \sigma_c.$$

Coeficienții A_r, B_r, C_r și C_r' reprezintă valorile rapoartelor $\sigma_{\theta rem}/\sigma_c$, respectiv $\sigma_{r.rem}/\sigma_c$ și sînt dați în figura 9.

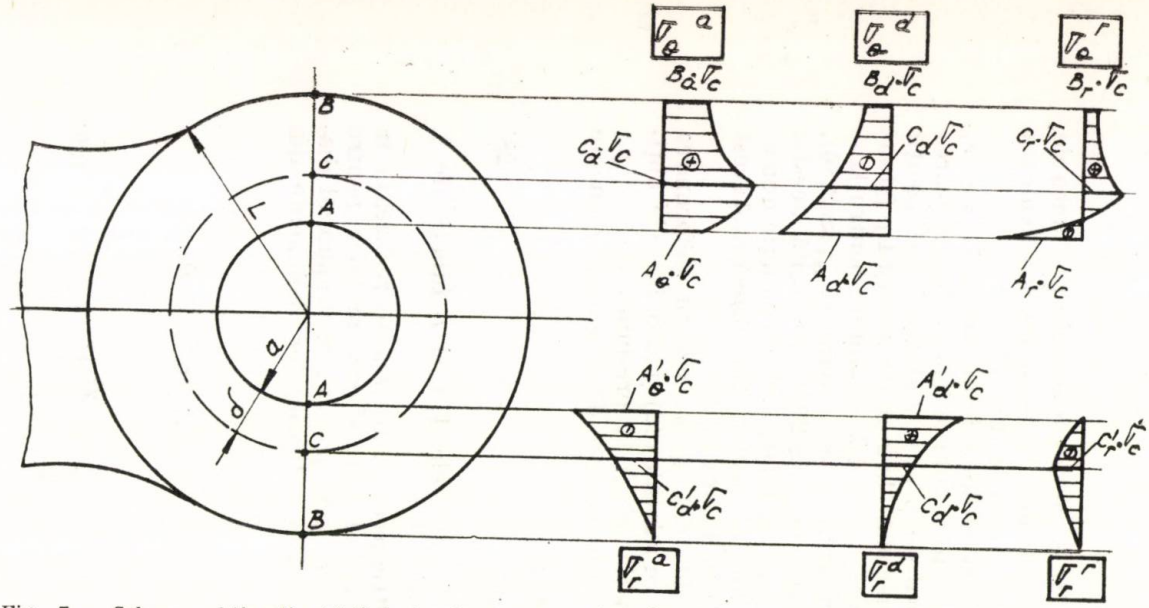


Fig. 7. — Schema obținerii stării de tensiune remanente prin deformare plastică prealabilă.

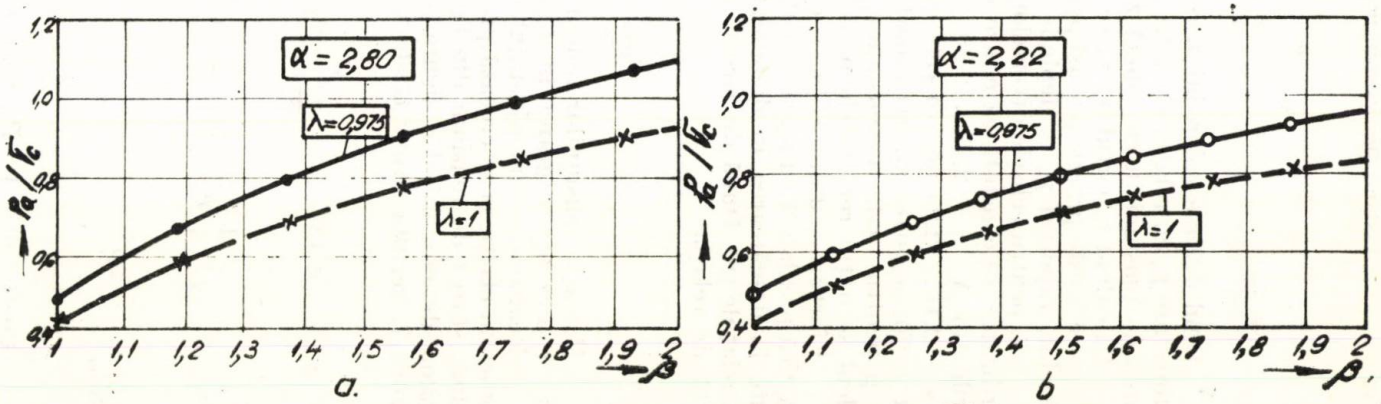


Fig. 8. — Variația p_c/σ_c funcție de β: a — eclisă exterioară; b — eclisă interioară.

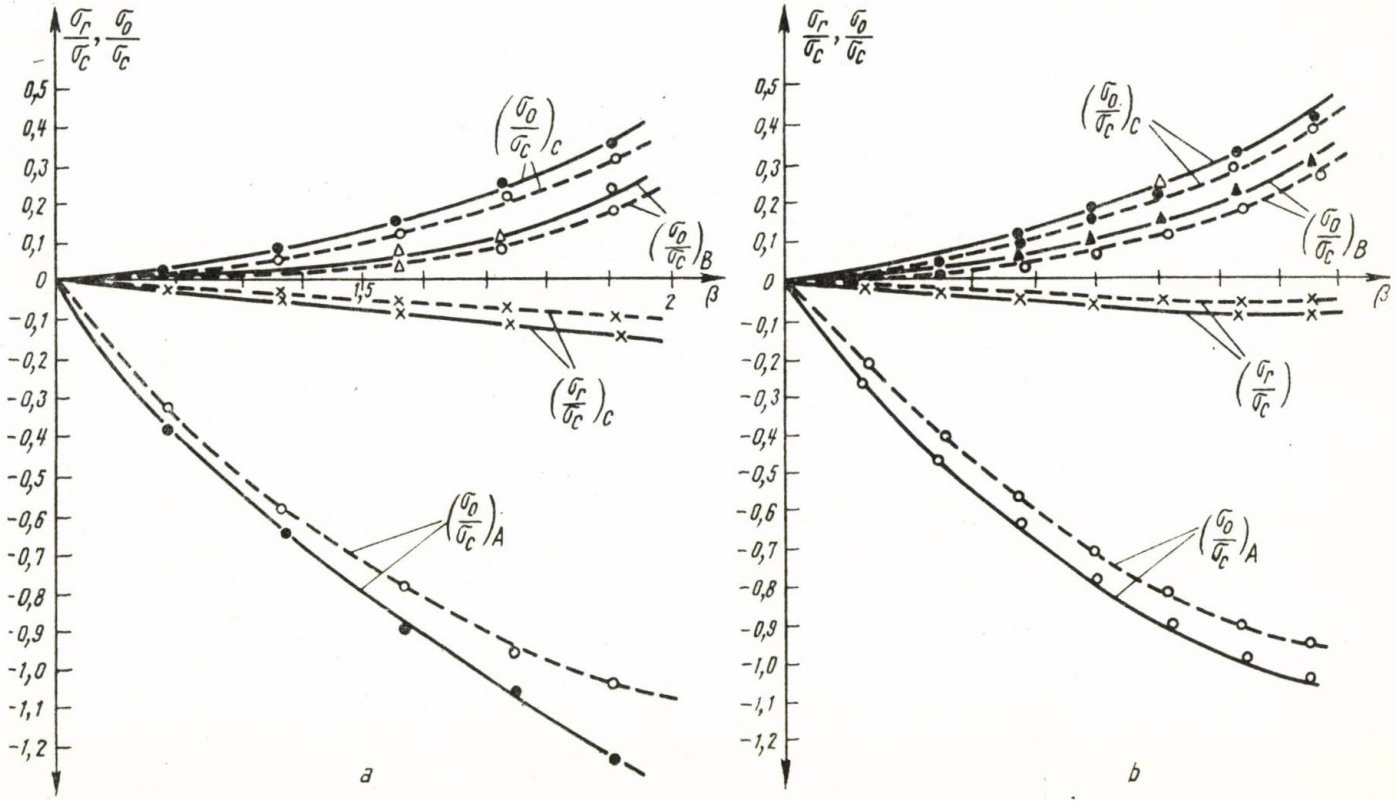


Fig. 9. — Variația tensiunilor remanente funcție de β în secțiunea ochiului eclisei: *a*— eclisă exterioară; *b* — eclisă interioară.

Pentru a putea calcula noua presiune limită de fretare, p'_c, respectiv noua valoare a strîngerii relative limită s'_c, trebuie calculat efortul unitar echivalent efectiv în punctele A şi C, care sînt cele mai solicitate. Pentru acestea, aplicînd criteriul de rezistenţă al energiei de variaţie a formei, rezultă :

$$\sigma_{(ech)_{ef}}^{(A} = \sqrt{\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}p' + A_r\cdot\sigma_c\right)^2 + p'^2 + p'\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}p' + A_r\cdot\sigma_c\right)} \leqslant \sigma_c, \tag{30}$$

$$(\sigma_{ech}^{C})_{ef} = \sqrt{\left[\frac{p'}{\alpha^2-1}\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) + C_r\cdot\sigma_c\right]^2 + \left[\frac{p'}{\alpha^2-1}\left(1-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) + C'_r\cdot\sigma_c\right]^2 -$$

$$-\left[\frac{p'}{\alpha^2-1}\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) + C_r\cdot\sigma_c\right]\cdot\left[\frac{p'}{\alpha^2-1}\left(1-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) + C'_r\cdot\sigma_c\right]} \leqslant \sigma_c. \tag{31}$$

Dezvoltînd, se obţin, în ambele cazuri, ecuaţii de gradul doi de forma

$$a\cdot p'^2 + b\cdot p' + c = 0, \tag{32}$$

unde coeficienţii a, b şi c, în punctele A şi C, au valorile :

$$a_A = \left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}\right)^2 + \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1} + 1; \qquad a_C = \frac{1}{(\alpha^2-1)^2}\left(3+\frac{\alpha^4}{\beta^4}\right),$$

$$b_A = \left(1+2\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}\right)A_r\cdot\sigma_c; \qquad b_C = \frac{\sigma_c}{\alpha^2-1}\left[4 - C'_r\left(1-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) - C_r\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\right], \tag{33}$$

$$c_A = \sigma_c^2\cdot(A_r^2-1); \qquad c_C = \sigma_c^2(C'^2_r + C_r^2 - C'_r\cdot C_r - 1).$$

Efectuînd calculele pentru diverse valori ale lui β, în cazul ecliselor de lanţ, rezultă că punctul care limitează presiunea de fretare p' este A. Din această cauză, stabilirea presiunii limită de fretare p' se face numai pe baza ecuaţiei (30), respectiv (32) dedusă din ea.

Pe baza acestor relaţii s-a stabilit variaţia rapoartelor p'_c/σ_c, respectiv s'_c/σ_c, funcţie de β, reprezentate în figura 10.

În concluzie, din calculele prezentate rezultă clar că prin deformarea prealabilă a alezajelor ecliselor, se obţine o sporire substanţială a capacităţii de încărcare a acestora, în special pe conturul interior care este cel mai solicitat. În acest caz se pot prescrie strîngeri mai mari, în

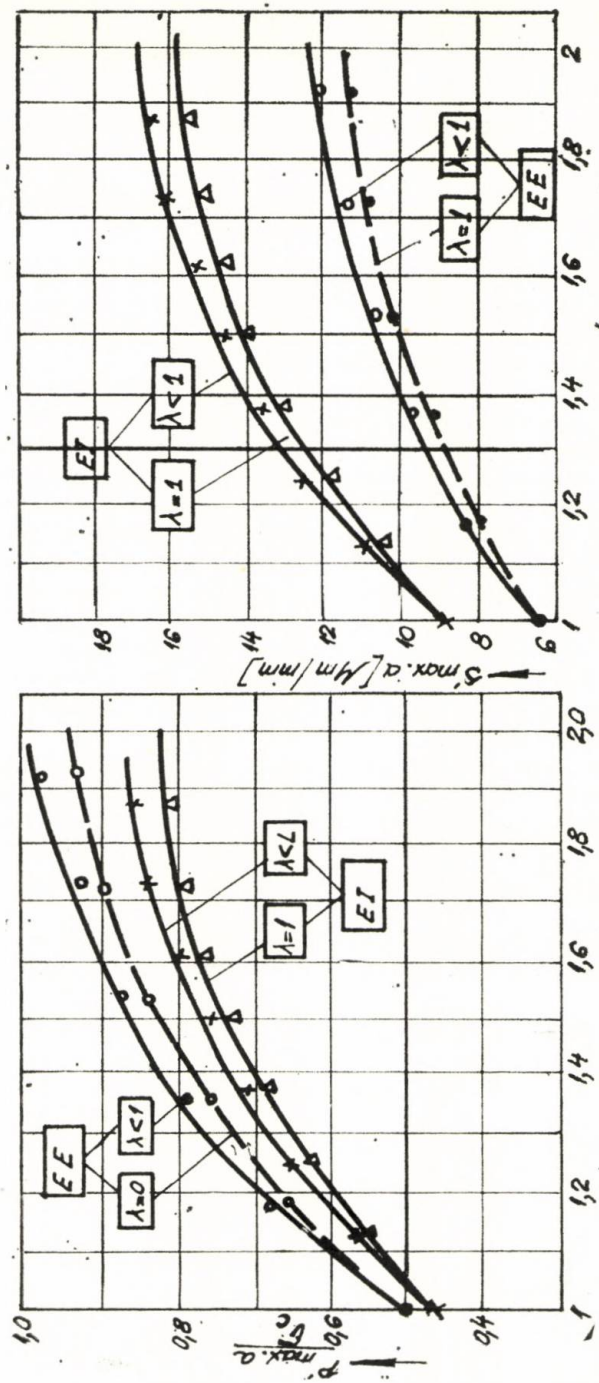


Fig. 10. — Influența lui β asupra : a — raportului $p'_{max \cdot c}/\sigma_c$; b — stringerii relative maxime capabile $s'_{max \cdot c}$.

special la lanțurile de dimensiuni mici pentru care acest procedeu de prelucrare devine absolut necesar, pentru eclise, eventual, și pentru bolțuri.

3. DETERMINAREA EFORTURILOR DIN ECLISE DATORITĂ ÎNCĂRCĂRII EXTERIOARE

3.1. STABILIREA DIAGRAMELOR DE EFORTURI

Stabilirea schemei de încărcare a ecliselor, în special la contactul acestora cu bolțurile sau bucșele, prezintă dificultăți apreciabile. Schema de calcul folosită actualmente (fig. 1), așa cum s-a arătat în §.1, nu este indicată pentru acest caz, dînd erori mari.

În prezenta lucrare, se consideră ochiul eclisei cu o bară curbă, cu presiunea de contact dintre piesele conjugate distribuită după o cosinusoidă, pe jumătate din circumferința alezajului. Bara curbă care formează ochiul eclisei se consideră încastrată la capul acesteia la un unghi β, față de axa orizontală a alezajului, ipoteză justificată prin rigiditatea mult mai mare a secțiunii corpului, în raport cu cea a ochiului.

Menționăm că s-ar putea lua în discuție și ipoteza considerării eclisei ca o placă cu orificiu, dar, în acest caz, calculele se complică foarte mult în schimbul obținerii unei creșteri relativ mici a preciziei acestora. În plus, așa cum se arată în literatura de specialitate [17], [18] ș.a., această teorie este aplicată numai pentru plăci cu orificiu, avînd lățimea și lungimea infinite sau foarte mari în raport cu diametrul orificiului, ceea ce nu este cazul la eclisele de lanț.

Ochiul eclisei este solicitat de o forță F, care poate acționa în lungul axei acesteia, în ramura activă, după o direcție oarecare, la angrenarea pe roți, datorită pasului unghiular și a forțelor din articulație. Cazul general este reprezentat de acțiunea unei forțe F care face cu axa eclisei unghiul ω (fig. 11 *a*). Cazul particular cu forța în lungul axei eclisei rezultă făcînd $\omega = 0°$.

Schema de calcul, pentru distribuția cosinusoidală a presiunii de contact p, este prezentată în figura 11 *b*, conform căreia rezultă

$$p = p_0 \cdot \cos(\alpha - \omega), \quad \text{[kgf/cm sau daN/cm] pe conturul } EE',$$

$$p = 0, \qquad \text{în afara conturului } EE'. \tag{34}$$

Din condiția de echilibru se obține

$$dF = p' \cdot b \cdot ds = p'_0 \cos(\alpha - \omega) \cdot b \cdot r \cdot d\alpha,$$

$$F = \int_{-\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)}^{\frac{\pi}{2} + \omega} dF \cdot \cos(\alpha - \omega) = \frac{\pi \cdot p'_0 \cdot b \cdot r}{2} = \frac{\pi \cdot p_0 \cdot r}{2}, \quad \text{[kgf sau daN]},$$

$$p_0 = \frac{2F}{\pi \cdot r}, \quad \text{[kgf/cm sau daN/cm]}. \tag{35}$$

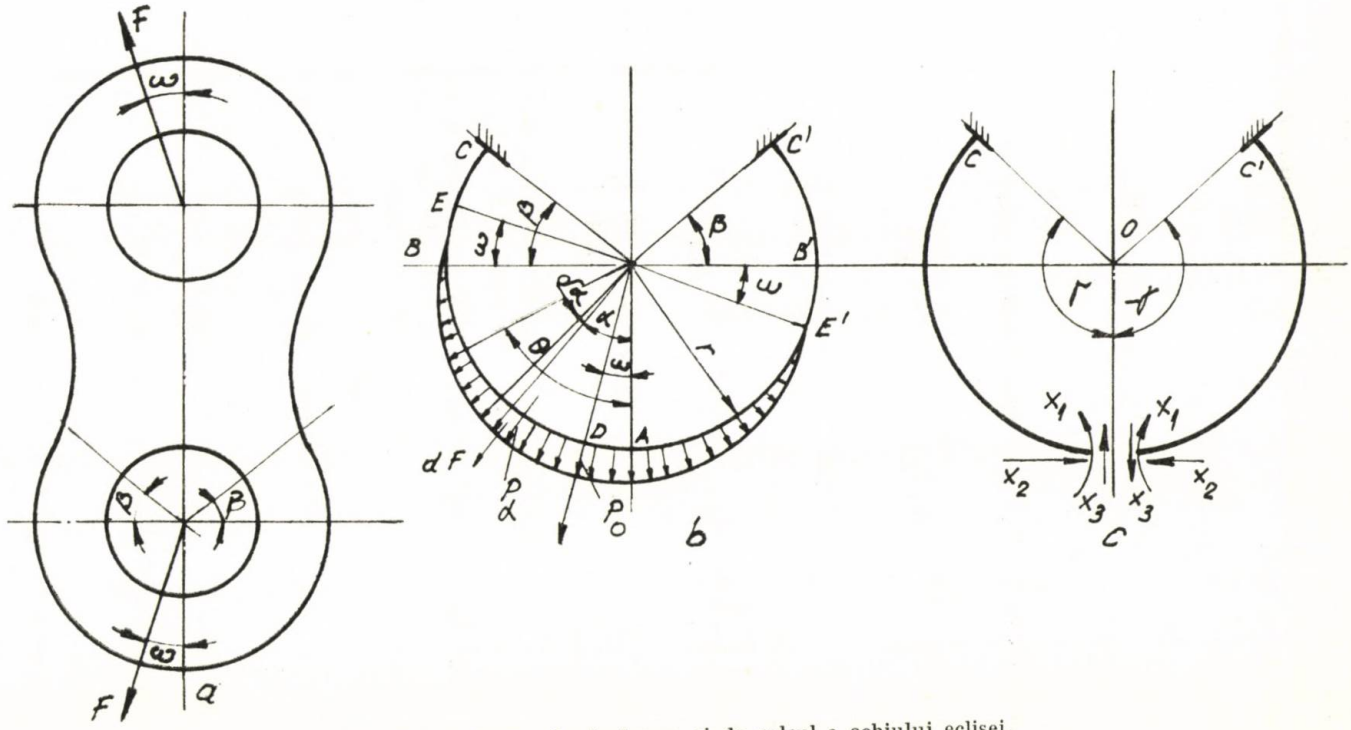


Fig. 11. — Schema de încărcare și de calcul a ochiului eclisei.

Rezolvarea sistemului static nedeterminat se face prin metoda eforturilor [19] ş.a., alegînd sistemul de bază ca în figura 11 *c*. Deoarece necunoscutele X_1 şi X_2 sînt simetrice, iar X_3 antisimetrică, rezultă următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{aligned} X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + \Delta_{10} &= 0, \\ X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + \Delta_{20} &= 0, \\ X_3 \cdot \delta_{33} + \Delta_{30} &= 0. \end{aligned} \tag{36}$$

Coeficienţii δ_{jh} şi Δ_{j0} se calculează cu relaţiile:

$$\delta_{jh} = \int_{-\gamma}^{\gamma} \left[m_j \cdot m_h \cdot \frac{sd}{EI''} + n_j \cdot n_h \cdot \frac{ds}{EA} + \varkappa \cdot t_j \cdot t_h \frac{ds}{GA} + \right.$$

$$\left. + (m_j \cdot n_h + n_j\, m_h) \frac{ds}{EAr} \right],$$

$$\Delta_{j0} = \int_{-\gamma}^{\gamma} \left[m_j \cdot M_0 \frac{ds}{EI''} + n_j \cdot N_0 \frac{ds}{EA} + \varkappa \cdot t_j \cdot T_0 \frac{ds}{GA} + \right.$$

$$\left. + (m_j \cdot N_0 + n_j \cdot M_0) \frac{ds}{EAr} \right], \tag{37}$$

unde m, n şi t reprezintă momentul încovoietor, forţa axială şi forţa tăietoare pentru $X = 1$;

M_0, N_0 şi T_0 — momentul încovoietor, forţa axială şi forţa tăietoare, date de încărcarea exterioară F pe sistemul de bază;

A — secţiunea transversală a barei curbe;

I'' — momentul de inerţie corectat funcţie de raportul r/h ($I'' = c \cdot I$);

$\varkappa$ — coeficient funcţie de forma secţiunii (pentru secţiunea dreptunghiulară $\varkappa = 1{,}2$).

Valorile eforturilor pe sistemul de bază sînt:

$X_1 = 1 : m_1(\theta) = m_1(-\theta) = 1;\ n_1(\theta) = n_1(-\theta) = 0;\ t_1(\theta) = t_1(-\theta) = 0,$

$X_2 = 2 : m_2(\theta) = m_2(-\theta) = -r\,(1 - \cos\theta);\ n_2(\theta) = n_2(-\theta) = \cos\theta,$
$t_2(\theta) = t_2(-\theta) = -\sin\theta;$

$X_3 = 1 : m_3(\theta) = -m_3(-\theta) = -r \cdot \sin\theta;\ n_3(\theta) = -n_3(-\theta) = -\sin\theta,$
$t_3(\theta) = -t_3(-\theta) = -\cos\theta,$

F: pentru $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} + \omega$, respectiv $-\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \leqslant -\theta \leqslant 0$;

$$M_0(\theta) = \frac{F \cdot r}{\pi} [\theta \cdot \sin(\theta - \omega) + \sin\theta \cdot \sin\omega], \tag{38}$$

$$N_0(\theta) = \frac{F}{\pi} [\theta \cdot \sin(\theta - \omega) + \sin\theta \cdot \sin\omega],$$

$$T_0(\theta) = \frac{F}{\pi} [\theta \cdot \cos(\theta - \omega) + \sin\theta \cdot \cos\omega]$$

pentru $\frac{\pi}{2} + \omega \leqslant \theta \leqslant \gamma$, respectiv $-\gamma \leqslant -\theta \leqslant -\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)$,

$$M_0(\theta) = \frac{F \cdot r}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \omega + \frac{1}{2}\sin 2\omega\right) \cdot \sin(\theta - \omega) - \cos^2\omega \cdot \cos(\theta - \omega)\right],$$

$$N_0(\theta) = \frac{F}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \omega + \frac{1}{2} \cdot \sin 2\omega\right) \cdot \sin(\theta - \omega) - \cos^2\omega \cdot \cos(\theta - \omega)\right],$$

$$T_0(\theta) = \frac{E}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \omega + \frac{1}{2} \cdot \sin 2\omega\right) \cdot \cos(\theta - \omega) + \cos^2\omega \cdot \sin(\theta - \omega)\right].$$

Valorile date de relațiile (38) sînt valabile pentru următoarea regulă de semne:

— momentul încovoietor este pozitiv cînd tinde să micșoreze curbura (mărește raza);

— forța axială este pozitivă cînd trage de secțiune;

— forța tăietoare este pozitivă cînd are sensul de la interior spre exterior.

Pentru determinarea locului de încastrare sînt necesare unele precizări. Astfel, în lucrarea [10], pentru calculul ochiului bielelor, se propune un unghi $\beta = 40°$, fără a da explicații. Pentru ochiul ecliselor de lanț, în lucrarea [5], care adoptă metoda expusă în [8], pentru alte piese, se alege $\beta = 0$, iar în lucrarea [6] se alege $\beta = 45°$ (aproximativ locul de racordare al ochiului la corp).

Considerăm că alegerea acestui unghi este deosebit de importantă și că ea nu se poate face arbitrar, fără justificări temeinice.

Pentru stabilirea cît mai corectă a acestui unghi, propunem a se lua drept criteriu rigiditatea la încovoiere, EI, a secțiunii respective. Acolo unde se constată o creștere apreciabilă a rigidității, în raport cu cea de bază a ochiului (barei curbe), se va considera locul de încastrare.

Calculînd rapoartele dintre rigidităţile secţiunilor ochiului eclisei $(EI)_\beta$, corespunzătoare diverselor unghiuri β şi rigiditatea constantă a secţiunii ochiului eclisei $(EI)_0$ pentru eclisele lanţurilor 16A, 24A, 32A şi 40A, rezultă :

— pentru eclisa interioară :

$$\frac{(EI)_{45}}{(EI)_0} = 1\,; \quad \frac{(EI)_{55}}{(EI)_0} = 1,7\ldots2\,; \quad \frac{(EI)_{60}}{(EI)_0} = 4,5\ldots5,5\,;$$

— pentru eclisa exterioară :

$$\frac{(EI)_{45}}{(EI)_0} = 1\,; \quad \frac{(EI)_{55}}{(EI)_0} = 1,5\ldots1,7\,; \quad \frac{(EI)_{60}}{(EI)_0} = 4\ldots5$$

Analizînd aceste rapoarte, rezultă că secţiunea de încastrare poate fi aleasă la un unghi $\beta = 60°$, unde rigiditatea creşte de peste patru ori faţă de cea de bază. De remarcat că rigiditatea nu creşte brusc ca la o secţiune de încastrare propriu-zisă, ci în mod continuu după o lege aproximativ parabolică. Rezultă că pentru zona cuprinsă între $\beta = 45°$ şi $\beta = 60°$ calculele vor trebui efectuate considerînd bara curbă cu secţiunea variabilă. Acest lucru este destul de complicat şi, în plus, nu îmbunătăţeşte precizia acestora în mod sesizabil. Din această cauză, în prezenta lucrare, pentru această zonă foarte mică, s-a lucrat cu valorile medii ponderate ale elementelor geometrice, exprimate funcţie de cele ale secţiunii constante ochiului ($r_{med} \approx 1,1\ r$; $A_{med} \approx 1,15\ A$ şi $I \approx 2\ I$). Fără a face erori mai mari de 2 %, ceea ce este întru totul admis practic, se poate calcula pentru toată bara cu valorile de bază ale elementelor geometrice r, A şi I.

Înlocuind în relaţiile (37) eforturile date prin expresiile lor (38), considerînd unghiul $\gamma = 150°$ ($\beta = 60°$) şi ţinînd seama că $G = E/2\ (1 + \mu)$, $\mu = 0,3$ şi $\varkappa = 1,2$ pentru secţiunea dreptunghiulară, se obţin următoarele relaţii pentru δ_{jh} şi Δ_{j0} :

$$\begin{aligned}
\delta_{11} &= \frac{1}{E} \cdot 5,24\,\frac{r}{I''}\,,\\
\delta_{22} &= \frac{1}{E}\left(5,43\,\frac{r^3}{I''} + 14,07\,\frac{r}{A}\right),\\
\delta_{33} &= \frac{1}{E}\left(3,05\,\frac{r^3}{I''} + 15,96\,\frac{r}{A}\right),\\
\delta_{12} &= \delta_{21} = \frac{1}{E}\left(4,24\,\frac{r^2}{I''} - \frac{1}{A}\right),\\
\Delta_{10} &= -\frac{F}{A}\left(a_{10}\cdot\frac{r^2}{I''} + b_{10}\cdot\frac{1}{A}\right),\\
\Delta_{20} &= -\frac{F}{E}\left(a_{20}\cdot\frac{r^3}{I''} + b_{20}\cdot\frac{r}{A}\right),\\
\Delta_{30} &= -\frac{F}{E}\left(a_{30}\cdot\frac{r^3}{I''} + b_{30}\cdot\frac{r}{A}\right).
\end{aligned} \tag{39}$$

Coeficienții a_{j0} și b_{j0} sînt funcție de unghiul ω și au următoarele expresii:

$$
\begin{aligned}
a_{10} &= 1{,}27 + 0{,}55 \cos\omega - 0{,}32\,\omega \cdot \sin\omega = b_{10},\\
a_{20} &= 1{,}27 + 0{,}91 \cos\omega - 0{,}2\,(\cos^3\omega + \omega \cdot \sin + 0{,}55 \sin\omega \cdot \sin 2\omega),\\
b_{20} &= 1{,}27 + 2{,}37 \cos\omega + 1{,}52\,(\cos^3\omega + \omega \cdot \sin\omega + 0{,}5 \sin\omega \cdot \sin 2\omega),\\
a_{30} &= 0{,}59 \sin\omega + 0{,}45\,\omega \cdot \cos\omega, \qquad (40)\\
b_{30} &= 1{,}49 \sin\omega + 1{,}85\,\omega \cdot \cos\omega.
\end{aligned}
$$

Dînd diverse valori unghiului ω (de exemplu între 0 și 30°) se pot calcula coeficienții a_{j0} și b_{j0}, iar în funcție de aceștia și de mărimea elementelor geometrice ale diverselor tipuri de lanțuri sau eclise se calculează ușor, cu ajutorul relațiilor (39), valorile coeficienților δ_{jh} și Δ_{j0}.

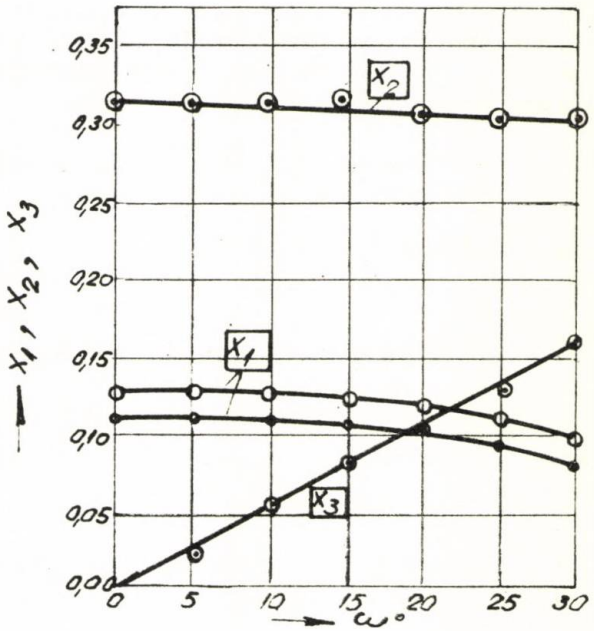


Fig. 12. — Variația rapoartelor x_1, x_2 și x_3 funcție de unghiul ω: *a* — pentru eclisele exterioare; *b* — pentru eclisele interioare.

Introducînd valorile coeficienților δ_{jh} și Δ_{j0} în sistemul de ecuații (36) se determină foarte ușor valorile necunoscutelor X_1, X_2 și X_3.

Calculînd rapoartele $x_1 = X_1/F \cdot r$; $x_2 = X_2/F$ și $x_3 = X_3/F$, pentru toate dimensiunile de lanț tip A și la ambele eclise, se constată că acestea nu depind practic de dimensiunea lanțului și nici de felul eclisei (numai x_1 este foarte puțin diferit la eclisele exterioare față de cele interioare).

Variația rapoartelor x_1, x_2 și x_3, în funcție de valoarea unghiului ω, este dată în figura 12. Această diagramă este deosebit de importantă din punct de vedere practic, deoarece ea permite calcularea necunoscutelor X_j pentru orișice dimensiune de lanț tip A, putînd fi folosită atît pentru calcule

de proiectare, cît și de verificare. Folosind relațiile stabilite mai sus, procedînd în același mod, se pot construi astfel de diagrame pentru toate tipurile de lanțuri întîlnite în industrie.

Cunoscînd valorile eforturilor X_1, X_2 și X_3 se poate stabili ușor mărimea eforturilor totale dintr-o secțiune oarecare a ochiului eclisei cu relațiile următoare:

$$\begin{aligned} M(\theta) &= M_0(\theta) + X_1 \cdot m_1(\theta) + X_2 \cdot m_2(\theta) + X_3 \cdot m_3(\theta), \\ N(\theta) &= N_0(\theta) + X_1 \cdot n_1(\theta) + X_2 \cdot n_2(\theta) + X_3 \cdot n_3(\theta), \\ T(\theta) &= T_0(\theta) + X_1 \cdot t_1(\theta) + X_2 \cdot t_2(\theta) + X_3 \cdot t_3(\theta). \end{aligned} \tag{41}$$

Dacă în relațiile (41) se introduc valorile eforturilor m_j, n_j și t_j, respectiv M_0, N_0 și T_0 date de relațiile (38), se obțin expresiile (42), care dau variația eforturilor totale funcție de unghiul θ (în diverse secțiuni) și pentru diferite înclinări ale forței F față de axa eclisei (diferite unghiuri ω). În relațiile (42) eforturile X_1, X_2 și X_3 nu depind de unghiul θ, dar variază cu ω, lucru de care trebuie ținut seama la calcularea eforturilor totale;

— în domeniul $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} + \omega$, respectiv $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} - \omega$

sau $0 \geqslant \theta \geqslant -\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)$:

$$\begin{aligned} M &= \frac{F \cdot r}{\pi} [\theta \cdot \sin(\theta \mp \omega) \pm \sin\theta \cdot \sin\omega)] - X_1 - X_2 \cdot r(1 - \cos\theta) F \mp X_3 \cdot r \sin\theta, \\ N &= \frac{F}{\pi} [\theta \cdot \sin(\theta \mp \omega) \pm \sin\theta \cdot \sin\omega] + X_2 \cdot \cos\theta \mp X_3 \cdot \sin\theta, \\ T &= \frac{F}{\pi} [\theta \cdot \cos(\theta \mp \omega) \pm \sin\theta \cdot \cos\omega] - X_2 \cdot \sin\theta \mp X_3 \cdot \cos\theta; \end{aligned} \tag{42'}$$

— în domeniul $\frac{\pi}{2} + \omega \leqslant \theta \leqslant \gamma$, respectiv $\frac{\pi}{2} - \omega \leqslant \theta \leqslant \gamma$ sau

$$-\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \geqslant \theta \geqslant -\gamma.$$

$$\begin{aligned} M = \frac{F \cdot r}{\pi} &\left[\left(\frac{\pi}{2} \pm \omega \pm \frac{1}{2} \sin 2\omega\right) \cdot \sin(\theta \mp \omega) - \cos^2\omega \cdot \cos(\theta \mp \omega)\right] - \\ &- X_1 - X_2 \cdot r(1 - \cos\theta) \mp X_3 \cdot r \cdot \sin\theta, \end{aligned} \tag{42''}$$

$$N = \frac{F}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2} \pm \omega \pm \frac{1}{2}\sin 2\omega\right)\cdot\sin(\theta \mp \omega) - \cos^2\omega\cdot\cos(\theta \mp \omega)\right] +$$

$$+ X_2\cdot\cos\theta \mp X_3\cdot\sin\theta,$$

$$T = \frac{F}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2} \pm \omega \pm \frac{1}{2}\sin 2\omega\right)\cdot\cos(\theta \mp \omega) + \cos^2\omega\cdot\sin(\theta \mp \omega)\right] -$$

$$- X_2\cdot\sin\theta \pm X_3\cdot\cos\theta.$$

În expresiile (42) primul semn este pentru $\theta > 0$, iar al doilea pentru $\theta < 0$.

Pentru a putea stabili diagramele de variații ale eforturilor pe tot conturul barei curbe (ochiul eclisei) se calculează unghiurile θ, pentru care aceste eforturi au valori maxime sau minime (din anularea derivatei de ordinul 1), respectiv au valori egale cu zero (se anulează expresia efortului).

Procedînd în acest mod se obțin următoarele valori ale unghiului θ, pentru care eforturile au valori caracteristice :

— *pentru momentul încovoietor* M :

Valori maxime : $\theta = \frac{\pi}{2} + \omega$ și $\theta = -\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)$,

Valori minime : $\theta = \omega$,

Valori nule : $\theta = \frac{\pi}{2} + \omega \pm 35^\circ$ și $\theta = -\left(\frac{\pi}{2} - \omega \pm 35^0\right)$;

— *pentru forța axială* N :

Valori maxime : $\theta = \frac{\pi}{2} + \omega$ și $\theta = -\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)$,

Valori minime : $\theta = \omega$,

Valori nule : — ;

— *pentru forța tăietoare* :

Valori maxime : $\theta = \frac{\pi}{4} + \omega$,

Valori minime : $\theta = -\left(\frac{\pi}{4} - \omega\right)$,

Valori nule : $\theta = \frac{\pi}{2} + \omega$; $\theta = \omega$ și $\theta = -\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)$.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA 1848

Dacă se calculează rapoartele $\mathcal{M} = M/F\cdot r$; $\mathcal{N} = N/D$ și $\mathcal{T} = T/F$ se constată că acestea practic nu depind de dimensiunea de lanț și nici de eclisă (cu excepția lui $\mathcal{M}$ care variază puțin la cele două eclise) pentru același tip de lanț.

Plecînd de la această observație se pot calcula valorile rapoartelor $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ și $\mathcal{T}$ pentru diverse valori ale unghiului ω. Deoarece aceste valori sînt foarte utile, atît pentru calculele de proiectare, cît și pentru cele de verificare, s-a considerat că este util ca ele să fie calculate și prezentate în lucrare (tabela 4). În figura 13 sînt reprezentate diagramele de variație a eforturilor din ochiul eclisei, respectiv a rapoartelor $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ și $\mathcal{T}$, pentru unghiul ω de 0°, 15° și 30°.

Tabela 4

Valorile raporturilor $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ și $\mathcal{T}$ în diverse secțiuni

θ°	Raportul	Euclis	ω°						
			0	5	10	15	20	25	30
$\gamma = 150$	$\mathcal{M}$	E	−0,184	−0,141	−0,099	−0,067	−0,008	−0,037	0,087
	$\mathcal{N}$	I	−0,180	−0,134	−0,095	−0,054	−0,070	−0,038	0,084
	$\mathcal{T}$	E și I	0,250	0,294	0,331	0,370	0,408	0,443	0,478
		E și I	−0,430	−0,405	−0,378	−0,342	−0,312	−0,260	−0,215
$\frac{\pi}{2} + \omega$	$\mathcal{M}$	E	0,064	0,065	0,069	0,644	0,083	0,103	0,126
	$\mathcal{N}$	I	0,074	0,075	0,077	0,080	0,086	0,104	0,127
	$\mathcal{T}$	E și I	0,500	0,500	0,500	0,500	0,505	0,510	0,520
		E și I	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\mathcal{M}$	E	0,064	0,062	0,060	0,053	0,049	0,045	0,043
	$\mathcal{N}$	I	0,074	0,071	0,068	0,061	0,055	0,049	0,045
	$\mathcal{T}$	E și I	0,500	0,497	0,491	0,481	0,469	0,458	0,438
		E și I	0	0,049	0,092	0,128	0,163	0,194	0,224
ω	$\mathcal{M}$	E	−0,127	−0,128	−0,130	−0,132	−0,133	−0,134	−0,137
	$\mathcal{N}$	I	−0,112	−0,113	−0,116	−0,118	−0,122	−0,126	−0,127
	$\mathcal{T}$	E și I	0,312	0,310	0,305	0,299	0,290	0,277	0,265
		E și I	0	0	0	0	0	0	0
0	$\mathcal{M}$	E	−0,127	−0,126	−0,125	−0,123	−0,117	−0,110	−0,107
	$\mathcal{N}$	I	−0,112	−0,111	−0,110	−0,108	−0,102	−0,094	−0,085
	$\mathcal{T}$	E și I	0,312	0,311	0,310	0,309	0,307	0,305	0,302
		E și I	0	−0,028	−0,056	−0,080	−0,109	−0,133	−0,155
$-\omega$	$\mathcal{M}$	E	−0,127	−0,123	−0,112	−0,091	−0,065	−0,032	0,001
	$\mathcal{N}$	I	−0,112	−0,108	−0,097	−0,076	−0,051	−0,018	−0,018
	$\mathcal{T}$	E și I	0,312	0,315	0,324	−0,342	0,360	0,382	0,404
		E și I	0	−0,055	−0,106	−0,153	−0,191	−0,218	−0,205
$-\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)$	$\mathcal{M}$	E	0,064	0,065	0,065	0,066	0,069	0,072	0,078
	$\mathcal{N}$	I	0,074	0,075	0,076	0,079	0,082	0,087	0,093
	$\mathcal{T}$	E și I	0,500	0,500	0,500	0,496	0,493	0,489	0,482
		E și I	0	0	0	0	0	0	0
$-\frac{\pi}{2}$	$\mathcal{M}$	E	0,064	0,061	0,058	0,054	0,050	0,045	0,042
	$\mathcal{N}$	I	0,074	0,072	0,070	0,066	0,062	0,058	0,055
	$\mathcal{T}$	E și I	0,500	0,496	0,493	0,484	0,473	0,459	0,443
		E și I	0	0,035	0,075	0,110	0,141	0,168	0,193
$-\gamma = -150$	$\mathcal{M}$	E	−0,184	−0,220	−0,254	−0,280	−0,308	−0,328	−0,340
	$\mathcal{N}$	I	−0,181	−0,210	−0,243	−0,275	−0,299	−0,318	−0,337
	$\mathcal{T}$	E și I	0,250	0,217	0,181	0,144	0,114	0,084	0,055
		E și I	0,430	0,448	0,465	0,475	0,478	0,480	0,482

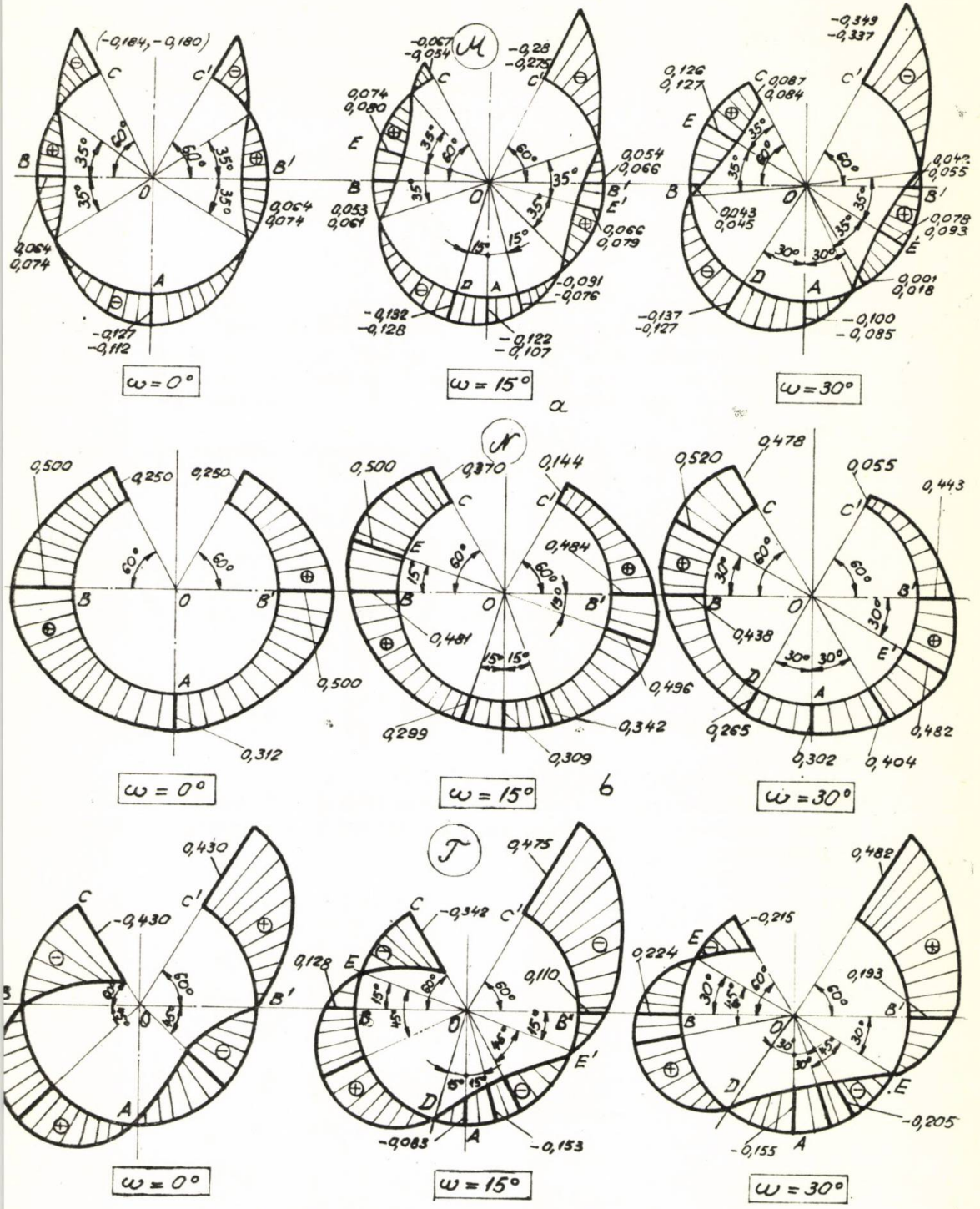


Fig. 13. — Diagramele de variație a eforturilor în ochiul eclisei.

3.2. CALCULUL EFORTURILOR UNITARE DIN OCHIUL ECLISEI PROVENITE DIN FORȚA EXTERIOARĂ F

Eforturile T, N și M produc în secțiunea barei curbe eforturi unitare de forfecare, întindere și, respectiv, încovoiere.

Efortul unitar de forfecare, τ, variază pe secțiune aproximativ după formula lui Juravski

$$\tau = \frac{T \cdot S}{b \cdot I}, \tag{43}$$

unde S reprezintă momentul static al porțiunii de secțiune considerată.

Acest efort, ca și la grinzile drepte, poate fi neglijat. În cazul eclisei valorile maxime pentru M și N se obțin în secțiunile E și E', unde $T = 0$, deci pentru acestea $\tau = 0$ și nu se face nici o eroare în calcul.

Efortul unitar de tracțiune, σ_t, considerat uniform distribuit pe secțiune (fig. 14), este dat de relația

$$\sigma_t = \frac{N}{A}. \tag{44}$$

Efortul unitar de încovoiere, σ_i, variază pe secțiune după o lege hiperbolică și anume:

$$\sigma_i = \frac{M}{A \cdot e} \cdot \frac{y}{R + y}; \quad \sigma_{i\cdot max} = \frac{M}{A \cdot e} \cdot \frac{h_1}{a}; \quad \sigma_{i\cdot min} = -\frac{M}{A \cdot e} \cdot \frac{h_2}{b}, \tag{45}$$

unde elementele au semnificația din figura 14.

Valoarea razei R, care definește axa neutră oz, la barele curbe la care raza r este mare, respectiv curbura $1/r$ este mică, se calculează cu formula următoare:

$$R = \frac{h}{\ln \alpha} \tag{46}$$

Valoarea eforturilor unitare totale, σ, va fi:

$$\sigma = \sigma_t + \sigma_i,$$

$$\sigma_{max} = \sigma t + \sigma_{imax} = \frac{N}{A} \cdot \frac{M}{A \cdot e} \cdot \frac{h_1}{a}, \tag{47}$$

$$\sigma_{min} = \sigma t + \sigma_{imin} = \frac{N}{A} - \frac{M}{A \cdot e} \cdot \frac{h_2}{b}.$$

Calculînd cu aceste expresii se obțin unele erori, deoarece formula de calcul a lui R și deci valoarea lui e, este valabilă pentru bare curbe cu raza mare, ceea ce nu este întru totul valabil pentru eclisele de lanț. Aceste erori se manifestă mai pronunțat pentru conturul exterior, fiind ceva mai mari decît cele determinate experimental [1], [20]. Deoarece

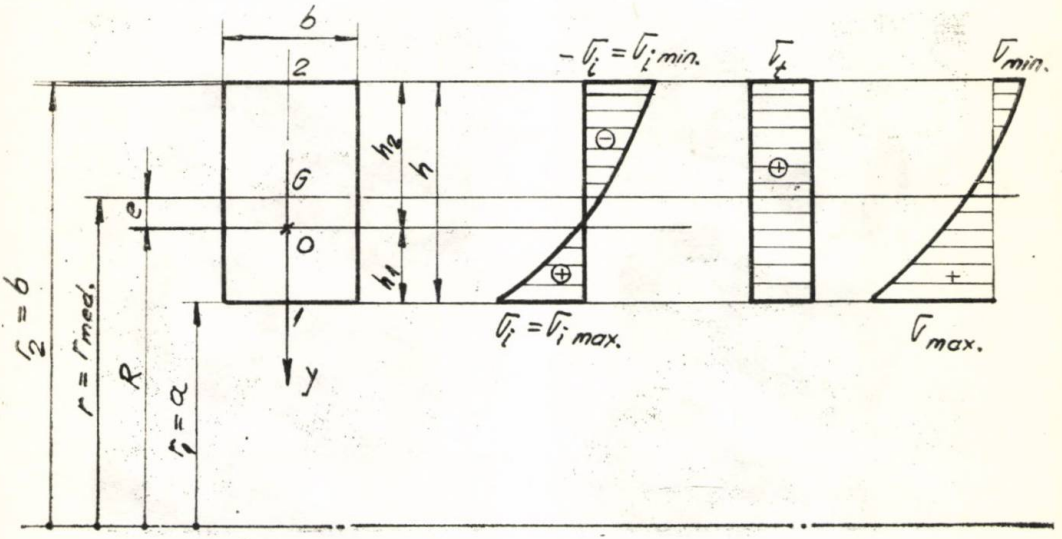


Fig. 14. — Variația eforturilor unitare pe secțiunea transversală a ochiului eclisei.

punctele de pe conturul exterior nu sînt cele mai solicitate, ținînd seama și de eforturile unitare date de strîngere, aceste erori nu prezintă decît o importanță calitativă.

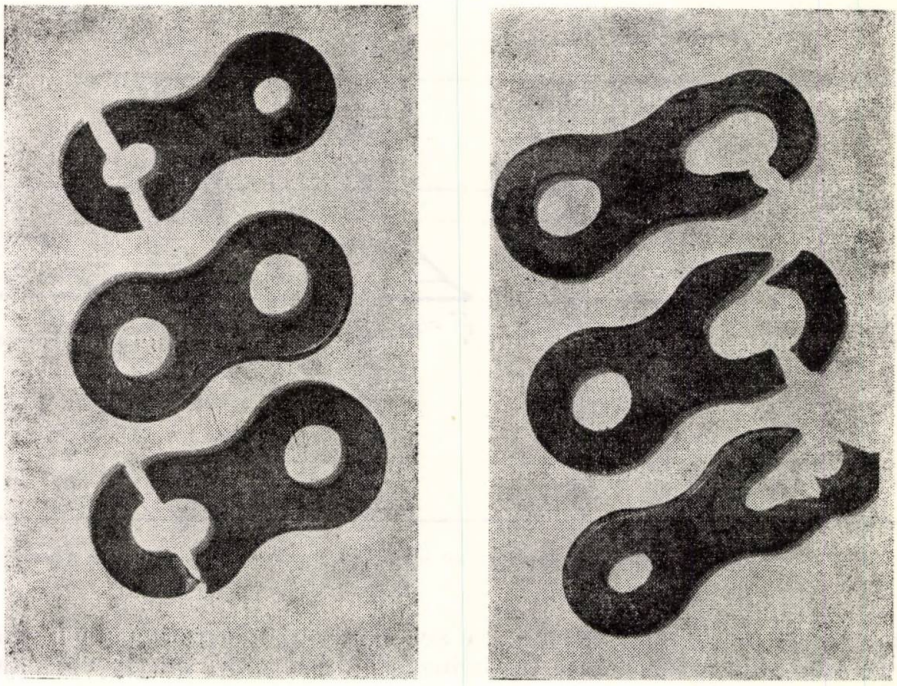
3.3. STABILIREA SECȚIUNII CELEI MAI SOLICITATE ȘI CALCULUL EFORTURILOR DIN ACEASTA

Analizînd valorile și semnele eforturilor pe conturul barei curbe, precum și al eforturilor unitare pe secțiunea acesteia, rezultă că secțiunea cea mai solicitată este situată după direcția $B-B'$, respectiv $E-E'$ (fig. 11 și 13), unde M și N au valori maxime, iar punctul cel mai încărcat este la interiorul alezajului eclisei, $r = a$, deoarece aici eforturile unitare σ_t și σ_i au ambele valori pozitive.

În secțiunea cea mai solicitată $B-B'$ ($E-E'$) există numai eforturi unitare tangențiale (σ_θ), cele radiale (σ_r) fiind nule.

Faptul că secțiunea $B-B'$ ($E-E'$) este cea mai periculoasă, este confirmat și experimental, atît de ruperile produse la eclisele lanțurilor care au lucrat în diverse transmisii, cît și la eclisele supuse la încercări de oboseală la tracțiune sau la rupere prin tracțiune statică. În figura 15 *a* sînt prezentate cîteva eclise rupte prin încercări de oboseală la tracțiune cu $\omega = 0°$ (F în lungul axei eclisei), din care se vede că secțiunea de

rupere se găsește întotdeauna perpendicular pe direcția forței F. În figura 15 *b* sînt prezentate cîteva eclise rupte prin încercări de tracțiune, la care se constată că ruperea începe să se producă întotdeauna de la interior din secțiunea $B-B'$ $(E-E')$, după care se propagă pe o direcție înclinată, datorită deformațiilor mari care apar în acest caz.



a *b*

Fig. 15. — Secțiunea de rupere la eclisele lanțurilor : *a* — rupere la oboseală prin tracțiune ; *b* — rupere la tracțiune.

Eforturile M și N, pentru calculul eforturilor unitare din secțiunea $E-E'$, rezultă din relațiile (42) pentru $\theta = \frac{\pi}{2} + \omega$, respectiv $\theta = -\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)$;

$$M = \frac{F \cdot r}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} \pm \omega \pm \frac{1}{2}\sin 2\omega\right) - X_1 - X_2 \cdot r\,(1 \pm \sin\omega) \mp X_3 \cdot r \cdot \cos\omega,$$

$$N = \frac{F}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} \pm \omega \pm \frac{1}{2}\sin 2\omega\right) - X_2 \cdot \sin\omega \mp X_3 \cdot \cos\omega. \qquad (48)$$

Pentru $\omega = 0°$ rezultă

$$M = \frac{F \cdot r}{2} - X_1 - X_2 \cdot r = F \cdot r \left(\frac{1}{2} - x_1 - x_2 \right),$$

$$N = \frac{1}{2} \cdot F. \tag{49}$$

Valorile x_1, x_2 și x_3 se pot lua din diagrama prezentată în figura 12, iar valorile M și N se găsesc gata calculate în tabela 4, respectiv figura 13.

Ținînd seama de aceste rezultate se poate scrie:

$$M = C_M \cdot F \cdot r, \tag{50}$$

$$N = C_N \cdot F,$$

unde C_M și C_N sînt coeficienți adimensionali calculați în tabela 4 ($C_M = \mathcal{M}$ și $C_N = \mathcal{N}$).

Pentru $\omega = 0$ și $\theta = \frac{\pi}{2}$ rezultă:

$M = 0{,}064 . F . r$ pentru eclisele exterioare,

$M = 0{,}074 . F . r$ pentru eclisele interioare, (51)

$M = 0{,}5 . F.$

Folosind relațiile (48) — (51) sau valorile calculate în tabela 4, se pot stabili eforturile M și N în secțiunea cea mai solicitată și cu aceasta aplicînd relațiile (47) se calculează eforturile unitare la care este solicitată eclisa.

4. CALCULUL EFORTURILOR TOTALE MAXIME DIN ECLISE

4.1. PRINCIPIUL DE CALCUL

În ochiul eclisei se produc eforturile unitare σ'_θ și σ'_r datorită forței F (rel. 47) și eforturile unitare σ''_θ și σ''_r datorită presiunii de fretare creată de realizarea ajustajului cu strîngere (rel. 8 sau 29).

Aceste eforturi unitare au valori maxime și de același semn numai în secțiunea $E - E'$ ($B - B'$) și anume pe conturul interior (v. §. 2 și 3). Aplicînd principiul suprapunerii efectelor, în această secțiune pe conturul interior, $r = a$, rezultă eforturile unitare totale maxime ($\sigma_{\theta \cdot max}$ și $\sigma_{r \cdot max}$):

$$\sigma_{\theta max} = \sigma'_\theta + \sigma''_\theta = \frac{N}{A} + \frac{M}{A \cdot e} \cdot \frac{h_1}{a} + \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1} \cdot p + A_r \cdot \sigma_e,$$

$$\sigma_{rmax} = \sigma'_r + \sigma''_r = -p. \tag{52}$$

În relațiile (52) toate elementele au semnificația cunoscută. Coeficientul $A_r = 0$ pentru eclisele care nu au fost supuse unei deformări plastice prealabile și $A_r < 0$ pentru cazul cînd acestea au fost deformate plastic în prealabil (vezi fig. 9).

Cunoscîndu-se valorile totale maxime pentru σ_θ și σ_r în punctul de pe conturul interior, $r = a$, se stabilește efortul unitar echivalent aplicînd teoria a V-a de rezistență (rel. 17).

Cunoscînd valoarea presiunii de fretare $p = f(S)$, precum și ciclul de variație al forței F, respectiv relațiile de calcul pentru $F_{max} = F_{activ}$ și $F_{min} = F_{pasiv}$ [1], [2], [6] ș.a., se poate calcula $\sigma_{ech.max}$ și $\sigma_{ech.min}$ și efectua astfel calculul de durabilitate la oboseală după diverse ipoteze sau metode.

Valorile eforturilor unitare sînt influențate și de efectul de cadru al zalelor formate prin montajul eclisele cu bolțurile respectiv bucșele.

Efectul de cadru al zalelor asupra eforturilor unitare din eclise este studiat în [1] principalele concluzii rezultate fiind :

— zalele lanțului pot fi asimilate unor cadre static nedeterminate, deoarece legăturile prin ajustaje cu strîngere sînt suficient de rigide;

— efectul de cadru se manifestă prin schimbarea valorii eforturilor unitare, date de fretare și forța E, în plane paralele situate pe grosimea g a ecliselor, în special la cele exterioare : această influență depinde direct de mărimea forței F;

— deoarece forța este foarte mică la transmisiile cu lanțuri (din motive de rezistență la oboseală a ecliselor) efectul de cadru poate fi neglijat.

Relația lui σ_{ech} poate fi folosită și pentru verificarea ajustajelor cu strîngere ale zalelor de lanț, pentru diverse valori ale forței F, caz în care se numește *ecuația fretajului optim*. Reprezentarea grafică a ecuației fretajului optim dă o familie de curbe $\sigma = f(S,F)$, cu ajutorul cărora se poate stabili domeniul optim de folosire al unui lanț.

Pentru exemplu s-au stabilit aceste diagrame la eclisele exterioare și interioare ale lanțului 24A.

4.2. STABILIREA DIAGRAMELOR FRETAJULUI OPTIM PENTRU ECLISELE EXTERIOARE ALE LANȚULUI 24A

Înlocuind în ecuațiile (52) toate elementele geometrice pentru eclisele lanțului 24A, precum și încărcările M și N funcție de F rezultă :

$$\sigma_\theta = 2{,}32 \cdot F + 1{,}285 \cdot p + A_r \cdot \sigma_c,$$

$$[\text{kgf/cm}^2 \text{ sau daN/cm}^2], \tag{53}$$

$$\sigma_r = -p, \ [\text{kgf/cm}^2 \text{ sau daN/cm}^2].$$

Aplicînd relația (16) rezultă presiunea de fretare funcție de strîngere :

$$p = 89{,}5 \cdot S, \qquad [\text{kgf/cm}^2 \text{ sau daN/cm}^2], \tag{54}$$

unde S se introduce în μm.

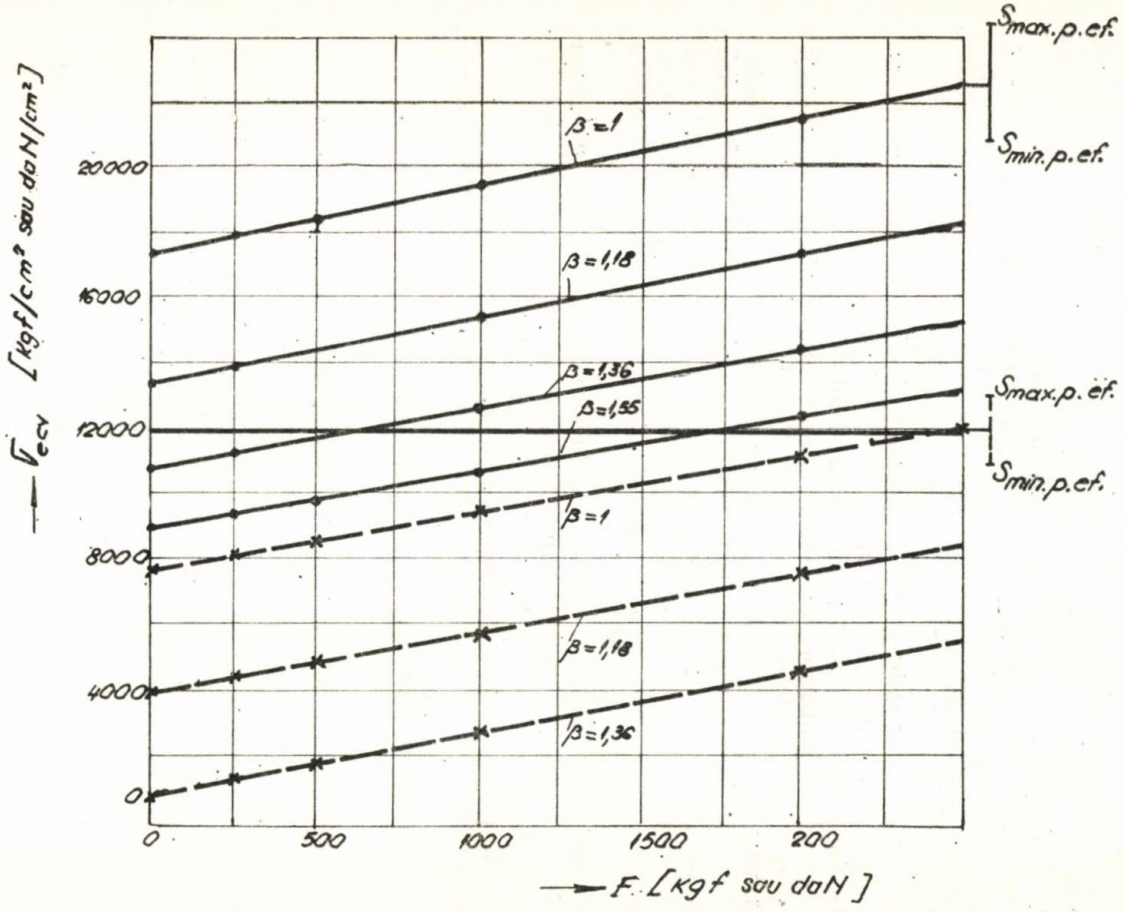


Fig. 16. — Diagrama de variație a efortului unitar echivalent la eclisa exterioară:

——— ajustaj folosit pînă acum;
– – – ajustaj propus de autor.

Înlocuind valorile (53) în relația lui σ_{ech} rezultă

$$\sigma_{ech} = \sqrt{5,4F^2+(8,27p+4,64\cdot A_r\cdot \sigma_c)F+3,94\cdot p^2+3,57p\cdot A_r\cdot \sigma_c+A_r^2\cdot \sigma_c^2}. \quad (55)$$

Înlocuind $\sigma_c = 120$ kgf/mm², calculînd p funcție de S (de exemplu pentru $S_{med\ ef}$) pentru diverse ajustaje și dînd lui A_r valori corespunzătoare la diverse grade de ecruisare β și $\lambda < 1$, rezultă σ_{ech} funcție numai de F, a cărui variație este prezentată în figura 16 pentru ajustajul folosit actualmente și cel propus de autor (vezi tab. 3).

Din figura 16, rezultă că ecuația $\sigma_{ech} = f(F)$ reprezintă o dreaptă, respectiv o familie de drepte paralele pentru diverse strîngeri sau grade de ecruisare prealabile.

Dacă se reprezintă și dreptele corespunzătoare valorilor $S_{max.p.ef}$, respectiv $S_{min.p.ef}$, acestea vor fi paralele și echidistante față de cele pentru $S_{med.ef}$, reprezentate în figura 16.

De asemenea, se constată că ajustajul folosit pînă acum în practică este total necorespunzător, deoarece σ_{ech} este mult mai mare decît limita de curgere a materialului, chiar pentru $F = 0$.

Ajustajul prescris în prezenta lucrare, este mult mai bun, deoarece el nu duce la eforturi unitare peste limita de curgere, nici pentru valori apreciabile ale forței active F. Ținînd seama că este necesar și un coeficient de siguranță și că solicitarea se produce la oboseală, acest ajustaj trebuie prescris eventual la o valoare și mai mică (făcînd verificarea rezistenței asamblării la $S_{min\ ef}$).

Supunînd alezajul eclisei unei prelucrări prealabile prin deformare plastică, se ridică substanțial capacitatea de încărcare a acesteia, prin reducerea efortului unitar echivalent inițial datorat strîngerii. Din figura 16 rezultă, evident, că ajustajul folosit pînă acum în practică rămîne necorespunzător chiar și pentru grade de deformare destul de mari, în schimb cel propus de autor pentru un grad de deformare mic ($\beta = 1,18$ sau $\delta = 1$ mm) își dublează capacitatea de rezistență.

4.3. STABILIREA DIAGRAMELOR FRETAJULUI OPTIM PENTRU ECLISELE INTERIOARE ALE LANȚULUI 24A

Făcînd calculul ca și în cazul ecliselor exterioare, se obține:

$$\sigma_\theta = 2,75\cdot F + 1,51\cdot p + A_r\cdot \sigma_c, \quad [\text{kgf/cm}^2 \text{ sau daN/cm}^2],$$

$$\sigma_r = -p, \quad [\text{kgf/cm}^2 \text{ sau daN/cm}^2], \quad (56)$$

$$p = 39\cdot S \quad [\text{kgf/cm}^2 \text{ sau daN/cm}^2], \quad (57)$$

$$\sigma_{ech} = \sqrt{7,55F^2+(11,05\cdot p+5,5\cdot A_r\cdot \sigma_c)\cdot F+4,78\cdot p^2+4p\cdot A_r\cdot \sigma_c+A_r^2\cdot \sigma_c^2}. \quad (58)$$

Procedînd în mod similar ca la eclisele exterioare, se obține variația efortului unitar echivalent funcție de $p(S)$ și F, în diverse ipoteze de prelucrare a alezajului eclisei (fig. 17).

Și aici rămîn valabile constatările și concluziile principale stabilite pentru eclisele exterioare, cu remarca că ajustajul prescris de uzină este ceva mai bun.

5. CONCLUZII FINALE

Prin studiul prezentat în această lucrare, considerăm că se aduce o contribuție apreciabilă, atît teoretică, cît și practică în domeniul stabilirii eforturilor din eclisele lanțurilor cu role și zale scurte.

Formulele stabilite au un caracter general fiind valabile pentru toate tipurile de lanțuri cu role și zale scurte atît simple cît și multiple.

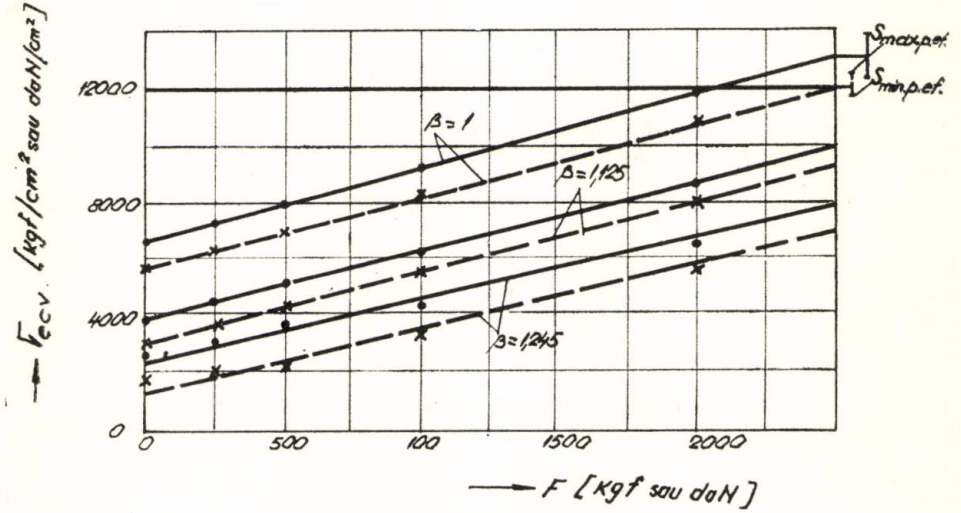


Fig. 17. — Diagrama de variație a efortului unitar echivalent la eclisa interioară :

——— ajustaj folosit pînă acum,
– – – ajustaj propus de autor.

Ele se pot folosi atît la proiectarea unor lanțuri noi, cît și la verificarea celor existente, aplicînd diverse metode de calcul la durabilitate și oboseală.

Formulele stabilite teoretic sînt aplicate numeric în lucrare, pentru studiul eforturilor din lanțurile cu role și zale scurte tip A(STAS 5174-67) care au o foarte mare răspîndire în producție. Aceste lanțuri se folosesc la transmisiile a numeroase mașini și utilaje ca : autovehicule, mașini și agregate de lucru rutiere, mașini agricole, mașini de ridicat și transportat, mașini unelte, instalații miniere ș.a., precum și la instalațiile pentru forajul sondelor de petrol și gaze, unde au o utilizare extrem de largă.

Valorile eforturilor din eclisele lanțurilor stabilite prin metoda propusă în lucrare au fost confirmate foarte bine prin încercări experimentale de fotoelasticitate pe modele de eclise [1] și [20], precum și prin tensometrie electrică [1] pe eclise și zale de lanț asamblate. Încercări-

le experimentale prin tensometrie pe zale, au confirmat că efectul de cadru al acestora, asupra eforturilor din eclise, este complet neglijabil pentru valorile normale ale forței F folosite în practică.

În același timp încercările experimentale au arătat că metodele folosite pînă acum pentru stabilirea eforturilor din eclisele lanțurilor, nu sînt corespunzătoare, ele dînd erori mari datorită ipotezelor simplificatoare admise reale.

În final, apreciem că prin prezentul studiu se aduce o contribuție originală la rezolvarea acestei probleme, care va permite îmbunătățirea calculului lanțurilor cu role și zale scurte.

Primită la redacție la 25 septembrie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. N. N. ANTONESCU, *Cercetări asupra construcției lanțurilor cu role și zale scurte folosite la transmisiile instalațiilor de foraj*, Teză de doctorat, Institutul de Petrol, Gaze și Geologie, București, 1970.
2. H. G. RACHNER, *Stahlgelenkketten und kettentriebe*, Spring Verlag, Berlin, Gottingen, Heidelberg, 1962.
3. N. V. VOROBIEV, *Țepentie peredaci*, Mașinostroenia, Moskva, 1968.
4. N. ZOLLNER, *Kettentriebe*, Karl Honzer Verlag, München, 1966.
5. I. I. IVAȘCOV, *Plastinciatie țepi*, Mașghiz, Moskva, 1960.
6. D. RAȘEEV, C. MANEA, M. FLORESCU, Buletinul I.P.G.G., vol. 15, București, 1968.
7. I. MINOIU, N. TATU, Petrol și Gaze, București, *3*, 197—208, (1969).
8. F., LEHER, *Spannungsverteilung in Kronstruktionselementen*, V.D.I. Verlag GMBH, Berlin, *7*, (1934).
9. N. N. ANTONESCU, D. RAȘEEV, Buletinul Institutului de Petrol Ploiești *1*, (1972).
10. I. LĂZĂRESCU și colab., *Toleranțe și măsurători tehnice*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1969.
11. G. BUZDUGAN, *Rezistența materialelor*, București, Editura didactică și pedagogică, 1964.
12. D. S. PONOMAREV și colab., *Calculul de rezistență în construcția de mașini* (vol. 1, 2 și 3), București, Edit. tehnică, 1960.
13. D. RAȘEEV, M. MARCU, N. N. ANTONESCU, I. TUDOR, Cercetări metalurgice, *9*, 507—525, (1967).
14. D. RAȘEEV, N. N. ANTONESCU, Cercetări metalurgice, nr. *2* București (1972).
15. GH. BUZDUGAN, *Calculul de rezistență la solicitări variabile*, București, Edit. tehnică, 1963.
16. ST. NĂDĂȘAN, ș.a., *Oboseala metalelor*, București, Edit. tehnică, 1962.
17. K. GHIRKMAN, *Flächentragwerke*, Ediția 6, Wien, Springer, Verlag, 1963.
18. S. TIMOȘENKO, *Théorie de l'élasticité*, Paris, Liege, Ch. Béranger, 1948.
19. P. MAZILU, *Statica construcțiilor*, vol. 2, București, Edit. tehnică, 1959.
20. N. N. ANTONESCU, TH. HUIDU, St. cerc. mec. apl., **30**, *3*, 627—643, București, Edit. Academiei, 1971.

SCHEMELE CINEMATICE ALE MECANISMULUI CU PATRU ELEMENTE

de A. RAICU

Institutul de construcții București

Numărul mecanismelor ce se pot forma cu patru rigide legate este foarte mare. Această afirmație este demonstrată cu prisosință în lucrare. Sinteza structurală efectuată se bazează pe o metodă numerică și literală, evitîndu-se astfel reprezentarea grafică. Mulțimea mecanismelor ce se pot forma cu patru rigide scoate în evidență largile posibilități de utilizare a acestor mecanisme în scopuri tehnologice din cele mai diverse.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Mecanismul cu patru elemente este unul din cele mai folosite mecanisme în construcția de mașini. Această stare de fapt se datorește formei sale simple și gamei foarte largi de posibilități de a realiza mișcări finale din cele mai diferite. Din aceste motive, mecanismul patrulater este considerat ca un mecanism de bază în construcția de mașini. Studiile și cercetările de natură structurală, cinematică și dinamică efectuate asupra mecanismului patrulater sînt foarte numeroase și foarte detaliate, astfel că în prezent, din punct de vedere al nevoilor practicii, se poate spune că problemele legate de analiza și sinteza mecanismului cu patru elemente sînt aproape elucidate.

Prezenta lucrare reprezintă o sinteză a lucrărilor autorului, elaborate pînă acum pe tema structurii mecanismelor în general și, în particular, pe tema structurii mecanismului cu patru elemente. Metoda generală de analiză și sinteză structurală a mecanismelor, bazată pe folosirea unor reprezentări prin simboluri numerice și literale a mecanismelor [1], este aplicată în cazul concret al mecanismului cu patru elemente [2]—[4]. Scopul elaborării acestei lucrări de sinteză, cel puțin în intenția autorului, constă în:

a) verificarea metodei generale pe un caz concret pentru care există suficient material documentar;

b) efectuarea unei comparații indirecte dintre metoda bazată pe folosirea simbolizării algebrice și alte metode cunoscute;

c) reliefarea unor aspecte structurale mai puțin cunoscute ale mecanismului cu patru elemente, și

d) evidențierea largilor posibilități de utilizare a acestor mecanisme în scopuri tehnologice din cele mai diverse.

2. VARIANTELE STRUCTURALE TIP *nc* (*n*-ELEMENTE, *c*-CUPLE)

Din titlul lucrării rezultă $n = 04$ elemente, iar $c \geqslant 04$ cuple cinematice, întrucît fiecare element trebuie să fie legat cu cel puțin alte două elemente. Dacă se admite ipoteza că fiecare element este legat cu toate celelalte, rezultă $c_{max} = n(n-1)/2 = 6$ cuple.

Prin urmare, variantele structurale tip *nc* ale mecanismului cu patru elemente sînt:

$$nc = 04.04\,;\quad nc = 04.05\,;\quad nc = 04.06.$$

3. LANȚURILE CINEMATICE DE BAZĂ [5]

Legarea celor n elemente prin c cuple cinematice ale fiecărei variante structurale tip *nc* se poate face în diverse moduri, fiecare mod de legare determinînd un lanț cinematic de bază. În cazul mecanismului cu patru elemente, lanțurile cinematice de bază sînt date în figura 1 pentru varianta tip $nc = 04.04$, în figura 2 pentru varianta tip $nc = 04.05$ și în figura 3 pentru varianta tip $nc = 04.06$.

Indicații asupra formei geometrice a rigidelor și a modului de legare a acestora se obțin prin rezolvarea sistemului:

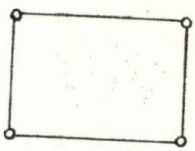


Fig. 1

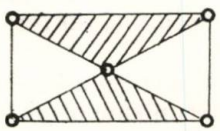


Fig. 2

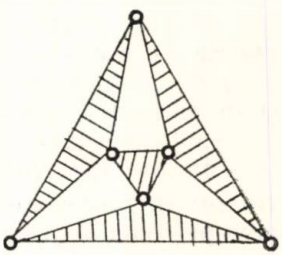


Fig. 3

$$\Sigma n_i = n \qquad (i \geqslant 2),$$

$$\Sigma i\ n_i = 2\ c,$$

$$\Sigma N_j = N = c - n + 1 \qquad (j \geqslant 3),$$

unde n_i reprezintă numărul elementelor cu i cuple, iar

N_j — numărul conturelor interioare cu j cuple.

Pentru cazul mecanismului cu patru rigide, un lanț cinematic de bază este monocontur (fig. 1), iar celelalte două sînt multiconture, generatoare de mecanisme cu lanț cinematic complex (fig. 2 și 3).

4. VARIANTELE DE BAZĂ

Cuplele mecanismelor pot fi de clase diferite, înțelegînd prin clasa unei cuple numărul mișcărilor simple interzise (gradul de constrîngere). Dacă se notează cu c_i numărul cuplelor din clasa i, atunci *simbolul numeric* al unei variante de bază este $nc_5c_4c_3c_2c_1$. Este evident că

$$c_5 + c_4 + c_3 + c_2 + c_1 = c.$$

Mulțimea soluțiilor în numere întregi ale acestei ecuații determină toate posibilitățile de a lega cele n elemente prin c cuple de clase diferite.

Variantele structurale de bază se obțin ușor cu ajutorul *tabelei cuplelor* [6]. Pentru cazul $c=04$ cuple, tabela cuplelor este dată prin tabela 1.

Tabela 1

Nr.	Nr. cuplelor din clasa i					Nr.	Nr. cuplelor din clasa i				
	c_5	c_4	c_3	c_2	c_1		c_5	c_4	c_3	c_2	c_1
1	4	0	0	0	0	36	0	4	0	0	0
2	3	1	0	0	0	37	0	3	1	0	0
3	3	0	1	0	0	38	0	3	0	1	0
4	3	0	0	1	0	39	0	3	0	0	1
5	3	0	0	0	1	40	0	2	2	0	0
6	2	2	0	0	0	41	0	2	1	1	0
7	2	1	1	0	0	42	0	2	1	0	1
8	2	1	0	1	0	43	0	2	0	2	0
9	2	1	0	0	1	44	0	2	0	1	1
10	2	0	2	0	0	45	0	2	0	0	2
11	2	0	1	1	0	46	0	1	3	0	0
12	2	0	1	0	1	47	0	1	2	1	0
13	2	0	0	2	0	48	0	1	2	0	1
14	2	0	0	1	1	49	0	1	1	2	0
15	2	0	0	0	2	50	0	1	1	1	1
16	1	3	0	0	0	51	0	1	1	0	2
17	1	2	1	0	0	52	0	1	0	3	0
18	1	2	0	1	0	53	0	1	0	2	1
19	1	2	0	0	1	54	0	1	0	1	2
20	1	1	2	0	0	55	0	1	0	0	3
21	1	1	1	1	0	56	0	0	4	0	0
22	1	1	1	0	1	57	0	0	3	1	0
23	1	1	0	2	0	58	0	0	3	0	1
24	1	1	0	1	1	59	0	0	2	2	0
25	1	1	0	0	2	60	0	0	2	1	1
26	1	0	3	0	0	61	0	0	2	0	2
27	1	0	2	1	0	62	0	0	1	3	0
28	1	0	2	0	1	63	0	0	1	2	1
29	1	0	1	2	0	64	0	0	1	1	2
30	1	0	1	1	1	65	0	0	1	0	3
31	1	0	1	0	2	66	0	0	0	4	0
32	1	0	0	3	0	67	0	0	0	3	1
33	1	0	0	2	1	68	0	0	0	2	2
34	1	0	0	1	2	69	0	0	0	1	3
35	1	0	0	0	3	70	0	0	0	0	4

Fiecare rînd al acestei tabele defineşte o variantă de bază dedusă din varianta structurală tip $nc = 04.04$ pentru lanţul cinematic de bază corespunzător. Astfel, simbolul numeric 421001, dat de rîndul 9, reprezintă mulţimea mecanismelor în structura cărora intră $n = 4$ elemente, $c_5 = 2$ cuple cinematice de clasa V, $c_4 = 1$ cuple de clasa IV, $c_3 = 0$ cuple de clasa III, $c_2 = 0$ cuple de clasa II şi $c_1 = 1$ cuple de clasa I.

Tabele similare se întocmesc şi pentru $c = 05$ şi $c = 06$.

Numărul variantelor de bază, pentru cazul $c = 04$, este $v = 70$. Acest număr, însă, poate fi cunoscut şi fără a întocmi tabela cuplelor, cu ajutorul următoarei relaţii generale [1]:

$$v_i = C^{5-i}_{c+(5-i)},$$

unde i reprezintă clasa cea mai mică a cuplelor ce intră în structura mecanismului.

Pentru cazul $c = 05$ cuple şi $i = 1$ se obţine

$$v_1 = C^4_9 = 126 \text{ variante de bază,}$$

iar pentru cazul $c = 06$ cuple şi $i = 1$ rezultă

$$v_1 = C^4_{10} = 210 \text{ variante de bază.}$$

5. VARIANTELE CONCRETE

Distribuţia cuplelor de diferite clase, în lanţul cinematic, poate fi oricare. Varianta de bază precizează numai numărul cuplelor din fiecare clasă, fără să precizeze şi dispunerea lor relativă. Dacă se precizează şi distribuţia cuplelor în lanţul cinematic se obţin *variantele concrete* care pot fi reprezentate printr-un *simbol literal* dat de succesiunea literelor ce definesc clasa fiecărei cuple. În acest scop se convine să se noteze cu C — cupla de clasa V, cu P — cupla de clasa IV, cu T — cupla de clasa III, cu D — cupla de clasa II şi cu U — cupla de clasa I. Cu această convenţie, simbolul literal al variantei concrete din care face parte mecanismul din figura 4 este $CPPC$.

Pentru o variantă de bază dată, cu lanţ cinematic simplu, variantele concrete se obţin prin permutări. De exemplu, din varianta de bază 422000 fac parte următoarele variante concrete: $CCPP$; $CPCP$; $PCCP$; $CPPC$. Citirea simbolurilor se poate face de la stînga la dreapta sau de la dreapta la stînga, adică

$$CPCP = PCPC.$$

Lanţurile cinematice complexe se obţin prin legarea în serie, în paralel sau mixt a unor lanţuri simple. În simbolizarea acestora se va folosi simbolul s pentru legătura în serie şi simbolul p pentru legătura în paralel. Legătura mixtă se va reda prin paranteze, iar cuplele comune lanţurilor legate se vor sublinia, după caz cu una, două etc. linii. Asemenea situaţii se întîlnesc la mecanismul cu patru elemente la variantele tip $nc = 04.05$ şi tip $nc = 04.06$. Astfel, mecanismul cu roţi de fricţiune din figura 5 face parte din varianta structurală tip $nc = 04.05$, cu lanţul cinematic de bază dat în figura 2, varianta de bază 432000 şi varianta concretă $CPCsCPC$.

De remarcat este și faptul că varianta concretă precizează și elementul de bază, prin prima și ultima literă din simbolul literal. Descompunerea în lanțuri simple și deci stabilirea naturii legăturilor (serie sau paralel) depinde de elementul fix al mecanismului. Astfel, din lanțul

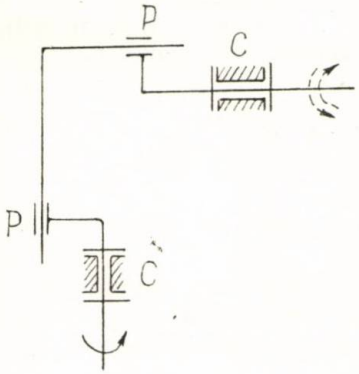


Fig. 4

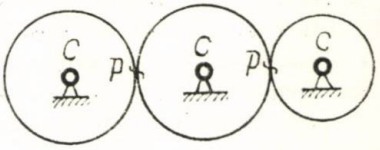


Fig. 5

cinematic de bază al variantei tip $nc = 04.05$ se pot obține două variante după cum baza este un element binar (fig. 6) sau ternar (fig. 7). Alte posibilități nu mai există, lucru ce se poate observa ușor pe baza simetriei figurilor geometrice. În primul caz (fig. 6), lanțul complex se poate descompune în două lanțuri simple legate în paralel, din care unul triunghiular (I) iar celălalt, patrulater (II). În al doilea caz (fig. 7), lanțul complex se poate descompune în două lanțuri simple legate în serie, ambele triunghiulare (I și II).

Din lanțul cinematic al variantei tip $nc = 04.06$ se obține o singură variantă, întrucît toate elementele sînt ternare, iar figura admite centru de simetrie (fig. 8). Lanțul complex se poate descompune în două lanțuri

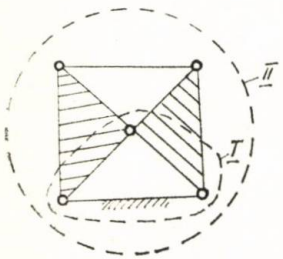


Fig. 6

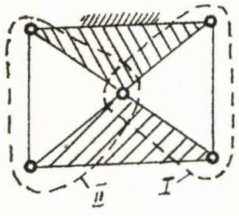


Fig. 7

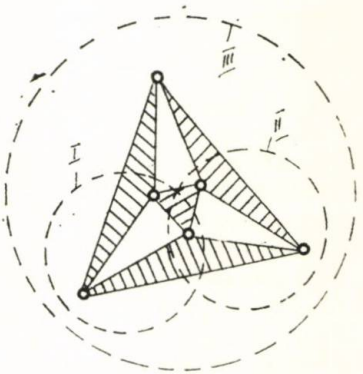


Fig. 8

triunghiulare simple (I și II) legate în serie și al căror lanț complex este legat în paralel cu un lanț triunghiular simplu (III), adică

$$(\mathrm{I}\ s\ \mathrm{II})\ p\ \mathrm{III}.$$

6. GRADUL DE MOBILITATE

În studiul mecanismelor interesează numai variantele cu gradul de mobilitate $M = 1$ deoarece acționarea se face de obicei cu un singur motor. Depistarea acestor variante se face odată cu stabilirea variantelor de bază dacă lanțul cinematic de bază este monocontur. Gradul de mobilitate se calculează pentru fiecare variantă, cu relația cunoscută [7]:

$$M = (6 - f)(n - 1) - \sum_{i=f+1}^{5} (i - f)\, c_i,$$

unde f reprezintă familia mecanismului, dată de numărul mișcărilor simple interzise tuturor elementelor.

La mecanismele cu lanț complex, mobilitatea depinde de mobilitatea lanțurilor simple legate. Astfel, la mecanismele cu patru elemente formate prin legarea în serie (fig. 7), gradul de mobilitate se determină cu relația [8]

$$M = M_{\mathrm{I}} + M_{\mathrm{II}} - M_l \quad (M_{\mathrm{I}}, M_{\mathrm{II}}, M_l > 0),$$

unde M_l este gradul de mobilitate al mecanismului de legătură. Se observă ușor că pentru $M = 1$ se obțin multiple posibilități de a lega mecanisme simple trilatere pentru a obține mecanismul cu patru elemente și cinci cuple, ca exemplu $1 = M_{\mathrm{I}} + M_{\mathrm{II}} - M_l = 1 + 1 - 1 = 2 + 1 - 2 = 2 + 2 - 3 = \ldots\ldots$

La mecanismele cu patru elemente, formate din lanțuri simple legate în paralel (fig. 6), pentru ca mobilitatea să fie $M = 1$ trebuie ca gradele de mobilitate ale lanțurilor simple legate să satisfacă una din relațiile: $M_{\mathrm{I}} + M_{\mathrm{II}} = 1 + 2$ sau $M_{\mathrm{I}} + M_{\mathrm{II}} = 2 + 1$.

La mecanismele cu patru elemente, formate din lanțuri simple legate mixt (fig. 8) se analizează mai întîi legătura în serie și apoi cea în paralel:

$$(M_{\mathrm{I}} + M_{\mathrm{II}} - M_l) + M_{\mathrm{III}} = 1 + 2; \quad (M_{\mathrm{I}} + M_{\mathrm{II}} - M_l) + M_{\mathrm{III}} = 2 + 1.$$

Operația de determinare a variantelor concrete cu gradul de mobilitate $M = 1$ nu este dificilă, dar datorită numărului relativ mare al acestor mecanisme devine laborioasă și necesită mult timp. Acest lucru impune realizarea unor programe și utilizarea calculatoarelor electronice și în probleme de structură a mecanismelor.

Exemple de variante concrete, cu gradul de mobilitate $M = 1$ și deduse din varianta tip $nc = 04.04$, sînt date în tabela 2. De asemenea, în tabela 3 sînt date exemple de variante concrete, cu gradul de mobilitate $M = 1$ și deduse din varianta tip $nc = 04.05$.

Numărul variantelor concrete ale mecanismului patrulater (tabela 2) este $v = 19$ variante [1], [9], iar numărul variantelor concrete din varianta tip $nc = 04.05$ (tabela 3) este $v = 635$ variante [3],[4]. Rezultă de aici marea diversitate a mecanismelor ce se pot forma cu patru rigide.

Tabela 2

Nr.	Varianta de bază	Familia	Variantele concrete
1	430010	0	*CCCD*; *CCDC*
2	421100	0	*CCPT*; *CCTP*; *CTCP* *CPCT*; *CPTC*; *PCCT*
3	413000	0	*CPPP*; *PCPP*
4	430100	I	*CCCT*; *CCTC*
5	422000	I	*CCPP*; *CPCP*; *PCCP*; *CPPC*
6	431000	II	*CCCP*; *CCPC*
7	440000	III	*CCCC*

Tabela 3

Nr.	Varianta de bază	Variantele concrete
1	450000	*CCCsCCC* (*f*4 + *f*1) *CCCpCCCC* (*f*4 + *f*4)
2	441000	*CCCsCCP* (*f*4 + *f*3); *CCCsCPC* (*f*4 + *f*3) *CCCpCCPC* (*f*4 + *f*3) *CCCpCCCC* (*f*3 + *f*4) *CPCpCCCP* (*f*3 + *f*3)
3	440100	*CCCsCCT* (*f*4 + *f*2); *CCCsCTC* (*f*4 + *f*2) *CCCpCCTC* (*f*4 + *f*2) *CTCpCCCC* (*f*2 + *f*4) *CCTpCCCT* (*f*2 + *f*2)
4	440010	*CCCsCCD* (*f*4 + *f*1); *CCCsCDC* (*f*4 + *f*1) *CCCpCCDC* (*f*4 + *f*1) *CDCpCCCC* (*f*1 + *f*4) *CCDpCCCD* (*f*1 + *f*1)
5	440001	*CCCsCCU* (*f*4 + *f*0); *CCCsCUC* (*f*4 + *f*0) *CCCpCCUC* (*f*4 + *f*0) *CUCpCCCC* (*f*0 + *f*4) *CCUpCCCU* (*f*0 + *f*0)
6	432000	*CCCsCPP* (*f*4 + *f*2) *PCCsCCP* (*f*3 + *f*3); *PCCsCPC* (*f*3 + *f*3) *CPCsCCP* (*f*3 + *f*3); *CPCsCPC* (*f*3 + *f*3) *CCPsPPC* (*f*3 + *f*3); *CCPsPCP* (*f*3 + *f*3) *CCCpCPPC* (*f*4 + *f*2) *CPCpCCPC* (*f*3 + *f*3)

7. VARIANTELE CONCRETE-CONSTRUCTIV

De la variantele concrete se trece la determinarea variantelor *concrete-constructiv*, adică la variantele în care se precizează și aspectul cuplelor. Simbolul literal al acestor variante este dat de cel al variantelor concrete, completat în mod corespunzător, astfel ca să apară și tipul cuplei. La simbolul adoptat pentru o cuplă de o anumită clasă se mai adaugă o literă mică care să precizeze tipul constructiv al cuplei respective (aspectul ei). De exemplu, cuplele de clasa V, adică acelea care

interzic cinci mişcări, deci permit numai una, se pot realiza constructiv sub trei forme:

— articulaţia plană cu simbolul *Ca*, permite numai mişcarea de rotaţie;

— cupla de translaţie cu simbolul *Cb*, permite numai mişcarea de translaţie, şi

— cupla helicoidală cu simbolul *Cc*, permite numai mişcarea de şurub.

Numărul total al aspectelor sub care se pot prezenta cuplele este $k = 73$ tipuri [1]. Această cifră este dedusă în baza a două ipoteze:

a) cupla cinematică este privită ca legătura mobilă între două elemente cinematice, realizată prin contact direct sau realizată indirect prin intermediul unui element ale cărui dimensiuni nu influenţează cinematica mecanismului, şi

b) mişcarea helicoidală se consideră tot mişcare simplă (mişcare independentă), alături de mişcarea de rotaţie şi de mişcarea de translaţie, cu condiţia ca o cuplă cinematică să realizeze cel mult două din cele trei mişcări simple admise.

Obţinerea variantelor concrete-constructiv este o operaţie simplă de substituire a fiecărei cuple definită de clasa ei, în varianta concretă, prin tipurile în care se poate realiza. Astfel, din varianta concretă *CCP*, variantele concrete-constructiv au forma

$$CaCaPa;\ CaCaPb;\ CaCaPc;\ldots,\ CaCbPa;\ CaCbPb;$$
$$\ldots\ldots;\ CcCcPa;\ CcCcPb;\ldots\ldots\ldots\ldots$$

În faza variantelor concrete-constructiv, proiectantul cunoaşte deci ordinea cuplelor şi tipul lor constructiv. Mai mult, după tipul cuplelor de legătură la bază, adică după prima şi ultima din simbol, sînt indicate şi mişcările elementului conducător şi final-condus. Acest lucru este util în alegerea acţionării şi în alegerea variantei la care elementul final trebuie să execute mişcarea cerută de procesul tehnologic.

În particular, mulţimea mecanismelor din familia III este cuprinsă în varianta concretă *CCCC* care conţine următoarele variante concrete-constructiv:

CaCaCaCa	*CaCaCbCc*	*CcCcCbCa*	*CaCcCbCc*
CaCaCaCb	*CaCaCcCb*	*CcCcCbCc*	*CaCcCcCa*
CaCaCaCc	*CaCaCcCa*	*CaCbCbCb*	*CaCcCcCb*
CbCbCbCa	*CaCaCcCc*	*CaCbCaCc*	*CbCaCaCb*
CbCbCbCb	*CbCbCaCb*	*CaCbCbCa*	*CbCaCaCc*
CbCbCbCc	*CbCbCaCc*	*CaCbCbCc*	*CbCaCbCc*
CcCcCcCa	*CbCbCcCa*	*CaCbCcCa*	*CbCcCaCb*
CcCcCcCb	*CbCbCcCb*	*CaCbCcCb*	*CbCcCaCc*
CcCcCcCc	*CbCbCcCc*	*CaCcCaCb*	*CbCcCbCc*
CaCaCbCb	*CcCcCaCb*	*CaCcCaCc*	*CbCcCcCb*
CaCaCbCa	*CcCcCaCc*	*CcCbCbCc*	*CcCaCaCc*
			CcCaCbCc

8. SCHEMELE CINEMATICE-TIP

Pe baza variantelor concrete-constructiv se determină schemele cinematice-tip, adică mulțimile de mecanisme între care deosebirea constă numai în dimensiunile elementelor.

Geometria lanțului cinematic are o importanță deosebită în analiza mobilității mecanismului. Geometria proprie a cuplelor și geometria lanțului cinematic determină mișcarea rigidelor, deci mobilitatea sistemului. Geometria lanțului cimematic este strîns legată cu familia mecanismului, adică cu numărul mișcărilor simple interzise tuturor elementelor. Dacă se precizează și mișcările se obțin aspecte în cadrul familiilor, adică subfamilii de mecanisme. De exemplu, în familia I, care impune o restricție asupra mișcărilor, există două subfamilii. După cum este interzisă o translație sau o rotație, aceste subfamilii, redate prin mișcările permise, sînt

subfamilia $3R + 2T$	subfamilia $2R + 3T$
$v_x\ v_y\ \omega_x\ \omega_y\ \omega_z$	$v_x\ v_y\ v_z\ \omega_y\ \omega_z$
$v_y\ v_z\ \omega_x\ \omega_y\ \omega_z$	$v_x\ v_y\ v_z\ \omega_y\ \omega_x$
$v_z\ v_x\ \omega_x\ \omega_y\ \omega_z$	$v_x\ v_y\ v_z\ \omega_z\ \omega_x$

Fiecare variantă concretă-constructiv se poate realiza cel puțin sub forma unei scheme cinematice-tip. Analiza aceasta se face considerînd fiecare subfamilie a familiei date. De exemplu, varianta concretă-constructiv *CaCaCaCa* se poate realiza sub forma mecanismului patrulater plan articulat (subfamilia $1R + 2T$) și sub forma mecanismului sferic (subfamilia $3R$). Un alt exemplu este dat în figura 9 și corespunde variantei concrete-constructiv *CcCaCbCb* realizată în subfamilia $1R + 2T$ cu mișcările permise $\omega_x\ v_x\ v_y$.

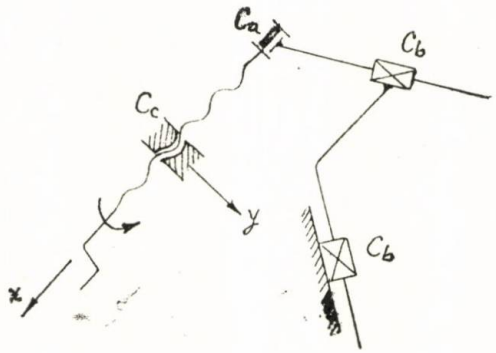
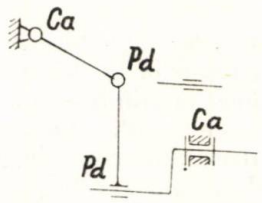
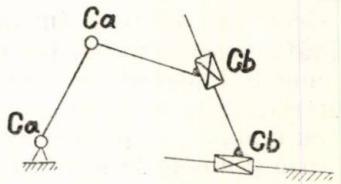
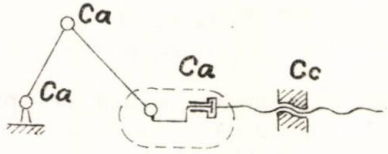
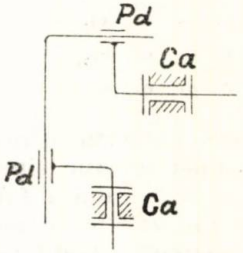
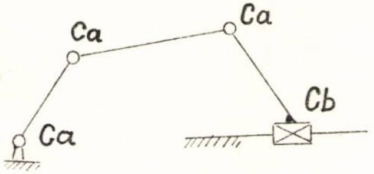
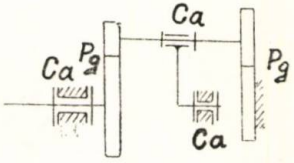
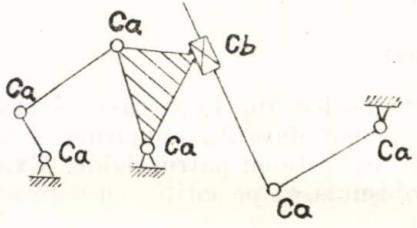
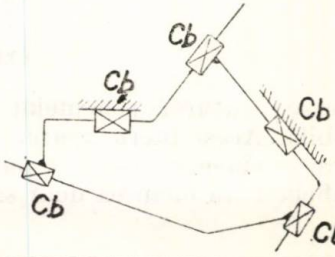


Fig. 9

9. EXEMPLE

Deducerea tuturor schemelor cinematice-tip, în această lucrare, este imposibilă. Acest lucru apare ca evident datorită numărului foarte mare de scheme cinematice-tip ce pot fi realizate cu patru rigide. Exemplele din tabela 4 au menirea doar să obișnuiască pe cititor cu corespon-

Tabelul 4

CaPdPdCa (f1)	**CaCaCbCb (f3)**
Subfamilia $3T+2R/\omega_x\omega_y\omega_z V_x V_y$	Subfamilia $2T+1R/V_x V_y \omega_z$
	
CaCaCaCc (f3)	**CaPdPdCa (f1)**
Subfamilia $2T+1R/V_x V_y \omega_z$	Subfamilia $3T+2R/V_x V_y V_z \omega_x \omega_y$
	
CaCaCaCb (f3)	**CaPg CaCa s CaCaPg (f3+f3)**
Subfamilia $2T+1R/V_x V_y \omega_z$	Subfamilia $2T+1R/V_x V_y \omega_z$
	
CaCaCaCa s CaCbCaCa (f3+f3)	**CbCbCb p CbCbCbCb (f4+f4)**
Subfamilia $2T+1R/V_x V_y \omega_z$	Subfamilia $2T+0R/V_x V_y$
	

dența dintre simbolul numeric al variantei concrete-constructiv și schemele cinematice-tip corespunzătoare.

Cunoașterea tuturor schemelor cinematice-tip ale mecanismelor ce pot fi formate cu patru elemente, impune elaborarea unei lucrări de mari proporții, cum este lucrarea [10].

10. MECANISME REDUCTIBILE LA MECANISMUL PATRULATER

Cunoașterea structurii sistemelor cu $n = 4$ rigide permite analiza și a altor sisteme cu $n > 4$ elemente, dar reductibile la sistemele cu patru elemente în sensul că lanțul cinematic complex poate fi descompus în lanțuri formate din patru elemente.

Ca exemplu pot fi date varianta tip $nc = 06.07$ cu două lanțuri patrulatere legate în serie (fig. 10), varianta tip $nc = 05.06$ (fig. 11) cu aplicație la mecanismele diferențiale în general [11] și în particular, la mecanismele diferențiale cu șurub etc.

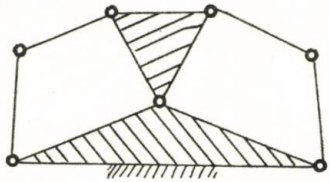


Fig. 10

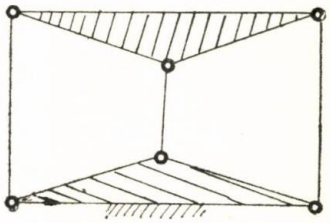


Fig. 11

11. CONCLUZII

Rezultatele expuse în această lucrare sînt consecința aplicării metodei de analiză și sinteză structurală, bazată pe folosirea simbolurilor numerice și literale în determinarea diferitelor structuri ale sistemelor. Avantajul acestei metodici constă în faptul că se evită în mare măsură reprezentarea grafică și se poate utiliza aparatul matematic în mai mare măsură în problemele de structură, rezolvate pînă acum grafic mai mult cu ajutorul intuiției și imaginației.

Sistematizarea mecanismelor în mulțimi cu o anumită caracteristică structurală, propusă în lucrare, rezolvă una din problemele cele mai importante ale structurii sistemelor de rigide legate și anume aceea de a determina toate tipurile structurale posibile. Parcurgînd această clasificare, de formă arborescentă, întocmai ca un arbore genealogic, se depistează toate structurile posibile de rigide legate, în afara cărora altele nu mai există. Din punct de vedere practic, acest lucru este deosebit de important întrucît oferă proiectanților absolut toate posibilitățile din care se alege structura cea mai convenabilă și astfel proiectarea rațională este asigurată încă din faza structurală.

Primită la redacție la 1 martie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. A. Raicu, *Utilizarea simbolurilor numerice şi literale în analiza şi sinteza structurală a mecanismelor*, Bul. st. Inst. construcţii, Bucureşti, 1971.
2. — *Analiza structurală a mecanismului patrulater*, Bul. IPGG, **16**, (1967).
3. — *Strukturelle Abarten der Mechanismen* Typ *nc* = 04.05 *mit einfachen in Parallelschaltung* (*Parallelverbindung*), Bul. st. Inst. construcţii Bucureşti, *3*, (1969).
4. — *Structurnie varianti mehanizmov tipa nc* = 04.05 *s prostîmi posledovatelnimi soedinenîmi ţepiami*, Bul. st. Inst. construcţii Bucureşti *1* (1970).
5. F. Freudenstein, *On a theory for the type synthesis of mechanisms*, Procc. of 11-th int. congress of app. mech, Münich, 1964 (Germany).
6. A. Raicu, *Contribuţii la sinteza structurală a mecanismelor spaţiale*, St. cerc. mec. apl., *3* (1968).
7. V. V. Dobrovolski, *Teoriia mehanizmov*, Moskva, 1953.
8. * * * *Structura şi cinematica mecanismelor*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1959.
9. L. Harrisberger, *A number sinthesis survey of three-dimensional mechanisms*, Trans. ASME, B *87* (1965).
10. I. I. Artobolevski, *Mehanizmi v sovremennoi tehnike*, Nauka, Moskva, 1970.
11. A. Raicu, *Analiza structurală a mecanismelor diferenţiale*, Bul. st. Inst. construcţii Bucureşti, 1971.

UNELE REZULTATE PRIVIND COMPORTAREA GRUPURILOR DE FORȚĂ DIESEL-HIDRAULICE ALE INSTALAȚIILOR DE FORAJ, LA MERSUL ÎN GOL ȘI ÎN SARCINĂ, PE BAZA CERCETĂRILOR EXPERIMENTALE

de I. VLAD, I. HIRSCH, I. PREDA, ȘT. PARTENIE și A. POPOVICI
I.P.G.G. BUCUREȘTI

În lucrare se abordează pentru prima oară studiul comportării grupurilor de acționare Diesel — hidraulice ale instalațiilor de foraj la mersul în gol, pe baza unor cercetări experimentale cuprinzătoare.
Rezultatele obținute, privind variația parametrilor cinematici, dinamici și funcționali și interdependența lor, au fost comparate cu cele din cadrul regimurilor de funcționare în sarcină, la acționarea sistemului de manevră și a celui de rotire ale instalațiilor de foraj.
Pe baza cercetării efectuate s-a ajuns la o serie de concluzii interesante, vizînd perfecționarea comportării dinamice a instalațiilor de foraj în diferite regimuri de lucru.

1. INTRODUCERE

Creșterea adîncimilor de foraj și a vitezelor de lucru a determinat o sporire considerabilă a încărcării dinamice a elementelor instalațiilor de foraj, astfel că în prezent proiectarea judicioasă și exploatarea rațională a instalațiilor trebuie să fie fundamentate, științific, pe baza cunoașterii comportării dinamice a acestora în condiții de exploatare.

Din principalele sisteme ale unei instalații de foraj, cel de acționare determină prin caracteristica sa, încărcările dinamice ale întregii instalații. Studiul comportării dinamice a instalațiilor de foraj trebuie început deci, în primul rînd, cu cercetarea comportării sistemului de acționare la mersul în gol al grupurilor de forță.

În plus, interesul pentru un astfel de studiu decurge și din faptul că în timpul săpării unei sonde, o bună perioadă de timp grupul de forță funcționează neîncărcat.

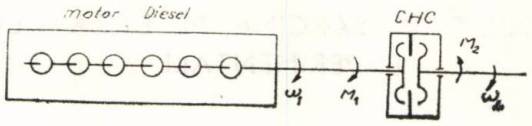
În scopul determinării influenței grupurilor de forță, ca sursă perturbatoare, asupra funcționării instalațiilor de foraj, în lucrare se dau unele

rezultate comparative atît la mersul în gol, cît şi la funcţionarea în sarcină (în cazul acţionării sistemului de manevră şi sistemului de rotire).

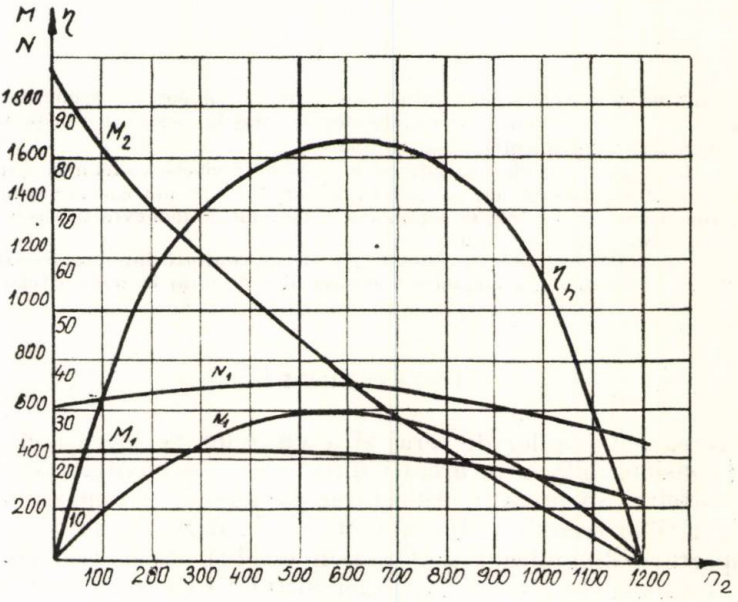
Prezenta lucrare are ca obiect de cercetare grupurile de forţă ale instalaţiei de foraj Diesel — hidraulice de mare capacitate 4 DH-315, însă multe din concluziile trase au caracter de generalitate pentru toate instalaţiile acţionate Diesel-hidraulic, indiferent de capacitate.

Acţionarea instalaţiei este centralizată, cu însumarea energiei motoarelor care lucrează în paralel în transmisia intermediară şi dirijarea ei la mecanismele principale de lucru.

Există posibilitatea separării motorului nr. 1 din transmisia intermediară, pentru acţionarea individuală a mesei rotative.



a



b

Fig.1.1. — Schema grupului de foraj Diesel-hidraulic :*a* — schema simplificată a grupului ; *b* — caracteristica grupului.

Sistemul de acţionare cuprinde patru grupuri de foraj tip GF-581S, compuse fiecare dintr-un motor Diesel cu supraalimentare M 581 S(700 CP la $\omega = 130$ rad/s) şi un convertizor hidraulic de cuplu tip CHC-750 legat prin arbore cardanic de arborele motorului, aşa cum rezultă din schema prezentată în figura 1.1.

Transmisia intermediară a instalaţiei cuprinde cei patru arbori principali în prelungirea grupurilor de forţă, transmisiile cu lanţuri multi-

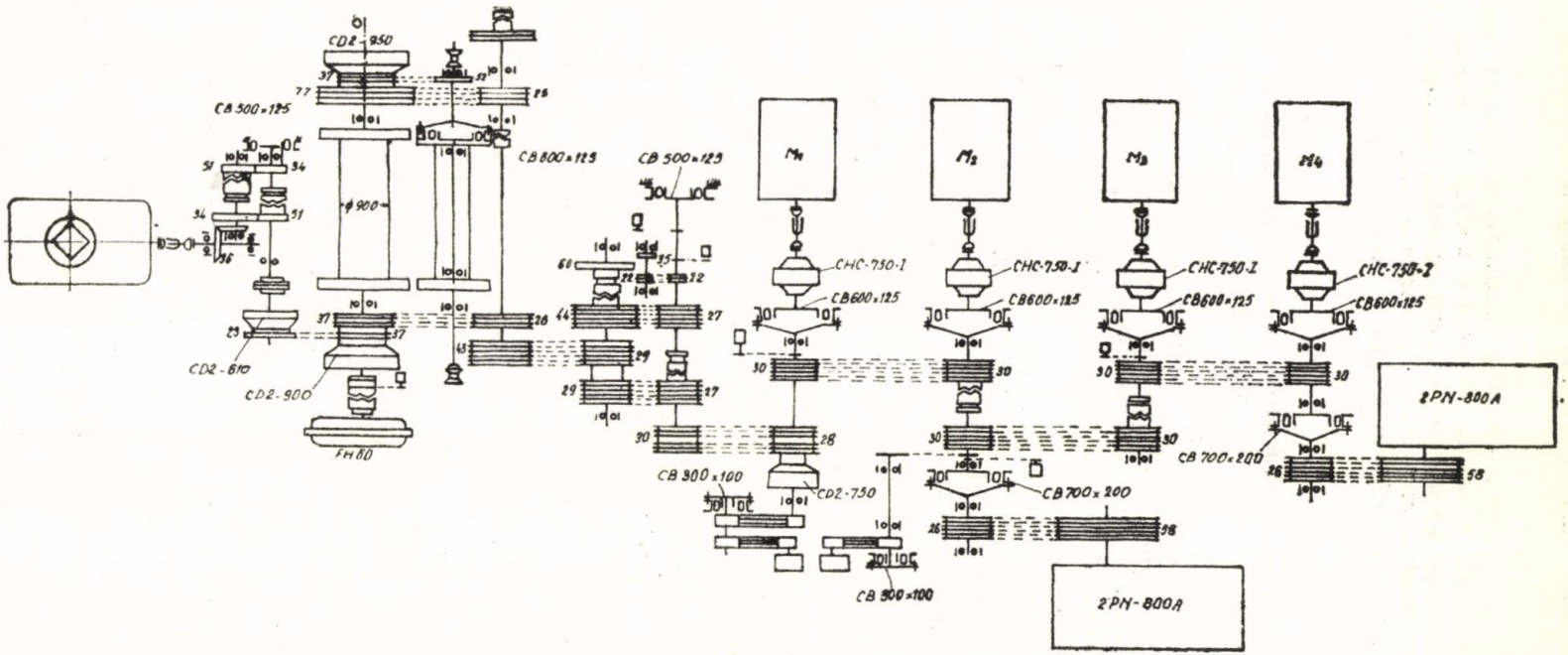


Fig. 1.2. — Schema cinematică a instalaţiei de foraj 4DH-315.

ple şi cuplajele cu burduf, realizînd transmiterea energiei spre troliul de foraj, masa rotativă, pompele de noroi şi agregatele auxiliare (compresoare de aer, pompe de ungere) conform schemei din figura 1.2.

Prin intermediul sistemului de comenzi pneumatice se realizează cuplarea în instalaţie a diferitelor grupuri de forţă precum şi decuplarea acestora.

2. STUDIUL DINAMICII GRUPURILOR DE FORAJ CONSIDERATE CA SISTEME ELASTICE

Prin studiul dinamicii se urmăreşte determinarea încărcării reale a elementelor grupurilor de foraj în regim tranzitoriu şi stabilizat (caz particular al regimului tranzitoriu corespunzător vitezelor medii constante), precum şi cunoaşterea legilor reale de mişcare a acestora în diferite faze de funcţionare.

Procesele tranzitorii au o pondere importantă în funcţionarea grupurilor de foraj, iar pentru acţionarea sistemului de manevră regimurile tranzitorii sînt determinante pentru proiectare şi exploatare.

Intensificarea proceselor de lucru, prezenţa unui număr mare de elemente elastice, precum şi a factorilor perturbatori proveniţi din sistemul de acţionare şi de la mecanismele de lucru ale instalaţiei, determină apariţia unor fenomene oscilatorii în întregul ansamblu al instalaţiei, chiar în regim „stabilizat". În mare măsură deteriorarea sau distrugerea unor elemente ale grupurilor de forţă sau ale mecanismelor de lucru trebuie pusă pe seama solicitărilor suplimentare datorate vibraţiilor.

Grupul de forţă este de o mare complexitate, avînd în realitate un număr infinit de grade de libertate dinamică. Pentru a putea aborda studiul dinamicii grupului de foraj GF-518 S, se înlocuieşte motorul Diesel M 581 S cu supraalimentare, cu 12 cilindri în V, printr-un *model - mecanic echivalent* constituit dintr-o succesiune de mase discrete reunite prin legături elastice, aşa cum este prezentat în schema din figura 2.1 *a* şi apoi cea simplificată din figura 2.1 *b*.

În scopul găsirii unei soluţii analitice uşor de utilizat în calcule şi cu un grad suficient de exactitate, grupul de foraj GF — 581 S se reduce la *schema echivalentă de calcul*, cuprinzînd două mase discrete reunite printr-o legătură neelastică (fig. 2.2).

Reducerea sistemului fizic la cel echivalent s-a făcut în lucrare pe baza echivalenţei resurselor energetice ale celor două sisteme.

Ipotezele simplificatoare acceptate au fost următoarele:

1. Masele concentrate sînt perfect rigide.

2. Legăturile elastice nu au masă.

3. Deformările diverselor elemente ascultă de legea lui Hooke şi nu influenţează asupra elasticităţii acestora prin contracţia secţiunii.

4. Nu se ia în considerare amortizarea oscilaţiilor dată de frecarea externă şi internă.

5. La reducerea maselor se consideră că nu există jocuri în circuitul cinematic şi deci masele sistemului echivalent se mişcă sincron.

6. În timpul funcționării convertizorului pentru $\dot{\theta}_1 > \omega_0^*$, între primarul și secundarul convertizorului se realizează o legătură neelastică λ în funcție de viteza unghiulară a motorului. Funcția $\lambda(\dot{\theta}_1)$ are expresie diferită în regim tranzitoriu și în regim stabilizat, însă pentru simplificarea rezolvării se pot înlocui ambele expresii cu o expresie unică astfel încît erorile să fie minime.

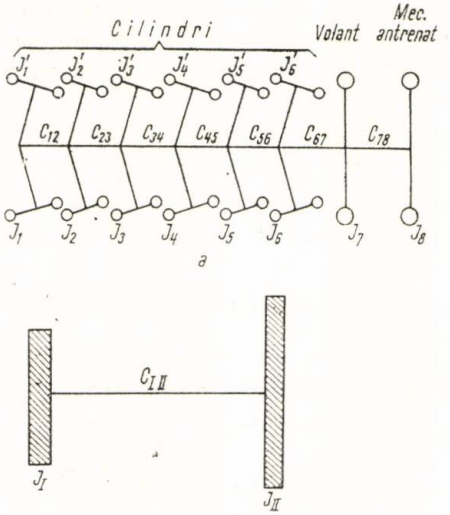


Fig. 2.1. — Schema modelului reprezentativ al motorului Diesel- M 581 S: *a* — schema cuprinzătoare; *b* — schema simplificată.

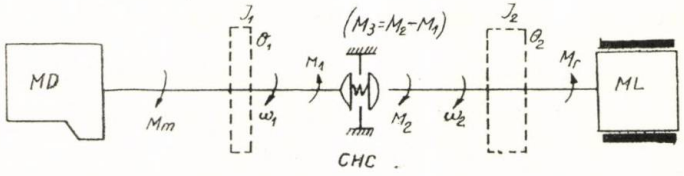


Fig. 2.2. — Schema echivalentă de calcul a grupului de foraj GF-581 S.

7. Masele în mișcare ale secundarului convertizorului sînt concentrate de asemenea într-o masă.

În figura 2.2 au fost acceptate *următoarele notații*:

J_1 — momentul de inerție al maselor în mișcare ale tronsonului conducător, reduse la primarul convertizorului hidraulic de cuplu,

J_2 — momentul de inerție al maselor tronsonului condus, de la secundarul convertizorului hidraulic de cuplu la mecanismul de lucru, redus la secundarul CHC,

* ω_0 este viteza unghiulară a motorului peste care începe și mișcarea secundarului CHC.

$\dot{\theta}_1 = \omega_1$ — viteza unghiulară a primarului,
$\dot{\theta}_2 = \omega_2$ — viteza unghiulară a secundarului,
M_m — momentul dezvoltat de motorul de antrenare,
M_r — momentul rezistent, determinat de mecanismul de lucru (care poate fi considerat nul la mersul în gol, respectiv cînd grupul de foraj este decuplat din instalaţie),
M_1 — momentul de torsiune aplicat la arborele primar al CHC,
M_2 — momentul de torsiune la arborele secundar al CHC.

Conform principiului lui d'Alembert, mişcarea celor două mase ale sistemului este definită de ecuaţiile :

$$M_m - M_1 = J_1\ddot{\theta}_1, \tag{2.1}$$

$$M_2 - M_r = J_2\ddot{\theta}_2, \tag{2.2}$$

în care $M_2 = KM_1$, K fiind coeficientul de transformare a cuplului în CHC.

Integrarea acestui sistem de ecuaţii nu face obiectul prezentei lucrări. Pentru rezolvarea sistemului este necesar să se cunoască expresiile funcţiilor $M_m(\dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1)$, $M_1\left(\dot{\theta}_1, \frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1}\right)$, $K = f\left(\frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1}\right)$, $M_r(\dot{\theta}_2)$.

În scopul determinării acestor funcţii pentru diferite regimuri de funcţionare, precum şi pentru precizarea unor ipoteze care trebuie admise la integrarea ecuaţiilor de mişcare, s-a impus efectuarea unor cercetări experimentale privind comportarea dinamică a grupurilor de forţă care echipează instalaţiile de foraj şi de intervenţie.

3. CERCETAREA EXPERIMENTALĂ A DINAMICII GRUPURILOR DE FORAJ

În cadrul acestei cercetări, măsurătorile privind variaţia parametrilor cinematici şi dinamici au fost efectuate la grupurile de forţă Diesel-hidraulice ale instalaţiei de foraj 4DH-315.

Pentru a se putea face o analiză comparativă a funcţionării grupurilor de forţă în diferite regimuri de lucru, cu reproducerea cît mai fidelă a condiţiilor reale de exploatare a grupurilor, măsurătorile au fost efectuate chiar la instalaţia de foraj amplasată la sondă, cu decuplarea din instalaţie a grupului de foraj nr. 1 la studiul mersului în gol.

Parametrii înregistraţi, care rezultă din schema de amplasare a traductoarelor (fig. 3.1), sînt următorii :

ω_1' — viteza unghiulară a arborelui motorului nr. 1,
ω_2' — „ „ „ secundarului nr. 1,
M_1' — cuplul măsurat la arborele motorului nr. 1.

Înregistrările s-au făcut pentru grupul de forţă nr. 1, decuplat din instalaţie, în condiţiile variaţiei în limite largi a gradului de alimentare a motorului.

Motorul nr. 1 a fost accelerat succesiv, în trepte, aproximativ cu $\Delta\omega = 10$ rad/s, de la viteza minimă de circa 60 rad/s pînă la viteza no-

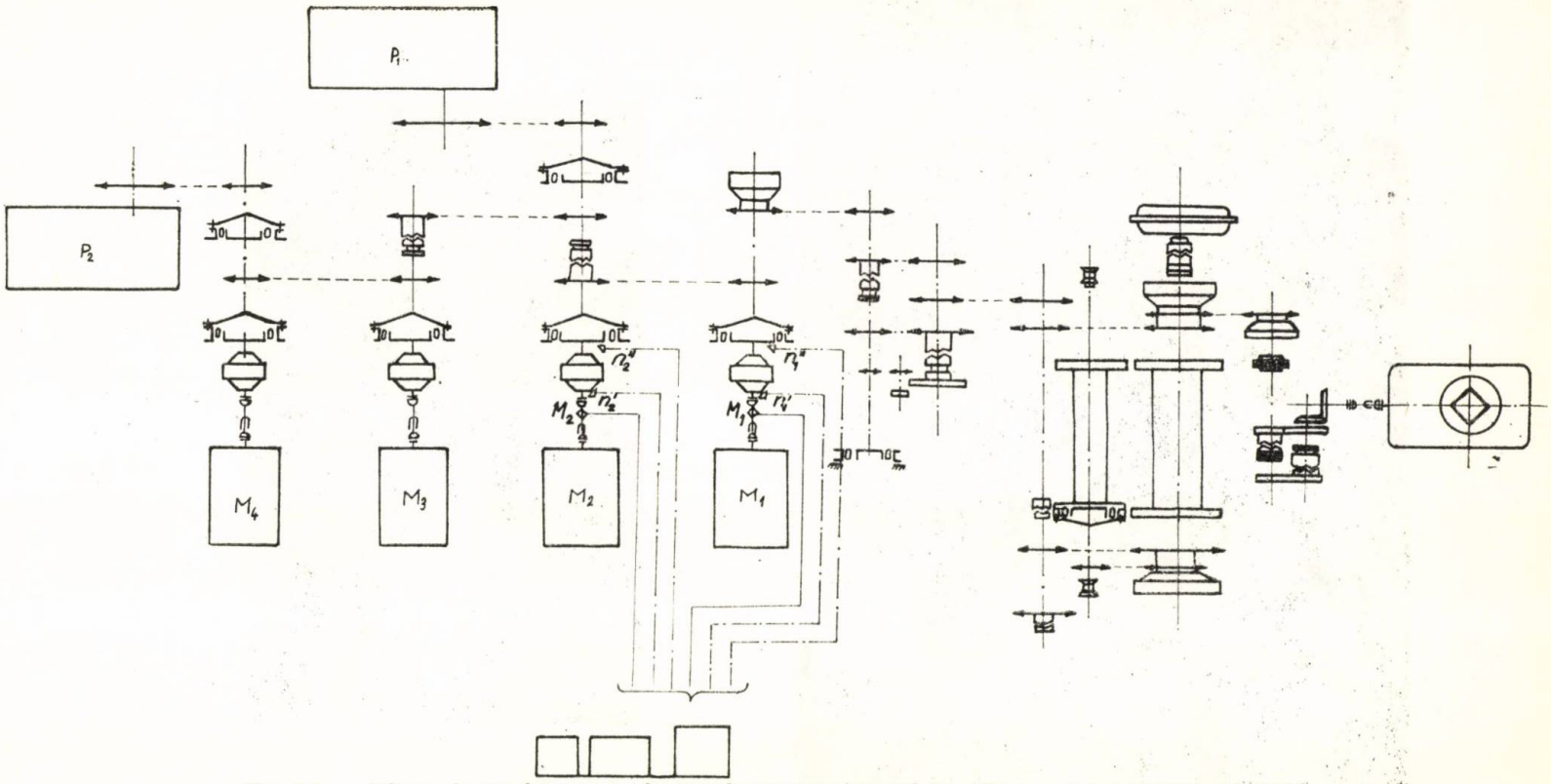
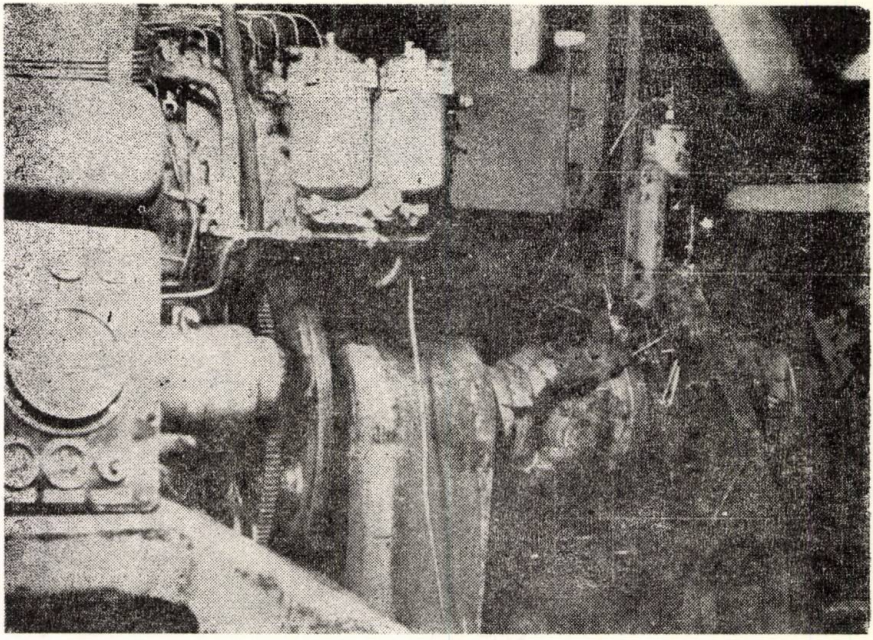
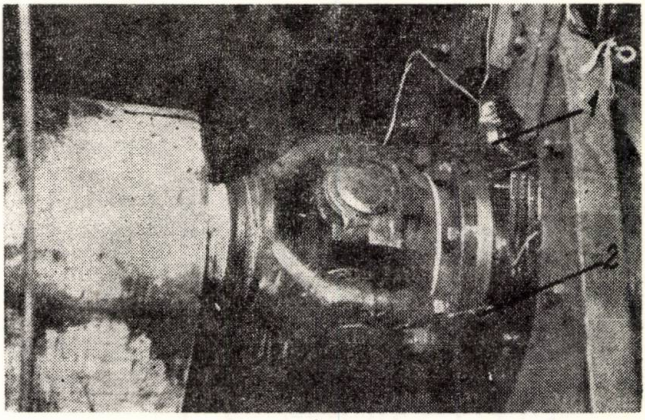


Fig. 3.1. — Schema de amplasare a traductoarelor pentru sistemul de acționare al instalațiilor de foraj.



a



b

Fig. 3.2. — Traductorul pentru măsurarea vitezei unghiulare a arborelui motorului nr. 1 (ω_1'): *1* — traductorul; *2* — șurub montat (proeminență).

minală maximă de 130 rad/s. S-a înregistrat, de asemenea, regimul tranzitoriu corespunzător majorării continue a gradului de alimentare cu parcurgerea întregii game de turații ale motorului de la 60 la 130 rad/s.

Traductoarele și aparatura de înregistrare. Pentru înregistrarea parametrilor cinematici și dinamici indicați mai sus a fost necesară utilizarea a două categorii de traductoare, după natura parametrului măsurat:

a) traductoare pentru măsurarea vitezelor unghiulare,

b) traductoare pentru măsurarea momentelor de torsiune.

În scopul alegerii raționale a aparaturii de măsură și înregistrare a parametrilor cinematici și dinamici ai instalației de foraj, s-a efectuat un studiu comparativ al diferitelor tipuri de traductoare și aparate sub raportul domeniului de aplicare, al avantajelor și dezavantajelor specifice, precum și al concordanței cu condițiile de lucru la sondă și cu metodica cercetării experimentale întreprinse.

Pe această bază s-a ajuns la adoptarea următoarelor traductoare, aparate de măsură și înregistrare:

a) *Traductoare pentru măsurarea vitezelor unghiulare*

Pentru măsurarea vitezelor la procese cu desfășurare rapidă, de tipul celor din cadrul grupurilor de foraj, s-a dovedit recomandabilă folosirea unor traductoare inductive cu impulsuri.

În scopul măsurării vitezelor unghiulare la grupurile de forță ale instalației de foraj s-au montat traductoare de turație la primarul și secundarul convertizoarelor hidraulice de cuplu.

În figura 3.2 este prezentată fotografia traductorului pentru măsurarea vitezei unghiulare a arborelui motorului nr. 1.

Pentru măsurarea vitezei unghiulare a arborelui secundarului CHC, traductorul a fost montat în apropierea flanșei conducătoare a cuplajului cu burduf CB 600×125, în fața celor opt șuruburi de prindere (proeminențe) așa cum se vede în figura 3.3.

Viteza unghiulară măsurată într-un punct i este în funcție de numărul proeminențelor ce trec prin fața bobinelor, determinîndu-se cu ajutorul relației

$$\omega_i = \frac{2\pi}{z} \cdot \frac{f}{m_i} = \frac{2\pi}{z} \cdot \frac{v}{\delta_i}, \tag{3.1}$$

în care

z reprezintă numărul de proeminențe (pentru primar $z_1' = 2$, iar pentru secundar $z_2' = 8$),

m_i — numărul de impulsuri ale bazei de timp între două impulsuri succesive ale înregistrării parametrului măsurat,

f — frecvența rețelei de alimentare (în cazul dat $f = 50$ Hz),

v — viteza medie de deplasare a filmului (benzii de înregistrare),

δ_i — distanța între două impulsuri succesive ale înregistrării.

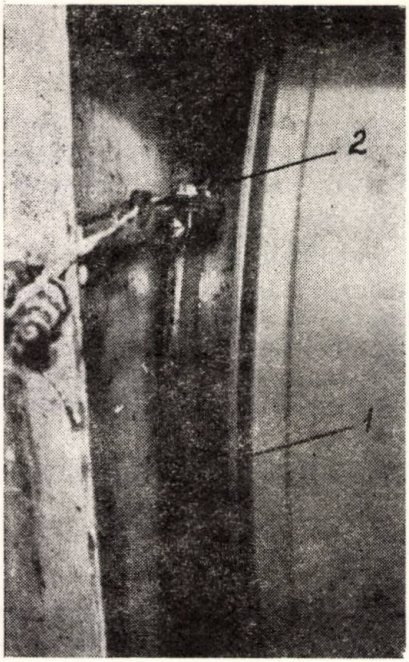


Fig. 3.3. — Traductorul pentru măsurarea vitezei unghiulare a arborelui secundarului CHC (ω_2'): *1* — cuplaj cu burduf; *2* — traductor.

b) *Traductoare pentru măsurarea cuplului*

Pentru măsurarea şi înregistrarea momentului de torsiune la arborele motorului s-a folosit metoda tensometrică (captori cu fir metalic rezistiv), deoarece mărcile tensometrice cu constantan au proprietăţi de transformare deosebit de bune. Panta caracteristicii este practic constantă chiar dincolo de domeniul deformaţiilor elastice, iar curba caracteristică nu are histerezis.

S-au folosit traductoare cu rezistenţă nominală de 120 ohmi cu baza de 10 mm şi 20 mm.

Pentru mărirea siguranţei contactului între peria colectoare şi inel pe fiecare canal au funcţionat simultan două perii scurt-circuitate.

În figura 3.4 este arătat locul de amplasare a mărcilor tensometrice şi inelul cu periile colectoare pentru înregistrarea cuplului la arborele motorului nr. 1.

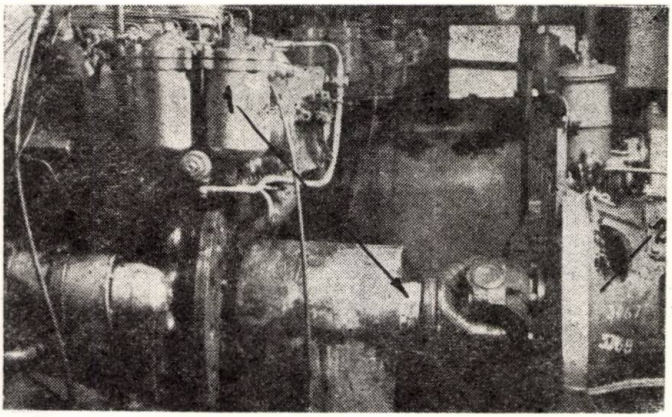
Existenţa transmisiei cardanice a impus folosirea unor fire supraflexibile de legătură între mărcile tensometrice şi inelele cu lamele, datorită numărului mare de inflexiuni ale acestor fire în timpul funcţionării.

Traductoarele rezistive au fost conectate la laturile unei punţi tensometrice. S-a folosit o punte tensometrică (amplificator de măsură), tip TDA-3 cu trei canale, destinată măsurării parametrilor măsuraţi rezistiv în regim dinamic.

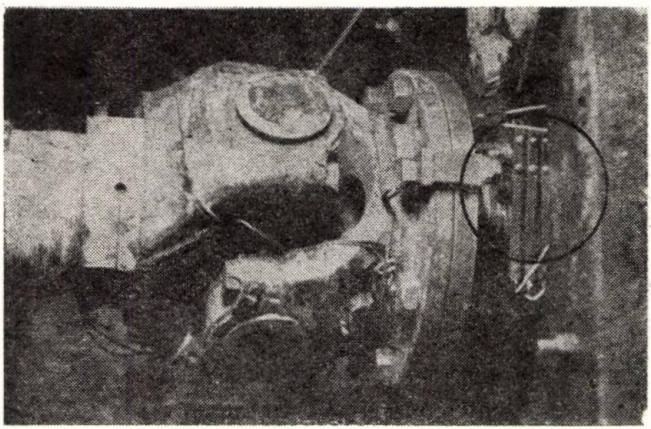
Pentru determinarea scărilor diagramelor de cuplu, a fost necesară folosirea unei metode indirecte, cu utilizarea diagramelor funcţionale

caracteristice ale grupului de foraj GF-581 S, cunoscîndu-se și linia de cuplu nul. Astfel s-a putut trasa dreapta ce reprezintă proporționalitatea directă între ordonata h de pe oscilogramă și mărimea cuplului M (ținînd seama de liniaritatea traductorului rezistiv).

$$M = k\,h. \tag{3.2}$$



a

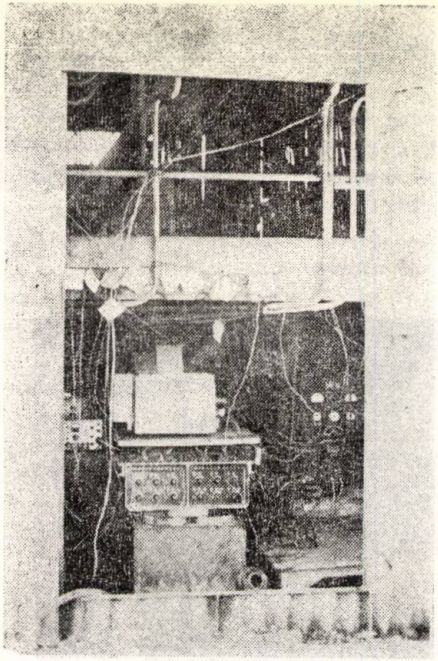


b

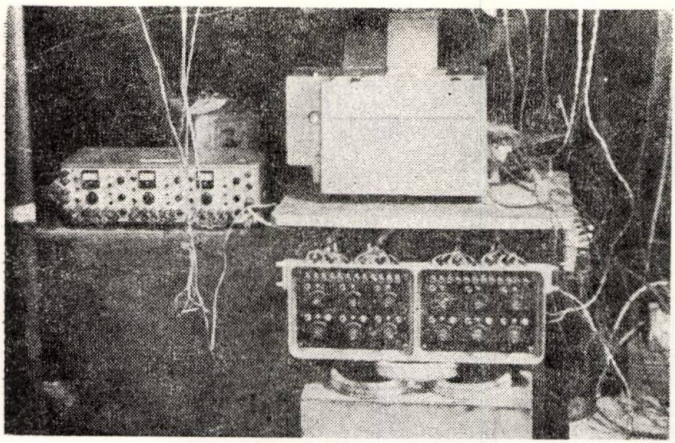
Fig. 3.4. — Traductorul pentru măsurarea cuplului la arborele motorului nr. 1 (M_1): *a* — mărcile tensometrice; *b* — inelul colector.

c) *Aparatura de înregistrare*

Toate semnalele purtătoare de informații asupra variației parametrilor măsurați au fost racordate la un oscilograf electromagnetic. Înregistrarea variației parametrilor urmăriți s-a făcut pe film ORWO-NP-20-35 mm, cu ajutorul unui oscilograf cu bucle de tipul N-105, avînd



a



b

Fig. 3.5. — Aparatura de înregistrare : *a* — locul de amplasare ; *b* — ansamblul aparaturii (punte tensometrică, oscilograf, cutie de rezistenţe).

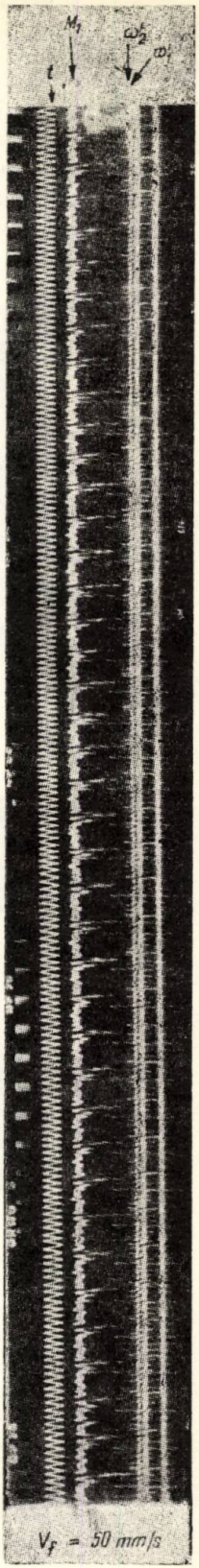


Fig. 3.6. — Înregistrarea perioadei de mers în gol a grupului de foraj nr. 1.

12 canale și alimentarea de la rețea cu 220 V, la o frecvență de 50 H_z, dotat cu o cutie de rezistențe.

În timpul înregistrărilor s-au folosit două canale pentru parametrii măsurați inductiv, un canal pentru parametrul măsurat rezistiv și un canal pentru baza de timp (50 Hz).

Vitezele utilizate pentru deplasarea filmului au fost: 20; 50; 100; 500; 1000 mm/s în funcție de necesitatea de a urmări fenomenele în ansamblu, respectiv în detaliu.

Aparatura de înregistrare a fost amplasată sub substructura motoarelor, între motorul nr. 1 și troliu, astfel încît să se elimine efectele dăunătoare ale vibrațiilor produse de motoare asupra dispozitivelor de înregistrare.

În figura 3.5 este prezentată vederea generală a aparaturii de înregistrare în locul unde a fost amplasată la instalația de foraj.

În figura 3.6 este prezentată o secvență a înregistrărilor făcute, pe care se poate urmări variația celor trei parametri înregistrați.

4. REZULTATELE CERCETĂRII EXPERIMENTALE PENTRU SISTEMUL DE ACȚIONARE LA MERSUL ÎN GOL AL GRUPULUI DE FORAJ, COMPARATIV CU FUNCȚIONAREA ÎN SARCINĂ

În urma prelucrării datelor experimentale rezultate din descifrarea unui număr de șapte oscilograme obținute în timpul funcționării grupului de forță necuplat la instalație, s-au obținut variațiile parametrilor cinematici și dinamici necesari pentru clarificarea următoarelor aspecte:

— determinarea caracteristicii momentului perturbator,

— funcționarea motorului Diesel, decuplat din instalație, la diferite nivele energetice determinate de mărimea gradului de alimentare a motorului,

— funcționarea în comun a motorului M581 S și convertizorului hidraulic de cuplu CHC-750 în cadrul grupului de foraj GF-581 S.

4.1. VARIAȚIA ÎN TIMP A PARAMETRILOR CINEMATICI ȘI DINAMICI

În figura 4.1 sînt prezentate variațiile în timp ale parametrilor cinematici și dinamici ai grupului de foraj la mersul în gol, pentru diferite grade de alimentare.

Analiza variației în timp a primilor doi parametri (ω_1' și ω_2') conduce la concluzia că vitezele unghiulare ale celor doi arbori oscilează tot timpul, în jurul unei valori medii ce depinde de gradul de alimentare a motorului.

Oscilațiile vitezei unghiulare ale arborelui primar se amplifică cu creșterea gradului de injecție, conducînd la o viteză unghiulară neuniformă pentru un grad de injecție constant. La o accelerare mare a motorului la

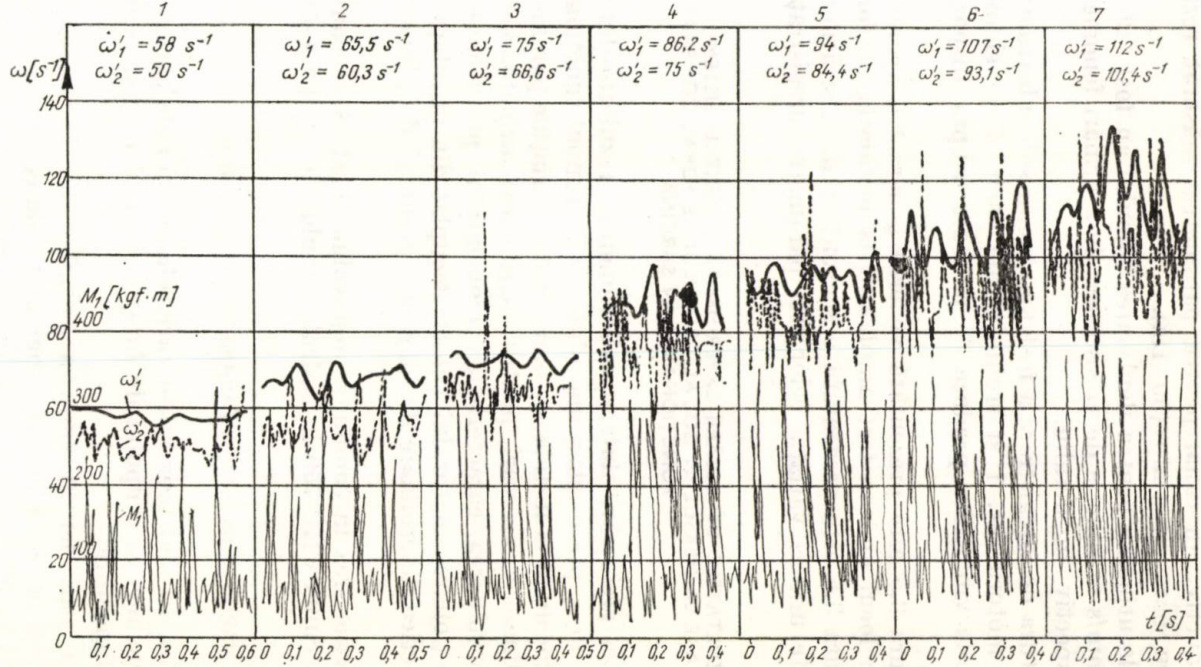


Fig. 4.1. — Variaţia parametrilor cinematici şi dinamici la funcţionarea în gol a grupurilor de foraj.

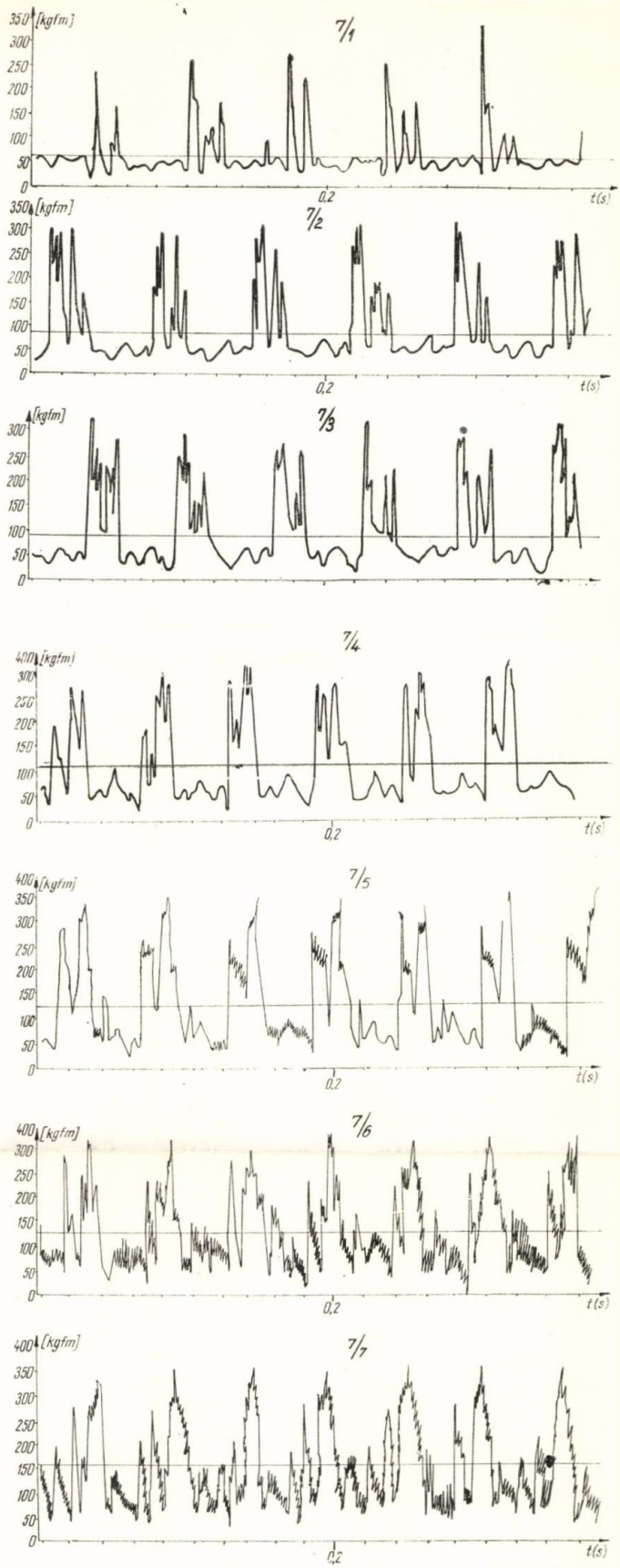


Fig. 4.2. — Momentele de torsiune la arborele motorului nr. 1, la mersul în gol, pentru diferite grade de alimentare.

care corespunde o viteză unghiulară medie ponderată a acestuia de 113 rad/s, viteza de rotație a arborelui motorului oscilează între 102 și 135 rad/s, deci cu un grad de neregularitate de 28,6%.

În timp ce viteza unghiulară a arborelui secundarului este mai mică decît aceea a arborelui primar, oscilațiile de viteză sînt mai pronunțate, rezultînd un grad de neregularitate mai mare decît la arborele primar. Astfel, în condițiile menționate mai sus ($\omega_1' = 113$ rad/s), viteza unghiulară a arborelui secundar oscilează între 57 și 93,1 rad/s, în jurul valorii medii $\omega_2' = 80$ rad/s. Gradul de neregularitate este de 51,6%, adică arborele secundar oscilează de 1,8 ori mai intens decît cel primar. Acest fenomen poate fi pus și pe seama lipsei de încărcare a secundarului, la mersul în gol al grupului.

Variațiile importante ale vitezelor unghiulare ale arborilor-primar și secundar, ale CHC, sînt determinate în primul rînd de neuniformitatea momentului de torsiune la arborele motorului Diesel, ca urmare a proceselor termice din cei 12 cilindri ai motorului.

În figura 4.2 sînt reprezentate diagramele de variație ale cuplului motor, obținute prin măsurare și înregistrare directă, pentru diferite grade de alimentare, corespunzătoare unor viteze unghiulare medii ω'_1 de la 58 la 113 rad/s (înregistrările 7/1, 7/2, 7/3, 7/4, 7/5, 7/6 și 7/7).

Valorile cuplului mediu au fost obținute prin planimetrarea curbei de variație a cuplului în timp. Aceste valori medii se situează în toate cazurile numai puțin deasupra valorilor minime ale acestui parametru.

Se observă că valoarea medie a cuplului motor crește rapid cu gradul de injecție, dependența fiind aproape liniară cu viteza unghiulară a arborelui cotit al motorului. Astfel, cuplul mediu crește de la 76,5 kgf.m, pentru $\omega_1' = 58$ rad/s, la 163 kgf.m pentru $\omega_1' = 113$ rad/s.

Cu majorarea gradului de alimentare a motorului în limitele menționate, cuplul minim crește de la 10 la 50 kgf.m, în timp ce cuplul maxim variază foarte puțin în jurul valorilor de 300—350 kgfm.

Ca urmare, pe măsura creșterii gradului de injecție, are loc o atenuare a variațiilor de cuplu, cu o tendință de concentrare a valorilor extreme (maximă și minimă) în jurul valorilor medii. Gradul de neuniformitate a cuplului motor scade de la valoarea 4,5 pentru $\omega_1' = 58$ rad/s, la 1,8 pentru $\omega_1' = 113$ rad/s, scădere care este însoțită de o creștere a frecvenței ciclurilor de variație a cuplului.

4.2. PARAMETRII FUNCȚIONALI ȘI INTERDEPENDENȚA LOR ÎN REGIM STABILIZAT

Pentru punerea în evidență a influenței diverșilor factori asupra funcționării motoarelor, în figurile 4.3 și 4.4 se prezintă variația în regim stabilizat a valorilor medii, maxime și minime ale parametrilor aferenți grupului de foraj nr. 1, necuplat la instalație, pentru diferite grade de injecție ale motorului și în funcție de următoarele mărimi:

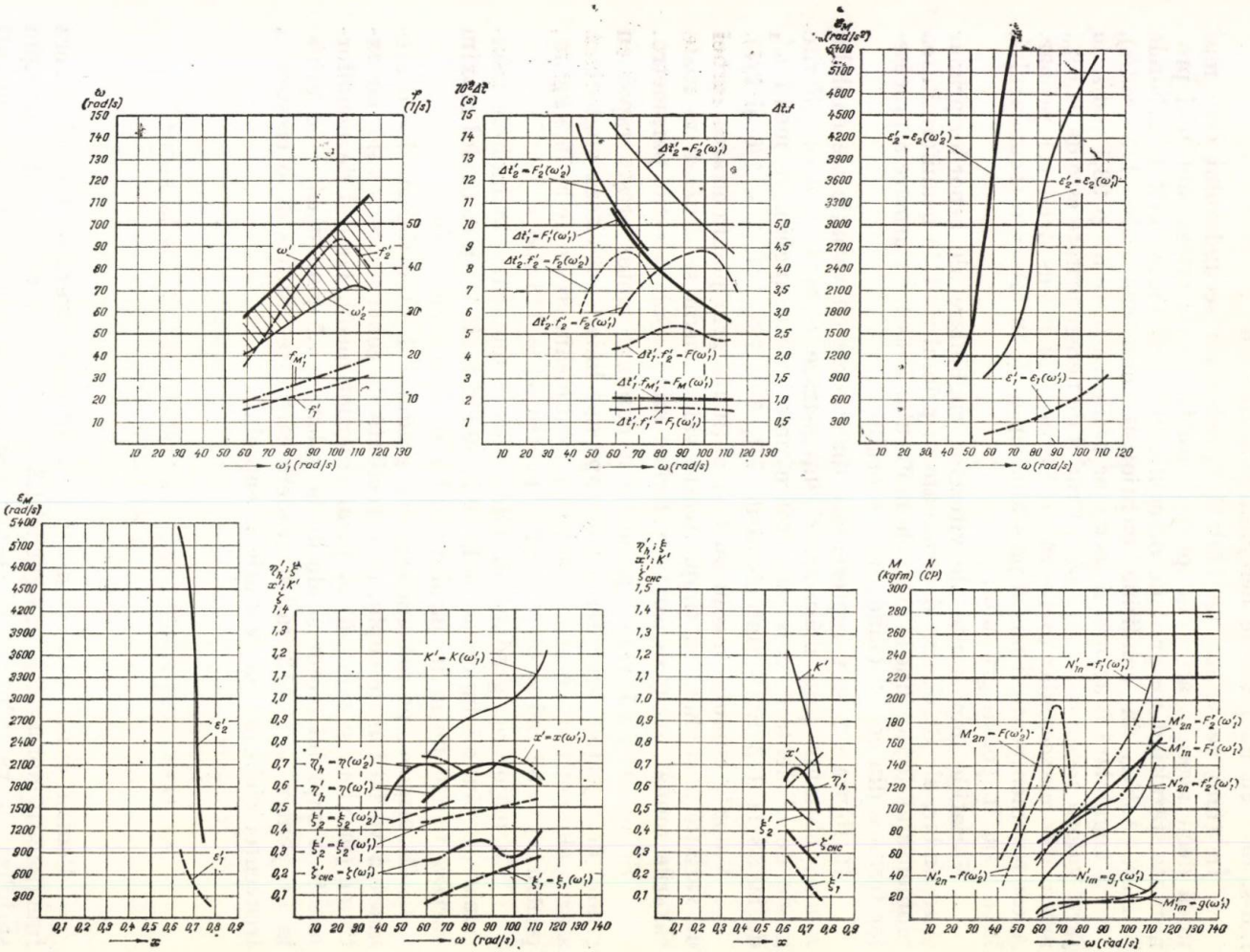


Fig. 4.3. — Variația parametrilor cinematici și funcționali ai grupului de foraj la mersul în gol al acestuia, în regim stabilizat.

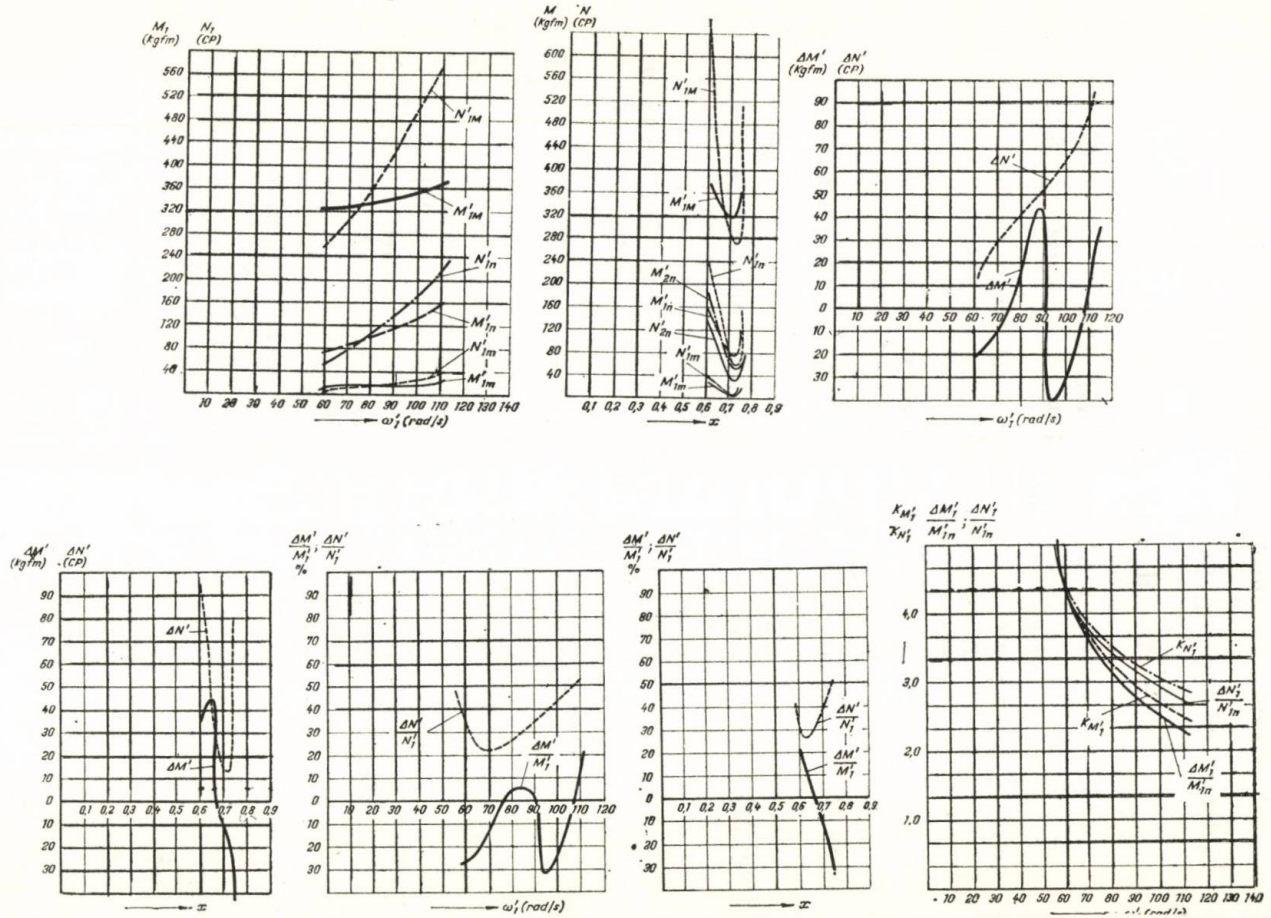


Fig. 4.4. — Variația parametrilor dinamici ai grupului de foraj, la mersul în gol al acestuia, în regim stabilizat.

— viteza unghiulară a motorului (ω_1'),
— viteza unghiulară a secundarului CHC (ω_2'),
— coeficientul de transmitere al CHC $\left(X' = \frac{\omega_2'}{\omega_1'}\right)$.

În diagramele prezentate în cele două figuri s-au folosit următoarele notaţii :

ξ_1' — gradul de neregularitate a vitezei unghiulare a motorului,

ξ_2' — idem a secundarului CHC,

$\Delta t_1'$ — timpul necesar pentru o rotaţie completă a arborelui motorului,

$\Delta t_2'$ — idem a arborelui secundarului CHC,

f_1' — frecvenţa oscilaţiilor torsionale ale arborelui motorului,

f_2' — idem ale arborelui secundarului CHC,

f_{M_1} — frecvenţa unui ciclu al momentului dezvoltat la arborele motorului,

$\bar{f}_{1.1} = f_1' \cdot \Delta t_1'$ — frecvenţa relativă „1.1" (numărul de oscilaţii torsionale ale arborelui motorului la o rotaţie completă a acestuia),

$\bar{f}_{1.2} = f_1' \Delta t_2'$ — frecvenţa relativă „1.2" (numărul de oscilaţii torsionale ale arborelui motorului la o rotaţie completă a arborelui secundarului CHC),

$\bar{f}_{M_1 \cdot 1} = f_{M_1} \cdot \Delta t_1'$ — frecvenţa relativă „M_1.1" (numărul de cicluri ale momentului dezvoltat la arborele motorului la o rotaţie completă a acestui arbore),

$\bar{f}_{M_1 \cdot 2} = f_{M_1} \cdot \Delta t_2'$ — frecvenţa relativă „M_1.2" (numărul de cicluri ale momentului dezvoltat la arborele motorului la o rotaţie completă a arborelui secundarului CHC),

$\bar{f}_{2.1} = f_2' \cdot \Delta t_1'$ — frecvenţa relativă „2.1" (numărul de oscilaţii torsionale ale arborelui secundarului CHC la o rotaţie completă a arborelui motorului),

$\bar{f}_{2.2} = f_2' \cdot \Delta t_2'$ — frecvenţa relativă „2.2" (numărul de oscilaţii torsionale ale arborelui secundarului CHC la o rotaţie completă a acestui arbore),

ε_1' — acceleraţia unghiulară maximă dezvoltată în regim stabilizat la arborele motorului,

ε_2' — idem la arborele secundarului CHC,

$X' = \frac{\omega_2'}{\omega_1'}$ — coeficientul de transmitere al CHC,

$K' = \frac{M_2'}{M_1'}$ — coeficient de transformare al CHC,

$z = \frac{\omega_1' - \omega_2'}{\omega_1'}$ — alunecarea din CHC,

$\eta_h = \frac{N_2'}{N_1'}$ — randamentul hidraulic al CHC,

M_{1M_1}'; M_{1m_1}'; M_{1n}' — momentul maxim, minim, respectiv mediu, dezvoltat la arborele motorului,

M'_{2n} — momentul mediu dezvoltat la arborele secundarului CHC, obținut prin calcul pe baza cunoașterii cuplului motorului prin măsurare directă și a caracteristicii grupului de forță, ridicată pe standul de probă,

N'_{1M}; N'_{1m_1}; N'_{1n} — puterea dezvoltată la arborele motorului,

N'_{2n} — puterea dezvoltată la arborele secundarului CHC,

$\Delta M' = M'_2 - M'_1$ — momentul reactiv dezvoltat în aparatul director,

$\Delta N' = N'_1 - N'_2$ — puterea consumată în interiorul convertizorului hidraulic de cuplu,

$\frac{\Delta M'}{M'_1}$ — momentul relativ dezvoltat în aparatul director,

$\frac{\Delta N'}{N'_1}$ — puterea relativă consumată în interiorul CHC,

$K_{M'_1}$ — coeficientul de dinamicitate a momentului dezvoltat la arborele motorului,

$K_{N'_1}$ — coeficientul de dinamicitate a puterii dezvoltată la arborele motorului.

La notațiile de mai sus s-a folosit accentul pentru a arăta că parametrii respectivi se referă la grupul de foraj nr. 1.

Pentru calculul acestor parametri, s-au folosit următoarele relații:

$$\xi = \frac{\omega_M - \omega_m}{\omega_n}, \tag{4.1}$$

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_n}, \tag{4.2}$$

$$f_i = \frac{n_i}{t_i}, \tag{4.3}$$

$$\bar{f}_{i.j} = f_i \cdot \Delta t_j, \tag{4.4}$$

$$K_d = \frac{h_M}{h_n}, \tag{4.5}$$

în care

ω_M; ω_m; ω_n reprezintă vitezele unghiulare maxime, minime, respectiv medii, ale arborelui pentru care se calculează,

n_i — numărul de oscilații torsionale sau cicluri ale momentului,

t_i — 1 s,

f_i — frecvența oscilațiilor torsionale sau ciclului momentului la arborele i,

Δt_j — timpul necesar pentru o rotație completă a arborelui j,

h_M; h_n — valorile maxime, respectiv medii, ale parametrului pentru care se calculează coeficientul de dinamicitate, obținute în regim stabilizat.

Analizînd diagramele din figurile 4.3 şi din 4.4, ajungem la următoarele concluzii mai importante cu privire la funcţionarea în regim stabilizat a grupurilor de forţă necuplate la instalaţia de foraj :

4.2.1. *Viteze unghiulare.* În timpul funcţionării în gol a grupului de forţă, momentul rezistent exterior CHC lipseşte, deoarece acesta este decuplat de la instalaţia de foraj. Absenţa momentului rezistent determină o alunecare mai mică a CHC decît în cazul funcţionării în sarcină şi deci o viteză mai mare a arborelui secundar. Acest fenomen se pune în evidenţă mai pregnant la viteze mici ale motorului, deoarece la viteze mari rezistenţele hidraulice din interiorul convertizorului cresc foarte mult, ceea ce compensează în mare măsură lipsa momentului rezistent la secundarul convertizorului hidraulic de cuplu (fig. 4.5).

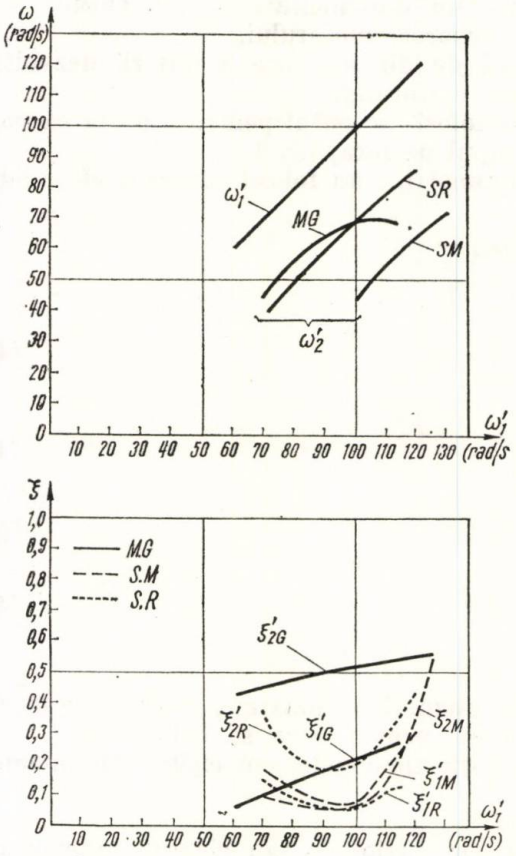


Fig. 4.5. — Variaţia vitezelor unghiulare şi a gradelor de neregularitate pentru funcţionarea în gol şi în sarcină (sistemul de manevră şi sistemul de rotire) al grupului de foraj.

Deoarece momentul creat în aparatul director este pozitiv şi creşte foarte rapid pentru $\omega_1 > 105$ rad/s, viteza unghiulară a arborelui secundar scade peste această viteză a motorului, valoarea maximă a lui ω_2 fiind, pentru $\omega_1 = 105$ rad/s, de 72 rad/s.

Grupul de forță fiind decuplat de la instalația de foraj, oscilațiile arborilor convertizorului hidraulic nu sînt influențate de oscilațiile instalației, astfel că frecvența ciclurilor de variație a vitezei unghiulare a arborelui motorului este cu circa 6—27% mai mică față de cazul funcționării în sarcină cu sistemul de rotire. Frecvența oscilațiilor instalației influențează în măsură mai mare frecvența oscilațiilor arborelui motorului pentru viteze mari ale acestuia, deoarece în aceste condiții instalația oscilează cu frecvență mai mare. De asemenea, datorită lipsei momentului rezistent exterior CHC, arborele secundarului, în cazul funcționării în gol a grupului de forță, oscilează cu frecvență mai mare decît în cazul funcționării în sarcină. Acest fenomen se constată mai ales la viteze mici ale motorului cînd momentul rezistent interior CHC este mic datorită pierderilor hidraulice reduse și cînd frecvența f_2 la mersul în gol este cu 47—52% mai mare decît în cazul funcționării în sarcină.

Gradul de neregularitate a vitezelor unghiulare ale arborilor primar și secundar crește aproape liniar în funcție de viteza motorului. Astfel, la o dublare a vitezei motorului de la 60 rad/s la 120 rad/s, ξ_1 crește de la 7% la 31% (deci de 4,5 ori), iar ξ_2 crește de la 44% la 56% (de 1,27 ori). Rezultă că oscilațiile arborelui secundar sînt de 1,8—7,3 ori mai mari decît ale arborelui primar.

La funcționarea în gol a grupului de forță, datorită maselor antrenate foarte mici, oscilațiile sînt mult mai intense decît în cazul antrenării maselor din instalație (cu efect de volant în cazul funcționării în sarcină), după cum se observă din figura 4.5.

Datorită absenței elementelor elastice, deci și a oscilațiilor proprii ale sistemului, la funcționarea în gol nu mai apare o viteză critică a grupului de forță Diesel-hidraulic în domeniul turațiilor normale de funcționare, spre deosebire de cazul funcționării aceluiași motor în sarcină, la acționarea sistemului de manevră și a celui de rotire ale instalației de foraj.

Această constatare indică căile de îndepărtare a turațiilor critice față de domeniul turațiilor de lucru, printr-o echilibrare dinamică judicioasă a grupului de forță, adecvată fiecărui sistem antrenat.

4.2.2. *Accelerațiile unghiulare maxime.* Accelerațiile unghiulare la cei doi arbori ai grupului de forță cresc cu gradul de alimentare, respectiv cu accelerarea motoarelor.

Datorită efectului de volant al maselor instalației, accelerațiile unghiulare la arborele primarului și cel al secundarului grupului de foraj, în raport cu situația la mersul în gol, sînt mai reduse la acționarea mesei rotative, această scădere fiind și mai pronunțată în cazul acționării sistemului de manevră, după cum se arată în figura 4.6.

Astfel, la mersul în gol al grupurilor de forță, accelerațiile unghiulare maxime au fost cuprinse între 150 și 1200 rad/s^2, cu 50% mai mari decît la acționarea mesei rotative și cu 65% mai mari decît în cazul acționării troliului. La arborele secundarului, accelerațiile maxime de 1000 la 5700 rad/s^2 sînt de 2,5 ori mai mari decît la acționarea mesei rotative și de opt ori mai mari decît la acționarea troliului.

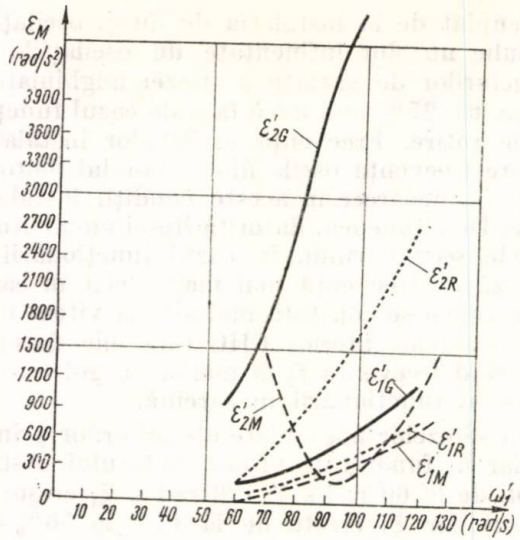


Fig. 4.6. — Acceleraţiile unghiulare maxime la arborii grupului de foraj, la funcţionarea în gol şi în sarcină.

4.2.3. *Momente.* Datorită proceselor termice care au loc în cei doisprezece cilindri ai motorului, momentul dezvoltat la arborele său variază în limite largi, în cicluri care se succed cu o frecvenţă ce creşte proporţional cu viteza arborelui (un ciclu la fiecare rotaţie a acestuia).

Momentele dezvoltate la arborii primar şi secundar ai convertizorului hidraulic de cuplu (ca urmare a creşterii cuplului de frecare hidraulică din interiorul CHC cu viteza unghiulară a motorului), cresc cu accelerarea motorului atît la funcţionarea în gol a grupului de forţă, cît şi în cazul funcţionării în sarcină. Valoarea acestor momente este însă mai mică în cazul funcţionării în gol decît în sarcină. Astfel, la o dublare a vitezei unghiulare a motorului (de la 60 rad/s la 120 rad/s), creşterea intensităţii momentului se desfăşoară diferit pentru diferitele regimuri de funcţionare, aşa cum este arătat în tabela 4.1.

Tabela 4.1.

Parametrul studiat	Condiţii de funcţionare	Valori iniţiale	Valori finale	Proporţia
		$\omega_1' = 60$ rad/s.	$\omega_1' = 120$ rad/s.	2,00
M'_{1n} (kgfm)	M.G.	72	180	2,50
	S.M.	75	302	4,03
	S.R.	72	288	4,00

Valoarea minimă a puterilor şi momentelor atît la arborele primar, cît şi la arborele secundar al CHC se dezvoltă la un coeficient de transmitere $X = 0{,}73$.

În tabelă s-au folosit notațiile:

ω_1' — viteza unghiulară a motorului nr. 1,

M_{1n}' — momentul dezvoltat la arborele primarului,

M.G. — funcționarea în gol a grupului de forță,

S.M. — funcționarea în sarcină a grupului de forță la antrenarea sistemului de manevră,

S.R. — idem pentru sistemul de rotire.

Din tabela 4.1 și din figura 4.7 se constată că momentul M_{1n}' are o valoare sensibil mai mică în cazul funcționării în gol față de funcționarea în sarcină, în special la turații mari ale motorului.

Pentru viteze unghiulare ale motorului sub 107 rad/s, momentul la arborele secundar, la funcționarea în gol a grupului de forță, este mai mic decît momentul dezvoltat la arborele primar. Peste această viteză,

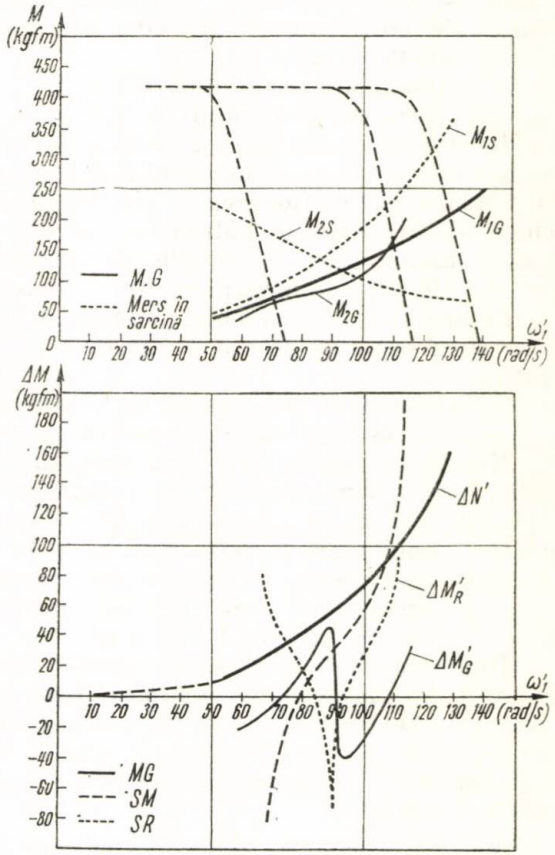


Fig. 4.7. — Variațiile momentului la arborele primar al CHC, a momentului la aparatul director, precum și a puterii consumate în interiorul CHC, pentru cazul funcționării în gol și în sarcină al grupului de foraj.

datorită creșterii rezistențelor hidraulice din convertizorul hidraulic de cuplu, momentul dezvoltat la arborele secundarului crește peste M_{1n}'.

Valoarea momentului dezvoltat la arborele primar, la funcționarea în gol a grupului de forță, poate fi descrisă de următoarea ecuație rezul-

tată din prelucrarea datelor experimentale:

$$M'_{1n} = K_1 \cdot D^5 \omega_1'^{5/4} = C_1 \omega_1'^{5/4} \quad [\text{kgfm}], \tag{4.6}$$

unde

$C_1 = K_1 D^5 = 0{,}42$ (kgfm $s^{5/4}$),

$D = 0{,}75$ m (diametrul maxim al torului de lichid din CHC),

ω_1' se introduce în rad/s,

$K_1 = 0{,}1 \dfrac{\text{kgf s}^{5/4}}{\text{m}^4}$.

În cazul funcţionării în gol a grupului de forţă, coeficientul de transformare al convertizorului hidraulic de cuplu $\left(K' = \dfrac{M'_{2n}}{M'_{1n}}\right)$ variază în limite mai restrînse, de 2,35 ori faţă de cazul acţionării mesei rotative şi de 11,2 ori faţă de cazul acţionării sistemului de manevră. Astfel, limitele de variaţie ale coeficientului K' sînt următoarele:

— mersul în gol $K' = 0{,}7-1{,}2$,

— acţionarea mesei rotative $K' = 0{,}4-1{,}6$,

— acţionarea sistemului de manevră $K' = 0{,}1-1{,}9$.

Intervalul de variaţie a coeficientului de transformare K este determinat de mărimea momentului rezistent şi de gama de variaţie a acestuia. Întrucît la funcţionarea în gol, momentul rezistent este dat aproape exclusiv de rezistenţele hidraulice din CHC, rezultă în mod evident o reducere însemnată a domeniului de variaţie a coeficientului de transformare al CHC în comparaţie cu funcţionarea în plină sarcină.

Pe aceleaşi considerente, momentul de torsiune M'_2 la arborele secundar depăşeşte pe cel de la arborele primar ($K' > 1$) în următoarele situaţii:

— la mersul în gol, pentru $\omega_1' > 100$ rad/s,

— la mersul în sarcină, pentru $\omega_1' > 75-80$ rad/s.

Momentul reactiv $\Delta M'$ din aparatul director al convertizorului hidraulic, are valori negative în următoarele împrejurări:

— la mersul în gol, pentru $K' < 0{,}67$, corespunzător unor valori ale vitezei unghiulare a motorului $\omega_1' < 75$ rad/s şi $\omega_1' = 91-109$ rad/s,

— la antrenarea sistemului de manevră, pentru $\omega_1' < 80$ rad/s,

— la antrenarea mesei rotative pentru $\omega_1' = 84-92$ rad/s, după cum e ilustrat în figurile 4.4 şi 4.7.

Din rezultatele prezentate rezultă că în cazul folosirii unui convertizor hidraulic de cuplu complex, care pentru $\Delta M < 0$ ar funcţiona în regim de turboambreiaj în vederea majorării randamentului hidraulic, acest regim nu s-ar întîlni decît la mersul în gol sau la viteze reduse ale motorului la funcţionarea în sarcină, deci în domenii care prezintă o importanţă minoră.

Această constatare duce la concluzia importantă că înlocuirea actualelor tipuri de convertizoare hidraulice româneşti prin convertizoare hidraulice de cuplu complexe, în sistemul de acţionare a instalaţiilor de foraj şi intervenţii, nu ar aduce vreun avantaj substanţial.

În cazul mersului în gol al grupului de forţă Diesel-hidraulic, momentul pozitiv maxim $\Delta M'$ din aparatul director se atinge la o valoare

a coeficientului de transmitere $X' = 0{,}66$ corespunzător vitezei unghiulare a motorului $\omega_1' = 88$ rad/s, fiind de circa 45 kgfm (adică 5% din M_1). Valoarea negativă maximă a momentului se atinge pentru $X' = 0{,}75$, respectiv $\omega_1' = 94$ rad/s, fiind de 40 kgfm (adică 32% din M_1).

În cazul funcționării în sarcină, momentul pozitiv maxim $\Delta M'$ din aparatul director este de 80—90 kgfm (adică 60—70% din M_1') la acționarea mesei rotative și de 320 kgfm (adică de 90—95% din M_1) la acționarea troliului de foraj. Valoarea maximă negativă în aceste cazuri este de 75 kgfm, respectiv 50% din M_1' la acționarea mesei rotative și de 80 kgfm (adică 70% din M_1') la antrenarea sistemului de manevră.

4.2.4. *Puteri.* Puterea dezvoltată de motor în cazul funcționării în gol a grupului de forță este, evident, mai mică decît la funcționarea în sarcină, totuși valoarea ei este apreciabilă și crește rapid cu turația motorului. Astfel, la o dublare a vitezei unghiulare a arborelui motorului (de la $\omega_1' = 60$ rad /s la $\omega_1' = 120$ rad/s), puterea dezvoltată de motor crește de 5,35 ori (de la 56 la 300 CP), în timp ce la funcționarea în sarcină crește de 10 ori (de la 50 la 500 CP), după cum se arată în figura 4.8.

La funcționarea în gol a ansamblului grupului de forță Diesel-hidraulic, motorul lucrează de fapt în sarcină, datorită rezistențelor hidraulice din interiorul convertizorului hidraulic de cuplu. La o viteză a motorului de 120 rad/s, puterea dezvoltată de motor este numai cu 200 CP mai mică decît la funcționarea grupului în sarcină, deci cu o reducere de numai 40%.

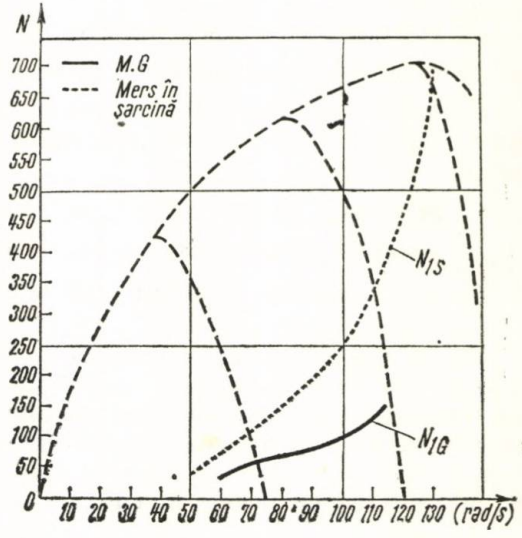


Fig. 4.8. — Variația puterii la arborele primar CHC, la funcționarea în gol și în sarcină a grupului de foraj.

Prin prelucrarea rezultatelor obținute, s-a dedus următoarea relație pentru determinarea puterii dezvoltate de motor la funcționarea în gol a grupului:

$$N_{1n} = K_1 D^5 \omega_1'^{9/4} = C_1 \omega_1'^{9/4} \text{ (kgfm/s)}. \qquad (4.7)$$

Puterea consumată pentru învingerea rezistenţelor hidraulice din interiorul convertizorului hidraulic de cuplu, atît la funcţionarea în sarcină, cît şi la mersul în gol al grupului de foraj, creşte în ritm rapid cu creşterea turaţiei motorului. Astfel, la o viteză $\omega_1' = 130$ rad/s, această putere este aproape egală la funcţionarea în gol şi în sarcină, situîndu-se în jurul valorii de 150 CP. Valoarea relativă, maximă a acestei puteri este de 20% la mersul în gol, pentru $\omega_1' = 69$ rad/s şi $X' = 0{,}72$, situîndu-se între 17 şi 21% la funcţionarea în sarcină, pentru $\omega_1' = 100$ rad/s, cum se poate observa din figurile 4.4 şi 4.7.

Mărimea puterii consumate în interiorul convertizorului hidraulic de cuplu, pentru învingerea rezistenţelor hidraulice şi independent de regimul de funcţionare, se poate calcula cu relaţia:

$$\Delta N = K\omega_1'^3 \tag{4.8}$$

în care coeficientul experimental $K = 7{,}4 \cdot 10^{-5}$ (CPs^3).

4.2.5. *Randamentul hidraulic.* Datorită lipsei momentului rezistent exterior, la funcţionarea în gol a grupului de forţă, randamentul hidraulic al convertizorului are în general valori mai reduse şi variază în limite mai restrînse decît în cazul funcţionării în sarcină (fig. 4.9). S-a constatat că la o dublare a vitezei motorului (de la $\omega_1' = 60$ rad/s la $\omega_1' = 120$ rad/s), randamentul hidraulic variază în următoarele limite:

— la mersul în gol $\eta_h = 0{,}54 - 0{,}70$,

— la antrenarea mesei rotative $\eta_h = 0{,}35 - 0{,}80$

— la antrenarea troliului $\eta_h = 0{,}20 - 0{,}82$.

Vitezele unghiulare ale motorului şi coeficientul de transmitere pentru care se atinge valoarea maximă a randamentului CHC sînt următoarele:

— la mersul în gol $\omega_1' = 88$ rad/s, $X' = 0{,}65$,

— la antrenarea mesei $\omega_1' = 65$ rad/s, $X' = 0{,}45$,

— la antrenarea troliului $\omega_1' = 98$ rad/s, $X' = 0{,}45$.

4.2.6. *Coeficienţi de dinamicitate.* Coeficientul de dinamicitate a motorului, raportat la puterea dezvoltată, în toate regimurile de funcţionare cercetate, este superior celui calculat în raport cu momentul de torsiune, cu circa 11%. Această diferenţă se datoreşte gradului de neregularitate a vitezei unghiulare, parametru care afectează momentul cu pătratul său, iar puterea cu acesta la cub.

În cazul funcţionării în gol a grupului de forţă, precum şi la antrenarea mesei rotative, cînd masele cu efect de volant sînt reduse, apare un fenomen interesant în sensul scăderii coeficientului de dinamicitate cu creşterea vitezei motoarelor. Aceasta se explică prin creşterea importantă a efectului maselor volant. La acţionarea sistemului de manevră, care cuprinde mase antrenate foarte importante în mişcare de translaţie şi

în mișcare de rotație, coeficienții de dinamicitate au în schimb valori reduse la turații reduse ale motorului.

La mersul în gol și la antrenarea mesei rotative, valorile determinate ale coeficientului de dinamicitate variază în limitele 2,1—5, în timp ce la antrenarea sistemului de manevră coeficientul K_d variază între 1,1 și 3,0.

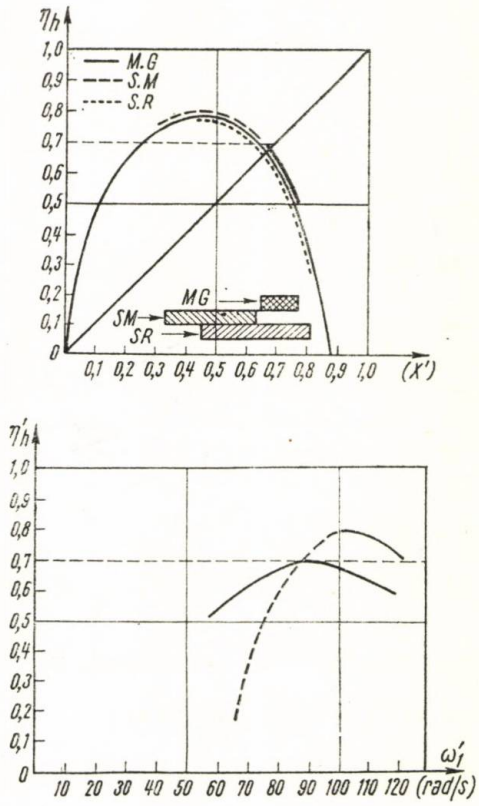


Fig. 4.9. — Variația randamentului hidraulic al CHC, la funcționarea în gol și în sarcină al grupului de foraj.

Din aceste constatări rezultă concluzia importantă că pentru îmbunătățirea acționării instalațiilor de foraj se recomandă ca volantul motorului să fie diferit pentru diferitele sisteme antrenate. În acest scop s-ar putea prevede, de exemplu, cuplarea în caz de necesitate a unui volant adițional, cu ajutorul unor mecanisme suplimentare.

Astfel, la acționarea sistemului de manevră cu masele sale importante, este necesar un volant mult mai mic decît pentru antrenarea mesei rotative și mai ales la mersul în gol.

Sub aspect cantitativ, la o dublare a vitezei unghiulare a motorului, coeficienții de dinamicitate, raportați la momentul de torsiune al motorului, variază după cum se arată în tabela 4.2 și în figura 4.10.

În urma prelucrării matematice a datelor experimentale s-au putut deduce următoarele relații pentru calcularea coeficienților de dinamici-

Tabela 4.2.

Parametrul studiat	Condiţii de funcţionare	Valori iniţiale $\omega_1' = 60$ rad/s	Valori finale $\omega_1' = 120$ rad/s	Proporţia 2,00
K_d	mers în gol	4,50	2,10	0,47
	antrenare sistem de manevră	1,10	3,00	2,72
	antrenare sistem de rotire	4,50	3,20	0,71

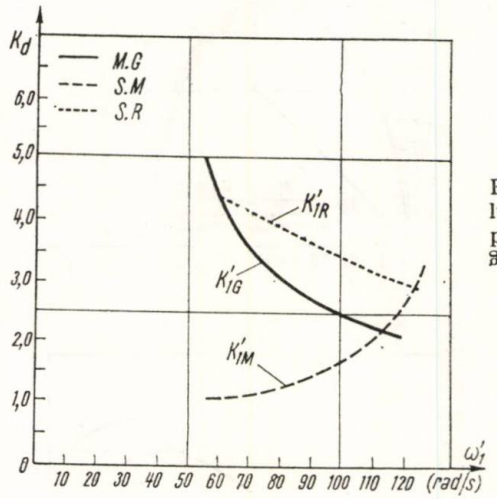


Fig. 4.10. — Variaţia coeficientului de dinamicitate la arborele primar CHC, la funcţionarea în gol şi în sarcină a grupului de foraj nr. 1.

tate maximi, raportaţi la moment, în funcţie de viteza unghiulară a motorului:

— la mersul în gol (M.G.):

$$K_{M_1'} = 1 + \frac{A}{\sqrt{\omega_1'^3}}, \tag{4.9}$$

— la antrenarea sistemului de manevră (S.M.):

$$K_{M_1'} = 1 + B\omega_1'^4, \tag{4.10}$$

— la antrenarea sistemului de rotire (S.R.):

$$K_{M_1'} = 1 + \frac{C}{\sqrt[4]{\omega_1'^3}}, \tag{4.11}$$

cu următoarele valori ale coeficienţilor introduşi:

$$A = 1660 \text{ (rad/s)}^{1,5},$$
$$B = 0{,}75 \cdot 10^{-8} \text{ (s/rad)}^4,$$
$$C = 75 \text{ (rad/s)}^{0,75}.$$

Alura relațiilor deduse are un caracter mai general, pentru o gamă largă de grupuri de forță Diesel-hidraulice. Coeficienții determinați experimental sînt valabili în mod evident numai pentru sistemul studiat, respectiv pentru funcționarea în comun a motorului Diesel M 581S cu convertizorul hidraulic de cuplu CHC — 750 din sistemul de acționare a instalației de foraj 4DH-315.

5. CONCLUZII

1. În cadrul lucrării prezentate s-au întreprins pentru prima oară cercetări experimentale cuprinzătoare privind funcționarea în comun, în regim dinamic, a motoarelor Diesel și convertizoarelor hidraulice de cuplu din sistemul de acționare a instalațiilor de foraj, în diferite regimuri de lucru.

2. S-a cercetat funcționarea grupurilor de foraj Diesel-hidraulice la mersul în gol, pentru diferite nivele energetice, comparativ cu funcționarea în sarcină (la acționarea sistemului de manevră și a celui de rotire ale instalației).

3. Măsurătorile au permis determinarea parametrilor cinematici, dinamici și funcționali ai grupurilor de forță în diferite condiții de lucru, rezultînd, calitativ și cantitativ, interdependența lor și corelarea cu regimul de funcționare, cu tipul mecanismelor antrenate și mai ales cu mărimea maselor puse în mișcare.

4. Pentru diminuarea solicitărilor dinamice, care au în prezent valori relativ ridicate, se impune o echilibrare dinamică diferențiată a grupurilor de forță pentru diferitele mecanisme de lucru acționate.

5. Înlocuirea actualelor convertizoare hidraulice de cuplu cu trei trepte prin convertizoare hidraulice complexe nu apare indicată la acționarea instalațiilor de foraj și de intervenție.

6. Metodologia aplicată în cadrul prezentei lucrări poate fi extinsă și asupra altor sisteme de acționare și agregate componente ale instalațiilor de foraj și de intervenție, precum și din alte domenii ale construcțiilor de mașini (mașini miniere, locomotive, autovehicule, mașini de ridicat și transportat etc.).

Primită la redacție la 29 august 1972

BIBLIOGRAFIE

1. A. Bărglăzan, V. Dobîndă, *Turbotransmisiile hidraulice*, București, Edit. tehnică, 1957.
2. A. Bublic, V. Cristea, I. Hirsch, N. Peligrad, G. Silion, *Utilaj petrolier pentru foraj și extracție*, București, Edit. tehnică, 1968.
3. Gh. Buzdugan, *Măsurarea vibrațiilor mecanice*, București, Edit. tehnică, 1964.
4. I. Hirsch, I. Vlad, I. Preda, Șt. Partenie, *Contribuții la studiul cinematicii și dinamicii instalațiilor de foraj românești, pe baza cercetărilor experimentale*, Petrol și Gaze, *3* (1969).
5. I. Vlad, I. Hirsch, I. Preda, Șt. Partenie, A. Popovici, *Cercetarea experimentală a comportării dinamice a instalației de foraj* 4DH-315 (vol. I și II), Catedra C.C.U.P. din I.P.G.G. București.

6. C. M. HARRIS, C. E. CREDE, *Şocuri şi vibraţii* (traducere din limba engleză), Bucureşti, Edit. tehnică, 1968.
7. I. P. DEN HARTOG, *Mechanical vibrations*, N. Y, Mc Graw Hill Book Company, 1956.
8. H. F. GRAVE, *Măsurarea electrică a mărimilor neelectrice* (traducere din limba germană), Bucureşti, Edit. tehnică, 1966.
9. B. A. GAVRILENKO, I. F. SEMNICEASTNOV, *Ghidrodinamiceskie mufti i transformatori*, Moskova, Maşinostroenie, 1969.
10. R. G. POPÎK, *Dinamika avtomobilnîh i traktornîh dvigatelei*, Moskva, Maşinostroenie, 1965.
11. M. WOLFF, *Strömungskupplungen und Strömungswandler*, Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer-Verlag, 1962.

CORELAȚII ÎNTRE RUGOZITATEA CĂII ȘI ADERENȚA PNEURILOR DE AUTOMOBIL

de CHIRIAC VASILIU și I. GHIȚĂ

Institutul politehnic București

Prin studii teoretice și experimentale s-a constatat că aderența pneurilor de automobil depinde mult de construcția acoperirii și stării căii.
În lucrare se studiază legătura dintre forma acoperirii căii (netedă sau rugoasă) și aderența pneurilor, precum și relația dintre rugozitatea căii și viteza automobilului. Se trag concluzii importante asupra factorilor de care trebuie ținut seama pentru mărirea aderenței pneurilor.

Aderența dintre pneuri și șosele este o permanentă preocupare a specialiștilor în automobile, mai ales acum cînd creșterea continuă a vitezelor de circulație și a traficului a readus în atenția acestora — de o manieră mai presantă — problema rezistenței la alunecare a automobilului, strîns legată de siguranța circulației.

1. VARIAȚIA ADERENȚEI PNEURILOR DE AUTOMOBIL

După cum se știe, alunecarea pneurilor se manifestă prin pierderea controlului asupra traseului de deplasare a automobilului de către conducătorul auto, ceea ce poate conduce la grave accidente de circulație.

Aderența pneurilor depinde de o serie de factori, printre care — de mare importanță — sînt viteza de deplasare a automobilului și rugozitatea căii. Experimentările au arătat că pe șosele cu rugozitate mare aderența pneurilor scade mai puțin o dată cu creșterea vitezei, însă la viteze mici aderența este mai scăzută decît cea constatată pe șosele cu rugozitate mică.

De asemenea, pe șosele uscate și curate aderența este mai puțin influențată de viteză, în timp ce pe acoperiri umede și îmbîcsite se produce o descreștere accentuată a aderenței o dată cu creșterea vitezei.

Rezultatele acestor experimentări demonstrează că aderența este influențată de caracteristicile constructive ale acoperirii căii — *textura* căii — și anume de dimensiunile și distribuția asperităților [5]: înăl-

țimea medie r (fig. 1), lățimea medie numită granulometrie G (fig. 2) și numărul asperităților n de pe suprafața de contact (fig. 3).

În cazul șoselelor umede, pentru a se putea circula cu viteze mari și în deplină siguranță, se impune existența unui *contact uscat* între pneu

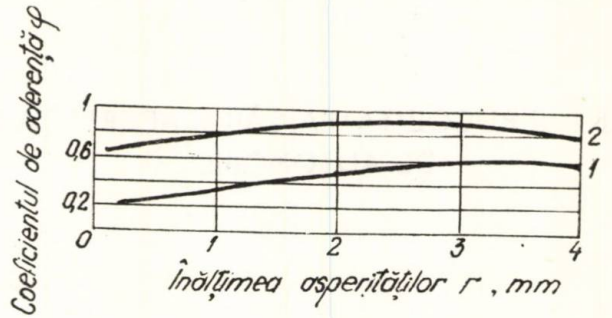


Fig. 1. — Variația coeficientului de aderență în funcție de înălțimea asperităților căii: *1* — pe o cale umedă; *2* — pe o cale uscată.

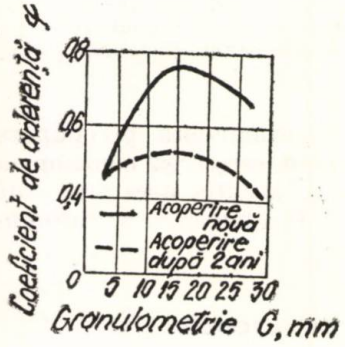


Fig. 2. — Variația coeficientului de aderență cu lățimea asperităților (granulometria).

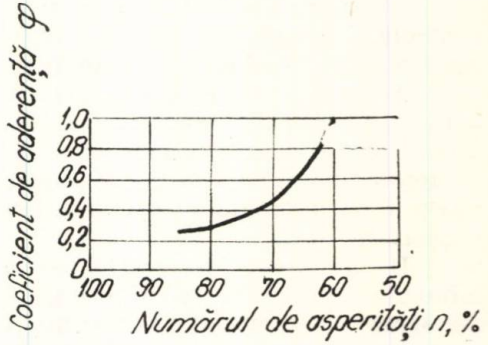


Fig. 3. — Variația coeficientului de aderență cu numărul asperităților de pe suprafața de contact.

și suprafața șoselei. Filmul de apă — prezent pe suprafața șoselei — poate avea grosimi foarte reduse, de cîteva sutimi de milimetru, însă este foarte rezistent (aderent de suprafața șoselei). Pentru a se putea rupe acest film subțire de apă, între pneu și suprafața șoselei trebuie să se dezvolte o

presiune ridicată. Aceasta se poate obţine în cazul cînd suprafaţa şoselei are un mare număr de asperităţi de formă ascuţită. Pe şoselele cu asperităţi rotunjite (polizate), ceea ce se constată după un anumit timp de exploatare, aderenţa iniţială scade, datorită faptului că nu se mai dezvoltă presiuni locale mari, între asperităţile căii şi pneu.

Totodată s-a remarcat experimental, că aderenţa creşte numai pînă la o anumită valoare a rugozităţii, după care scade; s-a constatat că valoarea optimă a înălţimii asperităţilor (macrorugozitatea) este de 2—4 mm, peste această mărime aderenţa scăzînd (v. fig. 1). Influenţa macrorugozităţii este însă funcţie şi de viteza automobilului.

2. CONSIDERAŢII ASUPRA ADERENŢEI PNEULUI

În cazul unei roţi nedeformabile, *aderenţa* dintre roată şi cale se defineşte ca forţa de frecare tangenţială de repaus relativ, cînd roata se rostogoleşte fără alunecare. Pentru ca rostogolirea roţii să se facă fără alunecare, este necesar ca forţa de tracţiune la periferia roţii F_t să fie mai mică decît forţa de aderenţă F_{ad}. Prin *limită de aderenţă* se înţelege valoarea aderenţei la care încetează repausul relativ dintre suprafaţa de contact roată-cale şi începe alunecarea roţii. La limita de aderenţă rostogolirea roţii este determinată de frecarea de alunecare.

Aderenţa critică are loc cînd roata începe să alunece cu intermitenţă, adică atunci cînd $F_t > F_{ad}$.

În cazul unei roţi cu bandaj pneumatic, fenomenele de aderenţă şi de alunecare sînt mult mai complexe datorită deformabilităţii mari a pneului, produsă pe deoparte de sarcina care apasă pe roată G_r, iar pe de altă parte de asperităţile (rugozitatea) căii.

Unanim se admite că frecarea cauciucului [2], [4], [6], deci şi a pneului, este un fenomen complex, compus din frecare internă şi frecare externă. Frecarea internă se datoreşte procesului de pierdere parţială de energie din interiorul cauciucului (histerezis), iar frecarea externă (adeziune) se datoreşte procesului de pierderi totale (ireversibil) de energie din zona contactului pneu-cale.

Se poate spune astfel, că forţa de frecare F dintre pneu şi cale este însumarea forţei de frecare de histerezis F_h cu forţa de frecare de adeziune F_a:

$$F = F_h + F_a. \tag{1}$$

Între coeficienţii de frecare corespunzători acestor forţe de frecare se poate înscrie o relaţie similară

$$f = f_h + f_a. \tag{2}$$

3. FRECAREA DE HISTEREZIS

Pentru studierea variaţiei frecării de histerezis, se consideră două cazuri: variaţia frecării de histerezis pe o cale perfect netedă şi variaţia frecării de histerezis pe o cale rugoasă.

3.1. *Variația frecării de histerezis pe o cale netedă.* Pe o cale netedă, frecarea de histerezis se datorește numai deformării pneului sub acțiunea sarcinii G_r.

Deformarea pneului are loc atît în sens radial, cît și în sens tangențial. Deoarece pierderile de energie datorate deformării tangențiale sînt mici în comparație cu cele datorate deformării radiale, se va face abstracție de influența lor, rezultatele obținute fiind concludente și foarte apropiate de realitatea fenomenului.

În procesul de deformare a pneului, consumarea lucrului mecanic de deformare se produce în partea anterioară a suprafeței de contact (față de verticala ce trece prin centrul roții) dintre pneu și cale, iar recuperarea energiei, în faza de destindere a pneului, se produce în partea posterioară a suprafeței de contact.

Dacă cauciucul pneului ar fi complet elastic, energia restituită în repriza de relaxare ar fi egală cu energia înmagazinată în repriza de deformare. Cum cauciucul nu este un material perfect elastic, apar pierderi de energie în procesul de deformare-relaxare datorită frecării interne de histerezis.

Pierderile prin histerezis pot fi considerate drept rezultatul a doi factori: *cantitatea de energie elastică* W_e, dezvoltată în cursul comprimării pneului, și *fracțiunea de energie elastică* δ_e pierdută în cursul relaxării pneului. Astfel, *energia pierdută* într-un ciclu de comprimare-relaxare va fi $\delta_e \cdot W_e$.

Energia elastică dezvoltată W_e se poate calcula, admițîndu-se că pneul se deformează după legile contactului elastic ale lui Hertz. Pentru aceasta se consideră un pneu de rază liberă r_0, care rulează pe o cale nedeformabilă și perfect netedă și are suprafața bandajului elastic cilindrică (fig. 4). În această ipoteză ecuațiile contactului elastic ale lui Hertz vor fi:

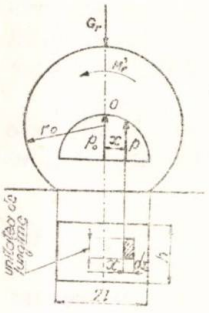


Fig. 4. — Mișcarea la rulare liberă a unui pneu, pe o cale cu suprafață netedă.

— Presiunea maximă p_{max}, în centrul suprafeței de contact, are expresia:

$$p_{max} = \frac{2G_r}{\pi \cdot l \cdot h} \text{ [kgf/cm}^2\text{]}, \tag{3}$$

în care

G_r este sarcina pe roată, în kgf,

l — semilungimea suprafeței de contact, în cm,

h — lăţimea suprafeţei de contact.

Presiunea p într-un punct la distanţa x faţă de verticala centrului O are ecuaţia

$$p = p_{max}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^{1/2} \text{ [kgf/cm}^2\text{]}. \tag{4}$$

Semilungimea suprafeţei de contact l, dacă se neglijează deformaţia căii în raport cu aceea a pneului, are expresia

$$l = \left[\frac{8}{\pi} G_r \frac{r_0}{h}\left(\frac{1 - \mu_c^2}{E_c}\right)\right]^{1/2} \text{ [cm]}, \tag{5}$$

în care

μ_c este coeficientul de contracţie transversală (coeficientul lui Poisson), pentru cauciuc,

E_c — modul de elasticitate (modulul lui Young), pentru cauciuc.

Reacţiunea normală Z_{ri}, corespunzătoare unui element de suprafaţă de contact dS, de lungime dx şi de lăţime egală cu unitatea, la distanţa x, are expresia

$$Z_{ri} = p \cdot dS = p \cdot 1 \cdot dx = p \cdot dx. \tag{6}$$

Momentul elementar rezistent M'_{ri}, produs de reacţiunea Z_{ri}, are valoarea

$$M'_{ri} = Z_{ri} \cdot x = p \cdot x \cdot dx. \tag{7}$$

Momentul rezistent total M'_r exercitat pe toate elementele de suprafaţă dS, de pe jumătatea din faţă a suprafeţei de contact, are expresia

$$M'_r = h \int_0^l M'_{ri} = h \int_0^l p \cdot x \cdot dx. \tag{8}$$

Introducînd în relaţia (8) expresia lui p din relaţia (4), se obţine expresia momentului rezistent total M'_r:

$$M'_r = G_r^{3/2}\left(\frac{r_0}{h}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{32}{9 \cdot \pi^3}\right)\left(\frac{1 - \mu_c}{E_c}\right)\right]^{1/2} = k_1 \cdot G_r^{3/2}\left(\frac{r_0}{h}\right)^{1/2}, \tag{9}$$

unde

$$k_1 = \left(\frac{32}{9 \cdot \pi^3} \cdot \frac{1 - \mu_c^2}{E_c}\right)^{1/2} \approx 0{,}34\left(\frac{1 - \mu_c^2}{E_c}\right)^{1/2}.$$

Lucrul mecanic de deformare L', produs pe unitatea de distanţă de deplasare, este dat de relaţia

$$L' = \frac{M'_r}{r_0}. \tag{10}$$

Astfel, energia viscoelastică W'_e dezvoltată în rulare pe unitatea de distanță va fi

$$W'_e = L' = k_1 \frac{G_r^{3/2}}{(r_0 \cdot h)^{1/2}}. \tag{11}$$

Forța de frecare de histerezis este egală cu pierderea de energie elastică $\delta_e \cdot W'_e$, pe unitatea de distanță:

$$F'_h = \delta_e \cdot W'_e = \delta_e \cdot k_1 \frac{G_r^{3/2}}{r_0^{1/2} \cdot h^{1/2}} \tag{12}$$

în care

δ_e este un coeficient de pierderi de energie elastică,

k_1 — constanta de elasticitate (constanta lui Hertz).

După D. Tabor [6], coeficientul de pierderi prin histerezis δ_e, în cazul cauciucului, are valoarea aproximativă $\delta_e = 0{,}35$.

Coeficientul de frecare de histerezis f'_h, corespunzător, va fi:

$$f'_h = \frac{F'_h}{G_r} = \delta_e \cdot k_1 \left(\frac{G_r}{r_0 \cdot h} \right)^{1/2}. \tag{13}$$

Din relațiile (12) și (13) se observă că forța de frecare de histerezis și, respectiv, coeficientul de frecare de histerezis, depind atît de sarcină, cît și de raza pneului, și anume cresc odată cu mărirea sarcinii și cu micșorarea razei libere și a lățimii suprafeței de contact.

Prin urmare, este de reținut că pneurile de raze și lățimi mici vor avea o aderență mai bună.

De asemenea, pneurile executate din cauciuc mai puțin elastic (E_c mic) vor avea pierderi prin histerezis mai mari, ceea ce conduce la o frecare mare (aderență mare).

3.2. *Variația frecării de histerezis pe o cale rugoasă.* Presupunînd că suprafața căii este construită din asperități semisferice tangente (fig. 5) și dacă se fac următoarele ipoteze simplificatoare:

— sarcina totală pe roată G_r este suportată în întregime de asperități,

— deformațiile elementare ale benzii de rulare a pneului, produse de asperități, sînt independente unele de altele,

— pierderile de energie viscoelastică nu variază cu frecvența de deformare,

— se poate arăta, aplicînd teoria elasticității elaborată de Hertz, că frecarea de histerezis depinde atît de sarcina G_r, cît și de rugozitatea căii r.

Pentru demonstrare, se consideră același pneu de rază liberă r_0, în rulare pe o cale cu n asperități pe unitatea de suprafață de formă semisferică cu raza r. Numărul de asperități pe elementul de suprafață dS

va fi $n \cdot dS$, iar sarcina suportată $p.dS$, astfel că fiecare asperitate suportată o sarcină G_{ri} dată de relația

$$G_{ri} = \frac{p \cdot dS}{n \cdot dS} = \frac{p}{n}. \tag{14}$$

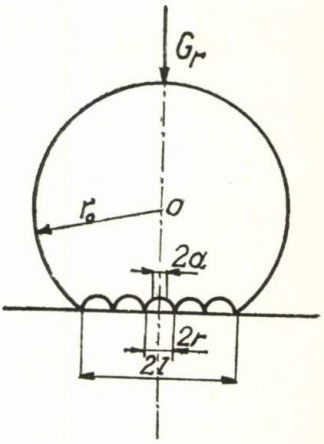


Fig. 5. — Mișcarea la rulare liberă a unui pneu pe o cale cu suprafață rugoasă.

Suprafața de deformare elastică S_i produsă pe banda de rulare a pneului, de către o asperitate, este un cerc de rază a. Aplicînd legile lui Hertz, în cazul suprafeței de contact de forma unui cerc, se obțin următoarele expresii ale lui a, S_i, dS și M_r'':

$$a^3 = \frac{3}{2}\left(\frac{1-\mu_c^2}{E_c}\right) G_{ri} \cdot r, \tag{15}$$

$$S_i = \pi \cdot a^2 = \pi \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1-\mu_c^2}{E_c} \cdot \frac{p}{n} \cdot r\right)^{2/3}, \tag{16}$$

$$dS = n \cdot S_i \cdot dx, \tag{17}$$

$$M_r'' = h \int_0^l p \cdot (dS) \cdot x = h \int_0^l p \cdot n \cdot S_i \cdot x \cdot dx. \tag{18}$$

Introducînd în relația (18) expresiile corespunzătoare ale lui p din relația (4), ale lui l din relația (5) și ale lui S_i din relația (16) se obține expresia

$$M_r'' = 0{,}9 \left(\frac{1-\mu_c^2}{E_c}\right)^{5/6} n^{1/3} \cdot r^{2/3} \left(\frac{r_0}{h}\right)^{1/6} G_r^{11/6} = k_2 \cdot n^{1/3} \cdot r^{2/3} \left(\frac{r_0}{h}\right)^{1/6} G_r^{11/6}, \tag{19}$$

unde $k_2 \approx 0{,}9 \left(\frac{1-\mu_c^2}{E_c}\right)^{5/6}$.

Energia elastică W_e'' produsă în rulare pe o cale rugoasă, pe unitate de distanță, va fi dată de relația

$$W_e'' = \frac{M_r''}{r_0} = k_2 \cdot n^{1/3} \cdot r^{2/3} \cdot \frac{1}{h^{5/6}} \cdot \frac{G_r^{11/6}}{r_0^{5/6}}. \tag{20}$$

Forța de frecare F_h'' datorită fenomenului de histerezis, provocat de asperitățile căii, va fi egală cu pierderea de energie elastică, $\delta_e \cdot W_e''$:

$$F_h'' = \delta_e \cdot W_e'' = \delta_e \cdot k_2 \cdot n^{1/3} \cdot r^{2/3} \cdot \frac{1}{h^{5/6}} \cdot \frac{G_r^{11/6}}{r_0^{5/6}}. \tag{21}$$

Coeficientul de frecare de histerezis f_h'', va fi

$$f_h'' = \frac{F_h''}{G_r} = \delta_e \cdot k_2 \cdot n^{1/3} \cdot r^{2/3} \cdot \left(\frac{G_r}{r_0 \cdot h}\right)^{5/6}. \tag{22}$$

Spre deosebire de cazul rulării pneului pe o cale netedă, relațiile (21) și (22) arată că, în cazul rulării pe o cale rugoasă, forța de frecare și coeficientul de frecare de histerezis depind și de numărul de asperități n precum și de înălțimea asperităților (rugozitatea căii), reprezentată în cazul de față prin raza r.

Din comparația relațiilor (13) și (22) se vede că

$$f_h'' > f_h'. \tag{23}$$

Prin urmare, rezultatele experiențelor efectuate pe drum sau în laborator sînt confirmate și analitic ; se demonstrează astfel că valoarea coeficientului de frecare de histerezis va fi mai mare pe o cale rugoasă decît pe o cale netedă.

Din relația (22) s-ar deduce că valoarea coeficientului de histerezis crește cu numărul asperităților și cu rugozitatea căii. Însă, trebuie avut în vedere că între numărul și raza asperităților de pe suprafața de contact este o strînsă interdependență : dacă numărul de asperități crește, raza scade și invers. Experimentările au arătat [5] că valoarea optimă a rugozității căii este de 2—4 mm ; în afara acestor limite, coeficientul de histerezis se micșorează.

Se cunoaște că un cauciuc cu pierderi mari prin histerezis duce la o rezistență mare la rulare și la încălzirea excesivă a pneului, deci la uzarea intensă a cauciucului.

Reducerea frecării la rularea liberă a pneului se poate obține, într-o anumită măsură, modificînd geometria suprafeței de contact a pneului, astfel ca aria acestei suprafețe să rămînă constantă.

Considerînd că suprafața de contact este un dreptunghi cu lungimea $2\,l$ și lățimea h, și că există n asperități pe unitatea de suprafață (fig. 6, *a*), iar pneul înaintează pe o unitate de distanță, el vine în contact cu $n \cdot h$ asperități și eliberează tot $n \cdot h$ asperități. Astfel, pierderile de energie prin histerezis, pe unitatea de distanță, corespund pierderilor datorate pătrunderii și ieșirii din pneu a $n \cdot h$ asperități.

Modificînd geometria pneului, astfel ca suprafaţa de contact să aibă forma unui dreptunghi lung şi îngust, rezistenţa la rulare va fi redusă proporţional cu h (fig. 6, *b*). Pe de altă parte, lucrul mecanic elastic total produs de către asperităţi, cînd roata alunecă, este proporţional cu numărul

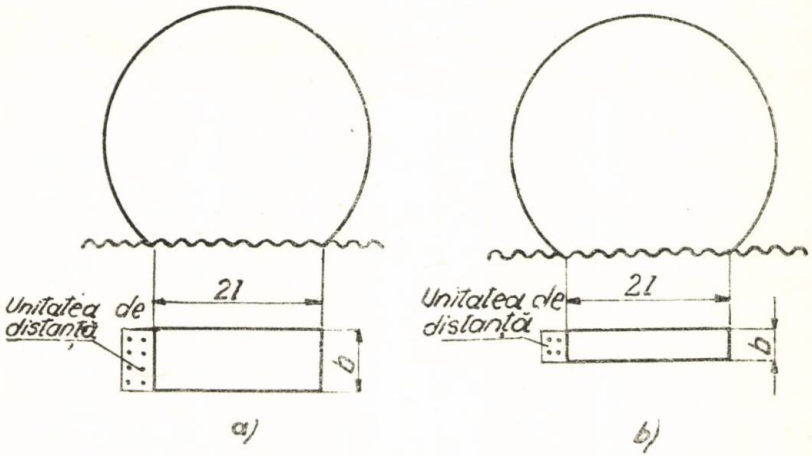


Fig. 6. — Modificarea geometriei pneului pentru micşorarea rezistenţei la rulare.

total de asperităţi n $(2\,l \cdot h)$, astfel că pierderile prin histerezis rămîn ridicate, iar frecarea la rulare poate fi redusă de o mărime apreciabilă.

În concluzie, se poate spune că un pneu cu lăţime şi cu rază de valori mici, va avea o frecare la rulare redusă, iar în timpul alunecării pierderile prin histerezis vor fi apreciabile, astfel încît rezistenţa la alunecare să fie suficientă pentru a nu se produce deraparea automobilelor.

4. FRECAREA DE ADEZIUNE

Ca urmare a deformării pneului, pe suprafaţa de contact dintre pneu şi cale se produc alunecări relative (pseudoalunecare), care generează forţele tangenţiale de frecare τ. Produsul dintre forţele tangenţiale de frecare şi suprafaţa de contact determină forţa de frecare de adeziune F_a, care variază diferit, după natura şi starea drumului (cale perfect netedă, cale rugoasă uscată şi cale rugoasă umedă).

4.1. *Variaţia frecării de adeziune pe o cale netedă.* J. Archard [1] a arătat, în 1961, că dacă contactul se produce între un corp sferic sau cilindric şi o suprafaţă plană netedă, corpul deformîndu-se elastic, suprafaţa de contact (potrivit ecuaţiilor lui Hertz) este proporţională cu sarcina la puterea n (unde $n < 1$).

Dacă se consideră pneul ca un corp cilindric, suprafaţa de contact pneu-cale S va fi un dreptunghi, avînd următoarea expresie:

$$S = k_3 \cdot G_r^{1/2} \cdot r_0^{1/2} \cdot h^{1/2}, \tag{24}$$

în care

k_3 este constanta de elasticitate (constanta lui Hertz).

$$k_3 = 4\sqrt{\frac{8}{\pi}\left(\frac{1-\mu_c^2}{E_c}\right)} = 3{,}6\left(\frac{1-\mu_c^2}{E_c}\right)^{1/2}.$$

J. Bowden [2], încă din 1935, considera că forța de frecare de aderiune F_a este proporțională cu suprafața de contact aparentă S:

$$F_a = \tau \cdot S, \tag{25}$$

în care

τ este forța tangențială specifică pe unitatea de suprafață de contact.

Forța tangențială specifică se poate determina folosind relația dedusă experimental de V. Kraghelski [3]:

$$\tau = \alpha + \beta \cdot p = \alpha + \beta \frac{G_r}{S}, \tag{26}$$

în care

α este o constantă de frecare (subunitară), în kgf/cm²,

β — o constantă (subunitară),

p — presiunea specifică, în kgf/cm².

Introducînd valoarea lui τ din relația (26) în relația (25) se obține ecuația generalizată a forței de frecare de aderiune:

$$F'_a = \alpha \cdot S + \beta \cdot G_r. \tag{27}$$

Dacă în relația (27) se înlocuiește S cu expresia sa din relația (23), rezultă

$$F'_a = \alpha_1 \cdot k_3 (G_r \cdot r_0 \cdot h)^{1/2} + \beta \cdot G_r. \tag{28}$$

Coeficientul de aderiune are expresia

$$f'_a = \frac{F_a}{G_r} = \alpha \cdot k_3 \left(\frac{r_0 \cdot h}{G_r}\right)^{1/2} + \beta. \tag{29}$$

Din relația (29) se observă că valoarea coeficientului de frecare de aderiune crește cu mărirea razei libere și a lățimii suprafeței de contact și scade cu mărirea sarcinii, adică invers față de variația coeficientului de frecare de histerezis.

Dacă între pneu și cale intervine un strat de apă, frecarea de aderiune dispare, deoarece pe suprafața de contact nu se mai produc forțe tangențiale ($\tau = 0$). În acest caz, la viteze mari de deplasare ale automobilului, stratul de apă va produce efectul de pană sub pneu, încît acesta va „pluti" pe suprafața stratului de apă, fenomen cunoscut sub denumirea de *aquaplanare*.

4.3. *Variaţia frecării de adeziune pe o cale rugoasă uscată.* J. Bowden consideră că valoarea forţei de frecare de adeziune pe o cale rugoasă (cu asperităţi), rezultă din însumarea forţelor de frecare ce apar în punctele de contact:

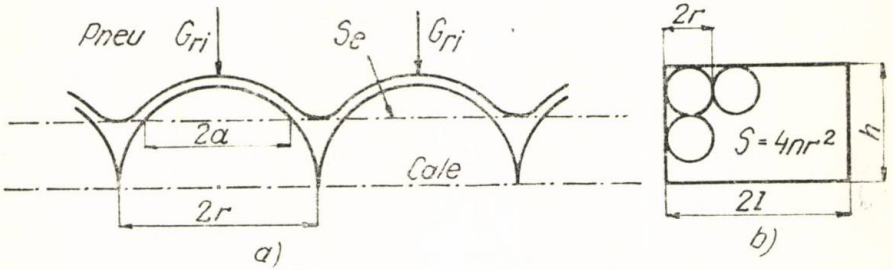


Fig. 7. — Suprafaţa de contact pneu-cale, în cazul unei căi rugoase uscate.

$$F_a'' = \tau \sum_{n=1}^{n} (dS_e) = \tau \cdot S_e, \tag{30}$$

în care

τ este forţa tangenţială specifică pe unitatea de suprafaţă de contact,
S_e — suprafaţa efectivă de contact,
n — numărul punctelor de contact (asperităţi).

Dacă se consideră un pneu încărcat cu sarcina G_r rulînd pe o cale cu asperităţi semisferice de rază r (fig. 7, *a*) va rezulta, pentru fiecare asperitate, o suprafaţă de contact cu pneul de forma unui cerc de rază a. Pe suprafaţa de contact pneu-cale se consideră că sînt n asperităţi uniform repartizate.

Sarcina suportată de fiecare asperitate G_{ri} este

$$G_{ri} = \frac{G_r}{n}. \tag{31}$$

După legea lui Hertz, raza suprafeţei de contact a, care rezultă pe o asperitate, are expresia

$$a = k_4 \cdot G_{ri}^{1/3} \cdot r^{1/3} = k_4 \left(\frac{(G_r \cdot r}{n} \right)^{1/3}, \tag{32}$$

în care

k_4 este constanta de elasticitate (constanta lui Hertz), avînd valoarea

$$k_4 = \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1 - \mu_c^2}{E_c} \right)^{1/3} = 1{,}15 \left(\frac{1 - \mu_c^2}{E_c} \right)^{1/3}.$$

Suprafaţa de contact efectivă S_e dintre pneu şi asperităţi are expresia

$$S_e = n \cdot \pi \cdot a^2 = \pi \cdot k_4^2 \cdot G_r^{2/3} (n \cdot r^2)^{1/3}. \tag{33}$$

Suprafața aparentă de contact pneu-cale S (fig. 7, *b*), adică suprafața de contact, are expresia

$$S = n(4r^2) = 4\, n \cdot r^2. \tag{34}$$

Dacă se ține seama de relația (33), relația (34) are expresia

$$S_e = k_5 \cdot G_r^{2/3} \cdot S^{1/3},$$

în care

$$k_5 = 4^{-1/3} \cdot k_4^2 = 0{,}83 \left(\frac{1 - \mu_c^2}{E_c}\right)^{2/3}. \tag{35}$$

Din relația (35) se observă că suprafața efectivă de contact S_e nu depinde de rugozitatea căii, ci numai de sarcina G_r și de suprafața aparentă de contact S.

În acest caz, expresia forței de frecare de adeziune F_a'' va fi

$$F_a'' = \alpha \cdot S_e + \beta \cdot G_r = \alpha \cdot k_5 \cdot G_r^{2/3} S^{1/3} + \beta \cdot G_r. \tag{36}$$

Coeficientul de frecare de adeziune corespunzător va fi:

$$f_a'' = \frac{F_a''}{G_r} = \alpha \cdot k_5 \left(\frac{S}{G_r}\right)^{1/3} + \beta. \tag{37}$$

Din relația (37) se observă că valoarea coeficientului de frecare de adeziune nu depinde de rugozitatea căii, însă ea este mai mică decît în cazul căilor perfect netede.

Prin urmare se poate scrie inegalitatea

$$f_a'' < f_a'.$$

Expresiile coeficientului total de frecare f, în cele două cazuri — căi uscate netede și căi uscate rugoase — sînt următoarele:

a) pe căi uscate netede:

$$f' = f_h' + f_a' = \left(\frac{1 - \mu_c^2}{E_c}\right)^{1/2} \left[0{,}34\, \delta_e \left(\frac{G_r}{r_0 \cdot h}\right)^{1/2} + 3{,}6\alpha \left(\frac{r_0 \cdot h}{G_r}\right)^{1/2}\right] + \beta. \tag{38}$$

b) pe căi uscate rugoase:

$$f'' = f_h'' + f_a'' = \left(\frac{1 - \mu_c}{E_c}\right)^{5/6} \left[0{,}9\ \delta_e\, n^{1/3} \cdot r^{2/3} \left(\frac{G_r}{r_0 \cdot h}\right)^{5/6} + \right.$$

$$\left. + 1{,}25\ \alpha \left(\frac{r_0 \cdot h}{G_r}\right)^{1/6}\right] + \beta. \tag{39}$$

Din cercetarea expresiilor (38) şi (39) se deduce că coeficientul total de frecare este mai mare pe o cale uscată rugoasă decît pe o cale netedă uscată :

$$'' > f'.$$

4.3. *Variaţia frecării de adeziune pe căi cu suprafaţă rugoasă şi umedă.* În acest caz pneul se va sprijini atît pe suprafaţa de contact cu asperităţile S'_e, cît şi pe suprafaţa apei interstiţiale S_a, supusă la presiune p_a (fig. 8). În această situaţie, suprafaţa de contact cu asperităţile S'_e va fi mai mică decît în cazul precedent şi prin urmare forţa de frecare de adeziune şi coeficientul de frecare de adeziune vor avea o valoare mai redusă.

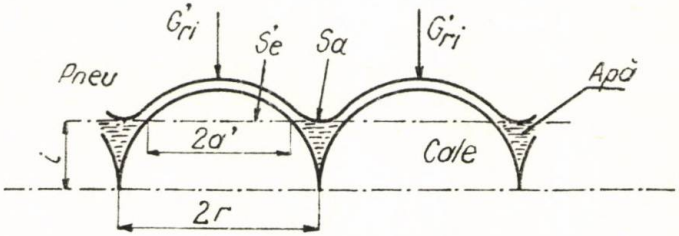


Fig. 8. — Suprafaţa de contact pneu-cale, în cazul unei căi rugoase umede.

Prin urmare, se pot scrie următoarele ecuaţii de echilibru :

$$\begin{aligned} S'_e + S_a &= S, \\ n \cdot G'_{ri} + p_a \cdot S_a &= G_r. \end{aligned} \tag{40}$$

Suprafaţa de contact cu asperităţile S'_e se poate exprima prin relaţia

$$S'_e = n \cdot \pi (a')^2 = k_6 \cdot r^{2/3} (G'_{ri})^{2/3}, \tag{41}$$

în care

a' este raza suprafeţei de contact pneu-asperitate, în cazul unei căi cu suprafaţă rugoasă şi umedă,

G'_{ri} — sarcina ce revine unei asperităţi, în cazul unei căi cu suprafaţa rugoasă şi umedă,

r — raza unei asperităţi,

k_6 — constanta de elasticitate (constanta lui Hertz).

Sistemul de ecuaţii (40) se poate scrie acum sub forma :

$$\begin{aligned} k_6 \cdot r^{2/3} (G'_{ri})^{2/3} + S_a &= S, \\ n \cdot G'_{ri} + p_a \cdot S_a &= G_r. \end{aligned} \tag{42}$$

Acest sistem conţinînd două ecuaţii cu trei necunoscute, G'_{ri}, S_a şi p_a, nu poate fi determinat decît considerînd o a treia condiţie. Aceasta s-ar putea obţine dacă înălţimea apei interstiţiale i s-ar considera cunoscută. În acest caz, suprafaţa de contact cu asperităţile S'_e este determinată, avînd valoarea

$$S'_e = \pi \cdot n (r^2 - i^2). \tag{43}$$

Din relația (42) se poate desprinde observația că dacă înălțimea apei interstițiale i este mai mare decît raza asperităților r, pneul se va sprijini numai pe suprafața apei ($S'_e = 0$) și va apare fenomenul de aquaplanare.

Se deduce că înălțimea asperităților căii (rugozitatea) trebuie să aibă o valoare determinată, astfel ca la viteze mari ale automobilului să nu se producă fenomenul de aquaplanare.

5. RELAȚIA DINTRE RUGOZITATE ȘI VITEZA AUTOMOBILULUI

În cazul unei căi rugoase, cantitatea de apă expulzată de pneu de pe suprafața de contact în unitatea de timp (debitul de apă) este proporțională cu viteza de deplasare V a automobilului.

Debitul de apă expulzat s-ar putea determina presupunînd că spațiile dintre pneu și asperitățile căii formează o rețea de canale. În această ipoteză se poate aplica legea lui Darcy asupra circulației apei printr-o rețea de canale:

$$v = \frac{Q}{A} = k \cdot I, \tag{44}$$

în care

v este viteza de scurgere a apei, în cm/s,
k — coeficient de permeabilitate, în cm/s,
I — gradient hidraulic (adimensional),
Q — debitul de apă scurs, în cm^3/s,
A — suprafața secțiunii transversale prin rețeaua de canale, în cm^2.

Coeficientul de permeabilitate k are următoarea expresie:

$$k = a\frac{d^2}{\eta} = b\frac{r^2}{\eta}, \tag{45}$$

în care

a și b sînt coeficienți de proporționalitate,
d, r — diametrul, respectiv raza canalelor, în cm,
η — viscozitatea dinamică a apei, în kgf.s/m^2.

În baza relației (45), viteza de scurgere este proporțională cu $\frac{r^2}{\eta}$.

Pe de altă parte, suprafața secțiunii transversale A este proporțională cu r, astfel că debitul de apă scurs, conform relației (42), este proporțional cu $\frac{r^3}{\eta}$, și, prin urmare, avînd în vedere proporționalitatea între viteză și debit, se poate scrie următoarea ecuație între rugozitatea r și viteza automobilului V:

$$r^3 = c \cdot \eta \cdot V, \tag{46}$$

în care

c este un coeficient de proporţionalitate,

V — viteza automobilului, în km/h.

Importanţa acestei relaţii este evidentă. Asperităţile şoselelor în timpul exploatării se polizează (uzează), prin urmare rugozitatea scade, deci, şi aderenţa. În aceste condiţii, pentru a avea un anumit coeficient de aderenţă, care să confere siguranţă circulaţiei rutiere, viteza de deplasare a automobilelor trebuie să se reducă. Mărimea acestei viteze se poate deduce din relaţia (46), căpătînd expresia

$$V_2 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 V_1, \tag{47}$$

în care

V_2 este viteza de deplasare a automobilului după uzarea căii,

r_2 — rugozitatea căii uzate (mult circulate);

r_1 — rugozitatea căii imediat după construire;

V_1 — viteza maximă de deplasare a automobilului înainte de uzarea căii.

Prin urmare, se impune — ca la anumite intervale de timp — rugozitatea căii să fie măsurată, pentru a se stabili viteza maximă admisibilă de mers, pentru siguranţa circulaţiei rutiere.

CONCLUZII

Aderenţa dintre pneuri şi şosele este influenţată direct de frecarea de histerezis şi de frecare de adeziune.

Frecarea de histerezis este mult mai mare pe o şosea rugoasă decît pe o şosea netedă, în timp ce frecarea de adeziune este mai mică pe o şosea rugoasă şi mai mare pe o şosea netedă. Deoarece creşterea frecării de histerezis, pe o şosea rugoasă, este mai mare decît scăderea frecării de adeziune, pe aceeaşi şosea, frecarea totală va creşte. Prin urmare, pe şoselele cu suprafeţe rugoase, aderenţa automobilului va fi mai mare decît pe şoselele cu suprafeţe netede.

Pe şoselele umede frecarea de adeziune dispare aproape complet, rămînînd doar frecarea de histerezis, astfel că pe aceste şosele aderenţa automobilului scade foarte mult, mărindu-se pericolul de accidente prin derapare.

Din momentul construcţiei, textura suprafeţelor rutiere, şi în consecinţă şi aderenţa lor, este susceptibilă de a suferi schimbări continui datorită *polizării*, ca efect al uzurii. De aici rezultă necesitatea de a se stabili un coeficient de frecare minimal, care să fie depăşit de toate suprafeţele şoselelor în momentul punerii în exploatare, şi un alt coeficient de frecare după o anumită perioadă de exploatare.

Creşterea valorii aderenţei automobilelor se poate obţine printr-o rugozitate corespunzătoare (asperităţi de dimensiuni 2 — 4 mm) şi printr-o bună distribuţie a asperităţilor.

Primită la redacţie la 6 noiembrie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. ARCHARD, J. F., *Single Contacts and Multiple Encounters*, Journ. of Appl. Physics, 32, *8*, 1961.
2. BOWDEN, F. P., *The Friction and Lubrication of Solids*, Part. II, Oxford, 1964.
3. KRAGHELSKI, V. I., *Trenie i iznos, Maşinghiz*, Moskva, 1962.
4. KUMMER, H. W., *New theory permits better frictional coupling between tire and road*, FISITA, 1966.
5. LUCAS I., *Étude de synthése sur la glissance des chaussées*, Bulletin de liaison des laboratoires routiers, ponts et chaussées, Paris, novembre, 1966.
6. TABOR, D., *Le frottement du caouchouc sur des surface lubrifiées*. Revue génerale du caouchouc, *10* (1959).

STABILITATEA ELASTICĂ A CUPOLELOR PE CONTUR PĂTRAT

de VICTOR GIONCU

Institutul politehnic „Traian Vuia" Timişoara

Se determină încărcarea critică de voalare a cupolelor de beton armat, luînd în considerare toţi factorii care intervin, precum: forma de voalare, influenţa rigidităţii la torsiune a elementelor marginale, influenţa distribuţiei solicitărilor, influenţa deplasărilor datorite alungirii tiranţilor, influenţa imperfecţiunilor de formă şi neomogenităţii materialului.

1. INTRODUCERE

Tendinţele actuale de continuă creştere a deschiderilor şi de scădere a grosimii plăcilor curbe subţiri impun o atenţie sporită fenomenelor de pierdere a stabilităţii. Cele mai importante rezultate s-au obţinut în studiul stabilităţii cilindrilor şi a sferelor complete; cercetările în domeniul suprafeţelor de translaţie şi a cupolelor decupate cu planuri verticale sînt mult mai reduse şi recomandările existente în literatură de a se folosi rezultatele de la sferele complete nu sînt confirmate de rezultatele experimentale. De aceea în lucrarea de faţă s-a căutat să se stabilească o metodă de calcul care să ţină seamă de principalii factori care influenţează pierderea stabilităţii.

2. PROBLEMELE CALCULULUI LA STABILITATE AL CUPOLELOR PE CONTUR PĂTRAT

Pierderea stabilităţii cupolelor pe contur pătrat (fig. 1*a*) se poate produce printr-o voalare simetrică sau nesimetrică a întregii suprafeţe mediane (fig. 1*b*) sau prin voalări locale (fig. 1*c*). În ambele cazuri, deplasările care însoţesc voalările sînt mari şi trebuie folosită teoria neliniară a plăcilor curbe subţiri, în care se ţine seamă de efectul deformaţiilor asupra eforturilor. Pentru cazul voalării simetrice, există numeroase studii teoretice (de ex. [1], [2]); cazul voalării nesimetrice este rezolvat

numai pentru suprafețele cilindrice [2], unde se obțin încărcări critice mai mici decît cele prin voalări simetrice. Pentru voalarea locală, nu există în literatură rezolvări corespunzătoare cazului cupolelor pe contur pătrat. Încărcarea critică de voalare a sferelor complete, care se folosește

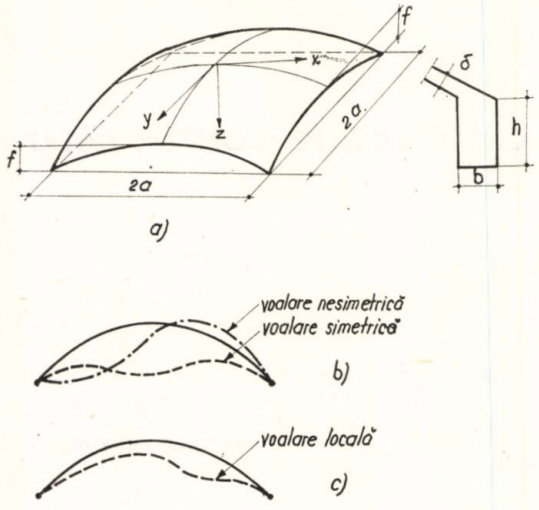


Fig. 1

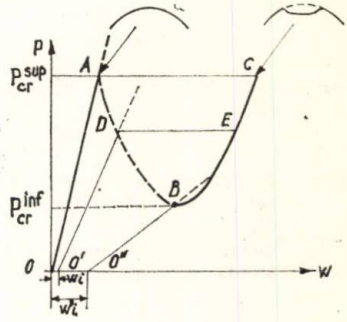


Fig. 2

în mod obișnuit și pentru cupolele pe contur pătrat, este caracterizată de două valori (fig. 2):

— încărcarea critică superioară, determinată din teoria liniară

$$p_{cr}^{sup} = \frac{2}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} E \left(\frac{\delta}{R}\right)^2, \tag{2.1a}$$

— încărcarea critică inferioară, determinată din teoria neliniară a voalării locale

$$p_{cr}^{inf} = cE\left(\frac{\delta}{R}\right)^2, \tag{2.1b}$$

în care

E este modulul de elasticitate;

δ — grosimea plăcii;

R — raza de curbură a plăcii;

c — un coeficient numeric, care variază între 0,24 și 0,36, în funcție de ecuația aleasă pentru suprafața de voalare locală.

Pentru o placă ideală fără imperfecțiuni, încărcarea poate să atingă valoarea (2.1a); în punctul A (fig. 2) se produce o bifurcare nesimetrică și dacă încărcarea rămîne constantă, placa curbă trece dintr-un echilibru

stabil fără voalări într-altul tot stabil, dar voalat (dreapta AC din figura 2), cu o suprafață de voalare practic oglindită față de poziția inițială. Pentru plăci cu imperfecțiuni, dintre care cele mai importante sînt cele geometrice, la încărcare se parcurge dreapta $O'D$, după care se produce saltul echilibrului din D în E la o încărcare critică mult mai mică decît cea a structurii ideale. Există o imperfecțiune care face ca prin curba de încărcare să se ajungă în punctul B, obținîndu-se un punct de bifurcare simetrică stabilă. Rezultă că încărcarea critică poate lua oricare dintre valorile cuprinse între p_{cr}^{sup} și p_{cr}^{inf} în funcție de mărimea imperfecțiunilor și deci determinarea ei ar trebui să se facă prin metode statistice. Există însă multe impedimente care fac ca la plăcile curbe subțiri din beton armat o abordare statistică a problemei stabilității să fie la ora actuală imposibilă și anume: numărul relativ mic de plăci identice (aproape fiecare construcție este un unicat), tehnologii diferite de execuție, dificultăți mari pentru determinarea imperfecțiunilor geometrice la construcții cu deschideri mari etc. De aceea, încărcarea critică inferioară are o importanță deosebită și trebuie să fie aleasă drept limita față de care se raportează încărcarea de calcul.

În mod obișnuit se admite pentru calculele teoretice să se ia drept referință încărcarea critică calculată cu $c = 0{,}30$. Pentru a verifica în ce măsură relația (2.1b) poate fi folosită la calculul cupolelor pe contur dreptunghiular, în figura 3 sau reprezentat valorile obținute prin experimentarea a 44 modele relatate în literatură [4] — [11]; se constată că încercările din [4], [5], [7] confirmă experimental această relație, însă la celelalte s-au obținut diferențe care merg pînă la 80%. Dacă se examinează condițiile în care au fost încercate modelele, se constată că în primul caz marginile lor au fost prinse rigid de instalația de încărcare și astfel au fost practic încastrate; în schimb în celălalt caz, rezemările sînt pe timpane [6], [8], arce cu tiranți [9], [10], [12] sau grinzi cu zăbrele [11]. Astfel, se poate trage concluzia că încărcările critice ale cupolelor pe contur pătrat nu corespund cu cele ale sferelor complete decît în cazul încastrării pe margine; pentru celelalte moduri de rezemare există diferențe considerabile care nu pot fi puse numai pe seama imperfecțiunilor și se datoresc influenței condițiilor de rezemare. În primul rînd, dacă suprafața de voalare atinge marginile plăcii, în fenomenul de pierdere a stabilității intervine și rigiditatea la răsucire a elementelor marginale, care poate să fie mai mică decît cea a plăcii curbe, spre deosebire de cazul sferelor complete, unde rigiditatea este aceeași în orice punct; în [13] s-a arătat că c din relația (2.1b) poate să ia valori cuprinse între 0 și 0,32, în funcție de raportul rigidităților plăcii curbe și elementelor marginale. În al doilea rînd, starea de eforturi din cupola pe contur pătrat este diferită în fiecare punct; compresiunile maxime se obțin la colțurile plăcii și sînt mai mari decît cele ale sferelor complete, la care sînt constante pe întreaga suprafață; la cupolele pe contur pătrat, încastrate pe contur, eforturile de membrană sînt, de asemenea, constante [14], din care cauză în experiențele respective nu au existat diferențe semnificative față de cazul sferelor complete. În al treilea rînd, deplasările verticale care preced voalarea sînt mult mai mari (chiar de 100 ori) decît cele ale sferelor complete din cauza deplasării marginilor, ceea ce produce modificări importante ale razelor de curbură și prin urmare o

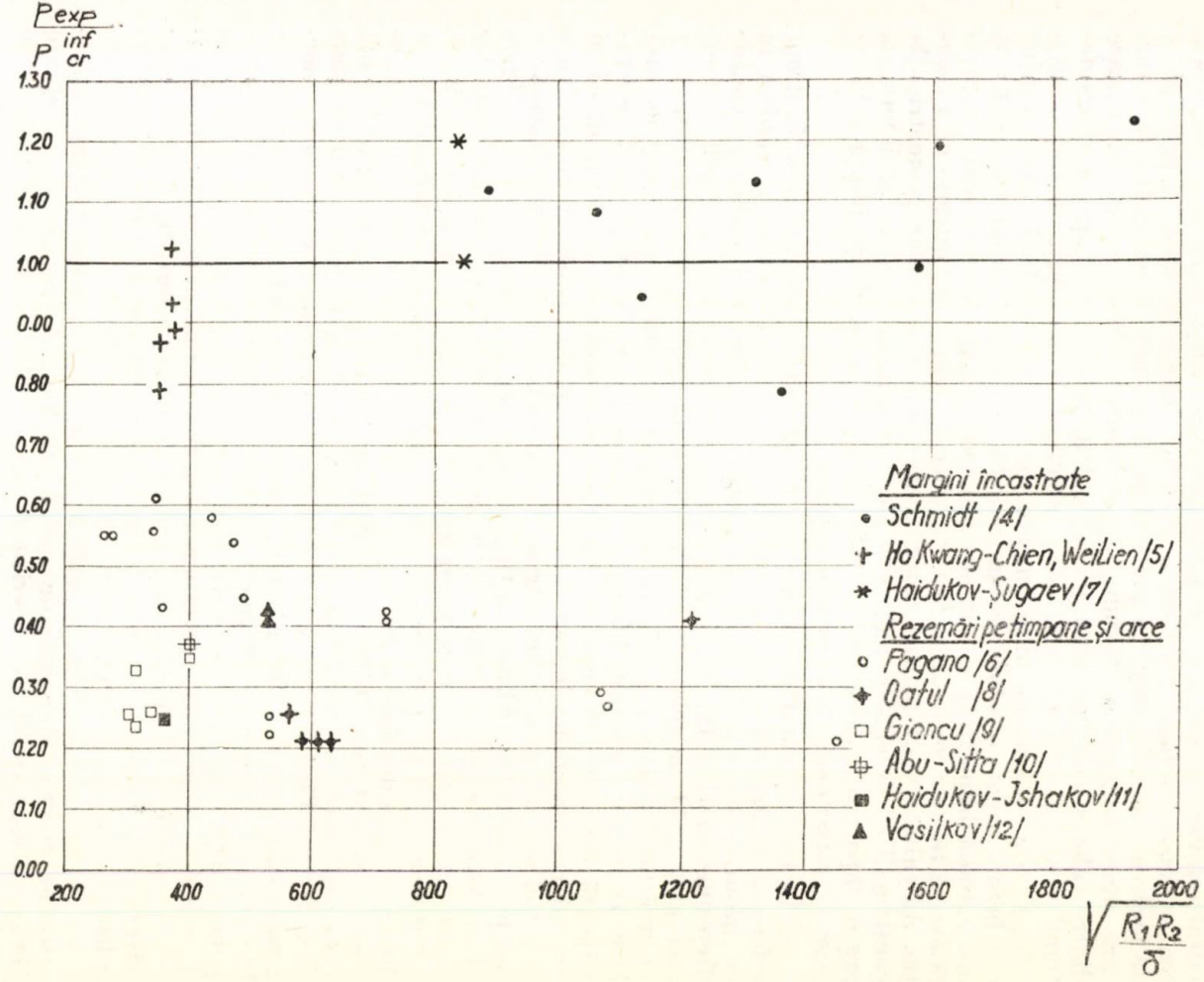

P exp / P inf cr
1.30
1.20
1.10
1.00
0.90
0.80
0.70
0.60
0.50
0.40
0.30
0.20
0.10
0.00
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
√(R1R2/δ)
Margini încastrate
Schmidt /4/
Ho Kwang-Chien, Wei Lien /5/
Haidukov-Sugaev /7/
Rezemări pe timpane și arce
Pagano /6/
Oatul /8/
Gioncu /9/
Abu-Sitta /10/
Haidukov-Jshakov /11/
Vasilkov /12/

Fig. 3

reducere a încărcărilor critice. Dacă se examinează cazurile experimentale relatate în figura 3, se constată că cele mai mari diferenţe faţă de relaţia (2.1b) s-au obţinut la cupolele rezemate pe arce cu tiranţi [9], [10], [12], din cauza rigidităţilor reduse ale acestora la răsucire şi a deformaţiilor mari verticale care se produc din alungirile tiranţilor şi cedările elastice ale arcelor. Diferenţele mari obţinute în cazul experimentărilor din [8] a unor cupole rezemate pe timpane se explică prin faptul că acestea nu au fost continue în colţuri şi au permis deformaţii verticale mari.

3. PIERDEREA STABILITĂŢII PRIN VOALAREA SUPRAFEŢEI ÎNTREGI

Ecuaţiile diferenţiale neliniare ale cupolelor sînt [2]:

$$\frac{1}{R}\nabla^2 F - K\nabla^2\nabla^2 w + p + L(F, w) = 0, \tag{3.1a}$$

$$\frac{1}{E\delta}\nabla^2\nabla^2 F + \frac{1}{R}\nabla^2 w + \frac{1}{2}L(w, w) = 0, \tag{3.1b}$$

în care

F, w sînt necunoscutele problemei, funcţia de eforturi şi deplasarea normală la suprafaţa plăcii;

$$K = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \text{ — rigiditatea la încovoiere a plăcii;} \tag{3.2}$$

$$\nabla^2(A) = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \text{ — operatorul lui Laplace;} \tag{3.3}$$

$$L(A, B) = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 A}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial^2 B}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \tag{3.4}$$

— operatorul teoriei neliniare.

Rezolvarea directă a sistemului de ecuaţii (3.1) este posibilă numai pentru unele cazuri particulare. Astfel, dacă se aleg pentru necunoscute soluţii de forma

$$F = F_1 \cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2a}\,;\quad w = w_1 \cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2a}, \tag{3.5a,b}$$

care respectă condiții de rezemare articulată pe contur, se ajunge la o ecuație de gradul trei [1], [2], [15]:

$$\frac{\pi^2}{18}\left(\frac{w}{\delta}\right)^3 - \frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{f}{\delta}\left(\frac{w}{\delta}\right)^2 + \frac{\pi^2}{4}\left(1+\frac{\pi^4}{192}\cdot\frac{\delta^2}{f^2}\right)\cdot\frac{f^2}{\delta^2}\cdot\frac{w}{\delta} - \frac{pa^4}{E\delta^4} = 0. \tag{3.6}$$

Se constată că termenul $\frac{\pi^4}{192}\cdot\frac{\delta^2}{f^2}$ este mic față de 1 și pentru $\frac{f}{\delta} > 3$, eroarea la acest termen este sub 5%. Astfel, relația (3.6) poate fi scrisă sub forma mai simplă:

$$\frac{\pi^2}{18}\cdot\left(\frac{w}{\delta}\right)^3 - \frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{f}{\delta}\left(\frac{w}{\delta}\right)^2 + \frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{f^2}{\delta^2}\cdot\frac{w}{\delta} - \frac{pa^4}{E\delta^4} = 0. \tag{3.7}$$

Valorile extreme ale încărcărilor se obțin pentru $\frac{\partial p}{\partial\left(\frac{w}{\delta}\right)} = 0$, de unde rezultă ecuația algebrică:

$$\left(\frac{w}{\delta}\right)^2 - 3\,\frac{f}{\delta}\,\frac{w}{\delta} + \frac{3}{2}\cdot\frac{f^2}{\delta^2} = 0, \tag{3.8}$$

cu rădăcinile

$$\frac{w}{\delta} = \frac{3}{2}\left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\frac{f}{\delta}, \tag{3.9}$$

iar încărcările maxime și minime sînt

$$p_{\max,\,\min} = \pm\frac{\pi^2\sqrt{3}}{24}E\,\frac{\delta f^3}{a^4} = \pm\frac{\pi^2\sqrt{3}}{96}E\,\frac{f}{\delta}\left(\frac{\delta}{R}\right)^2, \tag{3.10}$$

în care s-a ținut seamă că

$$R = \frac{a^2}{2f}. \tag{3.11}$$

Dacă se compară încărcarea critică determinată din relația (3.10) cu cea dată de (2.1a), rezultă că

$$\frac{p_{\max}}{p_{cr}^{sup}} \cong \frac{\pi^2}{32}\cdot\frac{f}{\delta} \tag{3.12}$$

şi prin urmare numai pentru

$$\frac{f}{\delta} \leqslant \frac{32}{\pi^2} \cong 3{,}2 \tag{3.13}$$

încărcarea critică neliniară este mai mică decît cea a plăcii curbe ideale; astfel de valori nu se întîlnesc însă în practica construcţiilor şi prin urmare voalările locale dau încărcări critice mai mici decît cele din voalările simetrice cu suprafaţa întreagă a plăcii. În [16] s-a studiat influenţa considerării în calcule a mai mulţi termeni din dezvoltarea în serie a necunoscutelor; s-au obţinut diferenţe de numai 1,87% pentru $p_{\max}$, în cazul a patru termeni de deformaţii simetrice.

Pentru cazul voalării nesimetrice, au fost alese pentru necunoscute funcţii de forma

$$F = F_1 U_1 V_1 + F_2 U_2 V_2, \tag{3.14a}$$

$$w = w_1 U_1 V_1 + w_2 U_2 V_2, \tag{3.14b}$$

în care $U_1\ V_1$ sînt funcţii simetrice, iar $U_2\ V_2$ antisimetrice, care respectă condiţiile de rezemare pe margine. Dacă aceste necunoscute sînt introduse în (3.1) şi se aplică metoda Galerkin, rezultă

$$\iint_D E_1 U_1 V_1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0, \quad \iint_D E_1 U_2 V_2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0, \tag{3.15a,b}$$

$$\iint_D E_2 U_1 V_1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0, \quad \iint_D E_2 U_2 V_2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0, \tag{3.15c,d}$$

în care

$$E_1 = \frac{1}{R}(F_1 \nabla^2 U_1 V_1 + F_2 \nabla^2 U_2 V_2) - K(w_1 \nabla^2 \nabla^2 U_1 V_1 + w_2 \nabla^2 \nabla^2 U_2 V_2) +$$

$$+ p + F_1 w_1 L(U_1 V_1, U_1 V_1) + (F_1 w_2 + F_2 w_1) L(U_1 V_1, U_2 V_2) +$$

$$+ F_2 w_2 L(U_2 V_2, U_2 V_2),$$

$$E_2 = \frac{1}{E\delta}(F_1 \nabla^2 \nabla^2 U_1 V_1 + F_2 \nabla^2 \nabla^2 U_2 V_2) + \frac{1}{R}(w_1 \nabla^2 U_1 V_1 + w_2 \nabla^2 U_2 V_2) +$$

$$+ \frac{1}{2} w_1^2 L(U_1 V_1, U_1 V_1) + w_1 w_2 L(U_1 V_1, U_2 V_2) +$$

$$+ \frac{1}{2} w_2^2 L(U_2 V_2, U_2 V_2). \tag{3.16a,b}$$

Dacă se ţine seamă că funcţiile U_1V_1 sînt simetrice, iar U_2V_2 antisimetrice, o parte din termenii ecuaţiilor (3.15) sînt nuli şi dacă se introduc notaţiile

$$A_1 = \iint_D (\nabla^2\nabla^2 U_1V_1)\, U_1V_1\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{3.17a}$$

$$A_2 = \iint_D (\nabla^2\nabla^2 U_2V_2)\, U_2V_2\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{3.17b}$$

$$B_1 = \iint_D (\nabla^2 U_1V_1)\, U_1V_1\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{3.17c}$$

$$B_2 = \iint_D (\nabla^2 U_2V_2)\, U_2V_2\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{3.17d}$$

$$C = \iint_D U_1V_1\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{3.17e}$$

$$D_1 = \iint_D [L(U_1V_1,\, U_1V_1)]\, U_1V_1\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{3.17f}$$

$$D_2 = \iint_D L[(U_2V_2,\, U_2V_2)]\, U_1V_1\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D L[(U_1V_1,\, U_2V_2)]\, U_2V_2\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{3.17g}$$

se ajunge la sistemul de ecuaţii:

$$KA_1w_1 - \frac{1}{R}B_1F_1 - F_1w_1D_1 - F_2w_2D_2 - Cp = 0, \tag{3.18a}$$

$$KA_2w_2 - \frac{1}{R}B_2F_2 - (F_1w_2 + F_2w_1)D_2 = 0, \tag{3.18b}$$

$$\frac{1}{E\delta}A_1F_1 + \frac{1}{R}B_1w_1 + \frac{1}{2}w_1D_1 + \frac{1}{2}w_2^2D_2 = 0, \tag{3.18c}$$

$$\frac{1}{E\delta}A_2F_2 + \frac{1}{R}B_2w_2 + w_1w_2D_2 = 0. \tag{3.18d}$$

Prin eliminarea necunoscutelor se obține o singură ecuație de gradul 3 :

$$I_1\left(\frac{w_1}{\delta}\right)^3 + I_2\frac{f}{\delta}\left(\frac{w_1}{\delta}\right)^2 + I_3\left(\frac{f}{\delta}\right)^2\frac{w_1}{\delta} + I_4 - \frac{pa^4}{E\delta^4} = 0, \qquad (3.19)$$

în care

$$I_1 = -\,2a^4\frac{A_1}{C}\frac{D_2}{A_2}\left(\frac{D_1}{A_1} + \frac{D_2}{A_2}\right), \qquad (3.20a)$$

$$I_2 = -\,\frac{3a^4}{R\delta}\cdot\frac{A_1}{C}\left(\frac{B_1D_2 + B_2D_1}{A_1A_2} + 2\frac{B_2D_2}{A_2^2}\right), \qquad (3.20b)$$

$$I_3 = -\,\frac{a^4}{R^2\delta^2}\frac{A_1}{C}\left(4\frac{B_1B_2}{A_1A_2} + \frac{B_2^2}{A_1A_2}\cdot\frac{D_1}{D_2} + 6\frac{B_2^2}{A_2^2}\right), \qquad (3.20c)$$

$$I_4 = -\,\frac{a^4}{R^3\delta^3}\frac{A_1}{C}\frac{B_2^2}{A_2^2}\left(\frac{B_1A_2}{A_1D_2} + 2\frac{B_2}{D_2}\right). \qquad (3.20d)$$

Dacă se aleg funcțiile

$$U_1V_1 = \cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2a}\,; \quad U_2V_2 = \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}, \qquad (3.21)$$

care respectă condițiile de simplă rezemare pe contur, relația (3.19) devine

$$-\frac{4\pi^2}{75}\left(\frac{w_1}{\delta}\right)^3 + \frac{11\pi^2}{40}\cdot\frac{f}{\delta}\left(\frac{w_1}{\delta}\right)^2 - \frac{27\pi^2}{64}\left(\frac{f}{\delta}\right)^2\cdot\frac{w_1}{\delta} + \frac{45\pi^2}{256}\cdot\frac{f^3}{\delta^3} - \frac{pa^4}{E\delta^4} = 0. \qquad (3.22)$$

Valorile maxime și minime rezultă pentru

$$\frac{w_1}{\delta} = \frac{5}{32}(11 \pm \sqrt{13})\frac{f}{\delta}, \qquad (3.23)$$

iar încărcările maxime și minime :

$$p_{max} = 0{,}1117\,E\frac{\delta f^3}{a^4}, \quad p_{min} = -\,0{,}2645\,E\frac{\delta f^3}{a^4}. \qquad (3.24a,b)$$

În figura 4 sînt reprezentate curbele de echilibru (3.7) pentru voalarea simetrică și (3.22) pentru cea nesimetrică. Se constată că cele două

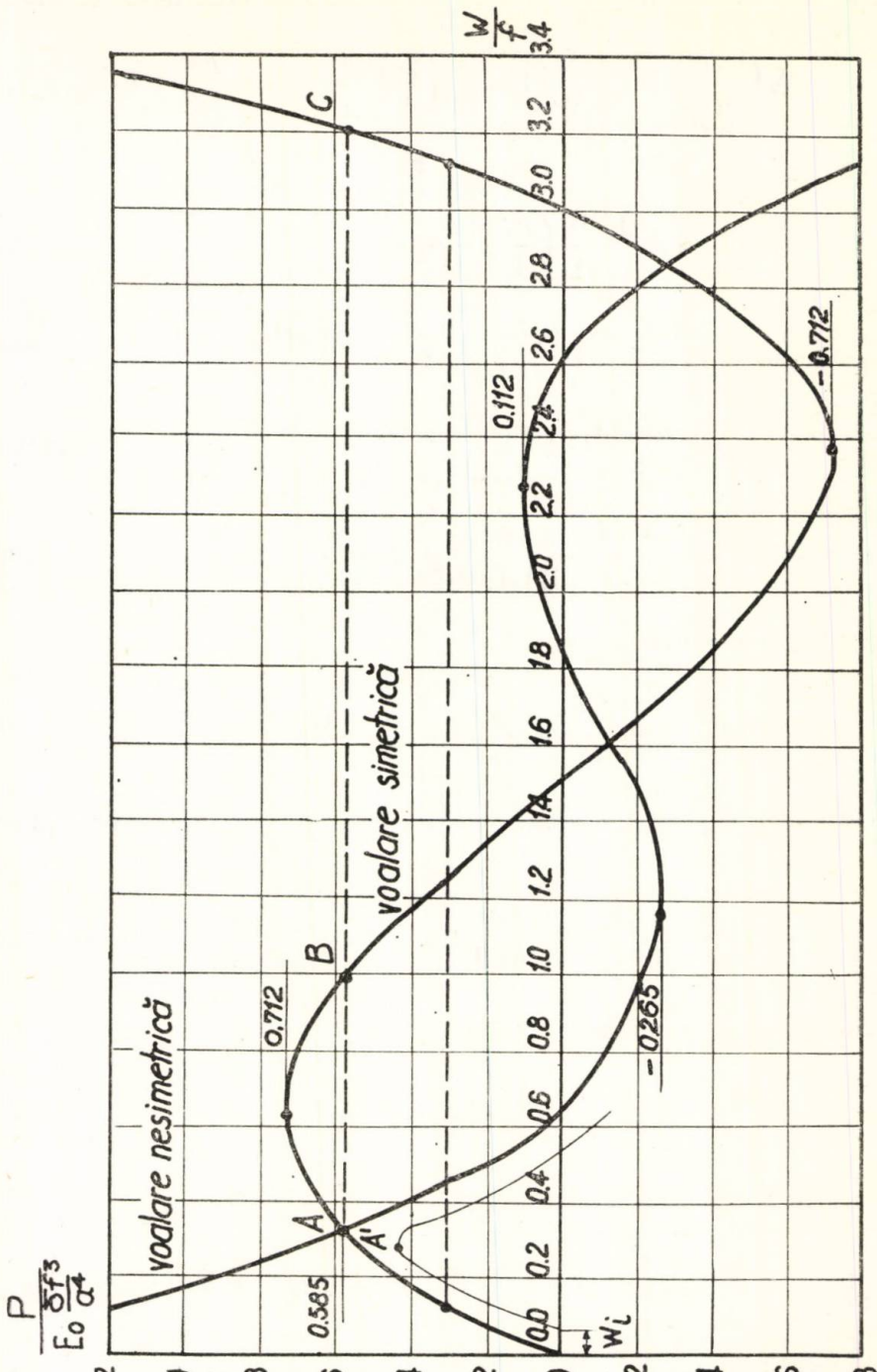

P / E₀ δ f³ / α⁴
voalare nesimetrică
voalare simetrică
A
A'
B
C
0.712
0.585
0.112
-0.265
-0.712
wᵢ
W / f
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
2.2
2.4
2.6
2.8
3.0
3.2
3.4

Fig. 4

curbe se intersectează în punctul A, care este un punct de bifurcare nesimetrică și încărcarea critică se reduce la

$$p_{cr}^{nesim} = 0{,}585\, E\frac{f^3\delta}{a^4} = 0{,}146\, E\frac{f}{\delta}\left(\frac{\delta}{R}\right)^2. \tag{3.25}$$

Prin urmare, deformațiile simetrice ale plăcii se transformă brusc în deformații nesimetrice în punctul A. Dacă încărcările scad, se parcurge ramura deformațiilor nesimetrice; dacă însă încărcările rămîn constante, se va produce un salt pînă în punctul B de pe ramura labilă și apoi în punctul C de pe ramura stabilă a voalării simetrice. Astfel, voalarea plăcii se produce trecînd dintr-o deformație simetrică într-una nesimetrică, pentru ca în final să se ajungă tot la o formă de voalare simetrică. Încărcarea critică nesimetrică p_{cr}^{nesim} este mai mică decît cea dată de relația (2.1a) numai pentru $\frac{f}{\delta} \leqslant 4$, domeniu neinteresant pentru practica construcțiilor.

Din cele arătate mai sus rezultă că pentru cazurile curente, încărcările critice care se produc cu antrenarea suprafeței întregi sînt mai mari decît cele ale voalării prin suprafețe locale ale plăcilor curbe subțiri ideale. Curbele de echilibru din figura 4 sînt însă interesante pentru că pot bine caracteriza (așa cum se va arăta la punctul 5.3) comportarea post-critică a plăcii curbe.

4. PIERDEREA STABILITĂȚII PRIN VOALĂRI LOCALE

Deoarece o abordare exactă a problemei este foarte dificilă, pentru determinarea încărcărilor critice de voalare locală a cupolelor pe contur pătrat s-a păstrat tot relația (2.1b), avînd în vedere asemănarea fenomenelor, dar afectată de coeficienți care țin seamă de diferențele de comportare.

4.1. INFLUENȚA RIGIDITĂȚII LA RĂSUCIRE A ELEMENTELOR MARGINALE

Pentru cupolele sferice pe contur circular cu marginile încastrate, articulate fix sau mobil, cercetările experimentale din [17], au arătat că există o dependență clară între condițiile de rezemare, poziția suprafeței de voalare și încărcarea critică (fig. 5). În [13] s-a studiat influența rigidității la răsucire a grinzilor marginale asupra încărcării critice a cupolelor sferice pe contur circular, arătîndu-se că suprafața de voalare se poate forma la margini sau la centrul plăcii în funcție de factorul

$$\alpha = \frac{2}{1 + \left|\frac{\theta_G}{\theta_p}\right|}, \tag{4.1}$$

în care $|\theta_G/\theta_p|$ este raportul, în valoare absolută, dintre rotirile grinzilor marginale și a plăcii, dintr-un moment unitar. Se obțin următoarele valori pentru cazurile particulare (fig. 6):

— cînd grinda marginală este foarte rigidă în raport cu placa, rotirea ei fiind practic nulă, $\alpha = 2$, și voalarea nu afectează elementul de margine (fig. 6a);

— cînd rotirile grinzii marginale și plăcii sînt egale, $\alpha = 1$, și voalarea poate să se producă sau la margini, sau la centrul plăcii (fig. 6b);

— cînd grinda nu are rigiditate la răsucire, $\alpha = 0$, și voalarea se produce la margini (fig. 6c).

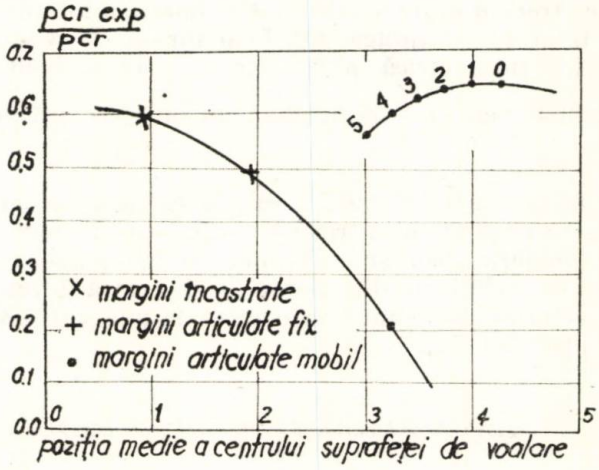


Fig. 5

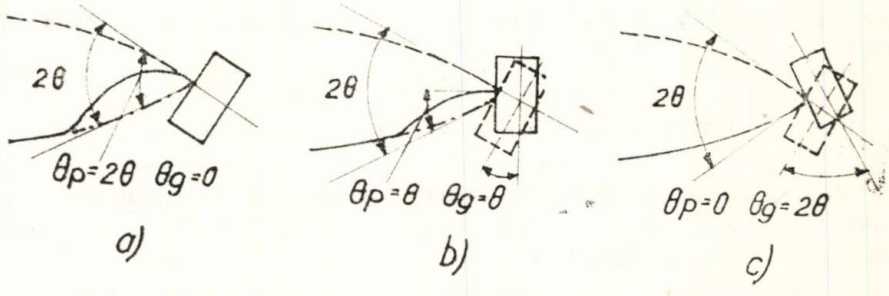


Fig. 6

În [13] s-au calculat încărcările critice în funcție de α; se constată din figura 7 o scădere apreciabilă a acestora. Coeficientul c din relația (2.1b) rezultă de $c \cong 0{,}32$ pentru $\alpha = 2$, $c \cong 0{,}18$ pentru $\alpha = 1$ și $c \cong 0{,}08$ pentru $\alpha = 0{,}5$. Se constată că valoarea $c = 0{,}30$ rezultată din alte calcule teoretice corespunde practic cu cea pentru $\alpha = 2$. Dacă se ia această

valoare drept bază și pentru alte valori ale lui α, încărcarea critică se determină din relația

$$p_{cr\alpha} = c_\alpha p_{cr}. \tag{4.2}$$

Cu ajutorul diagramelor din figura 7, în figura 8 s-a trasat coeficientul c_α în funcție de α; se constată o variație practic liniară și în mod aproximativ se poate scrie relația

$$c_\alpha = 0{,}12 + 0{,}44\,\alpha. \tag{4.3a}$$

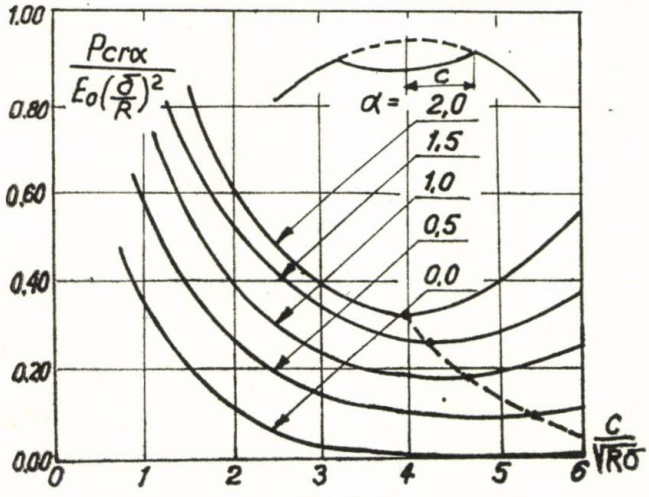


Fig. 7

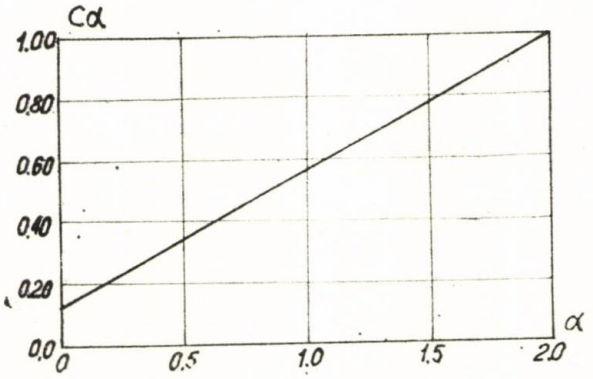


Fig. 8

Deoarece la centrul plăcii, $\alpha = 1$, rezultă

$$c_\alpha \leqslant 0{,}56. \tag{4.3b}$$

Coeficientul α este dat în [13] pentru cazul cupolelor pe contur circular; pentru cupolele rezemate pe arce, pot fi folosite relațiile (4.2) și (4.3), dar trebuie determinați coeficienții α corespunzători. Dacă se aplică pe margini un moment de încovoiere (fig. 9).

$$M_x = m \cos \frac{\pi y}{2a}, \tag{4.4}$$

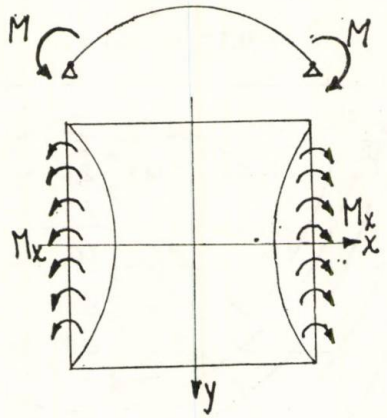


Fig. 9

rotirea arcului se compune din cea de răsucire de pe latura $x = a$ și cea de colț, din încovoierea arcului adiacent. Deoarece

$$M_x = - GI_r \frac{\mathrm{d}^2 \theta_G}{\mathrm{d}y^2}, \tag{4.5}$$

în care GI_r este rigiditatea la răsucire a arcelor, rezultă

$$\frac{\mathrm{d}^2 \theta_G}{\mathrm{d}y^2} = - \frac{m}{GI_r} \cos \frac{\pi y}{2a} \tag{4.6}$$

și prin integrare

$$\theta_G = \frac{4a^2}{\pi^2} \frac{m}{GI_r} \cos \frac{\pi y}{2a} + C_1 y + C_2, \tag{4.7}$$

C_1 și C_2 fiind constante de integrare. Pentru că θ_G este simetrică în raport cu y, $C_1 = 0$; C_2 se determină din rotirea arcului pe reazeme

$$\theta_{G(y=a)} = \frac{M \cdot 2a}{2EI} = \frac{\int_0^a M_x \, \mathrm{d}y \cdot 2a}{2EI} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{ma^2}{EI}, \tag{4.7a}$$

EI fiind rigiditatea la încovoiere a arcelor marginale și prin urmare

$$\theta_G = \frac{4a^2}{\pi^2}\frac{m}{GI_r}\cos\frac{\pi y}{2a} + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{ma^2}{EI}. \tag{4.8}$$

La mijlocul deschiderii rezultă

$$\theta_G = \frac{4}{\pi^2}\frac{ma^2}{GI_r}\left(1 + \frac{\pi^2}{2}\frac{G}{E}\cdot\frac{I_r}{I}\right). \tag{4.9}$$

Pentru rotirea plăcii dintr-un moment de încovoiere marginal se folosesc relațiile din [18]. Dacă în această fază se admite că reazemele sînt perfect rigide în planul lor și perfect elastice în plan perpendicular, ecuația de rezolvare a problemei este

$$\nabla^2\nabla^2 w + \frac{E\delta}{KR^2}w = 0, \tag{4.10}$$

cu soluția pentru cazul încărcărilor simetrice

$$w = (C_1\varnothing_1 + C_2\varnothing_2)\cos\frac{\pi y}{2a}, \tag{4.11}$$

în care

$$\varnothing_1 = \operatorname{ch}\frac{\pi\varkappa}{2a}x\cos\frac{\pi\varkappa}{2a}x, \quad \varnothing_2 = \operatorname{sh}\frac{\pi\varkappa}{2a}x\sin\frac{\pi\varkappa}{2a}x \tag{4.12a,b}$$

și

$$\varkappa = \frac{2}{\pi}\sqrt[4]{3}\sqrt{\frac{f}{\delta}}. \tag{4.13}$$

În aceste relații s-a ținut seamă de observația din [18], care simplifică considerabil problema și anume că rădăcinile ecuației rezolvente a ecuației diferențiale (4.10) au valori practic egale. Din condițiile de margine pentru $x = a$, $w = 0$ și $-K\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = M_x$, rezultă constantele de integrare:

$$C_1 = \frac{2}{\pi^2}\frac{ma^2}{\varkappa^2 K}\frac{\bar{\varnothing}_2}{\bar{\varnothing}_1 + \bar{\varnothing}_2}; \quad C_2 = -\frac{2}{\pi^2}\frac{ma^2}{\varkappa^2 K}\frac{\bar{\varnothing}_1}{\bar{\varnothing}_1 + \bar{\varnothing}_2}, \tag{4.14a,b}$$

$\bar{\Theta}_1$ și $\bar{\Theta}_2$ fiind date de relațiile (4.12) pentru $x = a$. Din (4.11) și [18], rotirea la mijlocul deschiderii va fi

$$\theta_p = \frac{\pi\varkappa}{2a}[C_1(\bar{\Theta}_4 - \bar{\Theta}_3) + C_2(\bar{\Theta}_3 + \bar{\Theta}_4)], \tag{4.15}$$

în care

$$\bar{\Theta}_3 = \operatorname{ch}\frac{\pi\varkappa}{2}\sin\frac{\pi\varkappa}{2}, \quad \bar{\Theta}_4 = \operatorname{sh}\frac{\pi\varkappa}{2}\cos\frac{\pi\varkappa}{2}. \tag{4.16a,b}$$

Introducînd în (4.15) constantele de integrare (4.14) rezultă

$$\theta_p = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{ma}{\varkappa K}\,\frac{\bar{\Theta}_2(\bar{\Theta}_4 - \bar{\Theta}_3) - \bar{\Theta}_1(\bar{\Theta}_3 + \bar{\Theta}_4)}{\bar{\Theta}_1^2 + \bar{\Theta}_2^2}. \tag{4.17}$$

Ținînd seamă că

$$\frac{\pi}{2}\varkappa = \sqrt[4]{3}\sqrt{\frac{f}{\delta}} = 1{,}3161\sqrt{\frac{f}{\delta}} \cong 5 \ldots 10$$

deoarece $\frac{f}{\delta}$ variază practic între 20 și 60, rezultă că

$$\operatorname{ch}\frac{\pi\varkappa}{2} = \operatorname{sh}\frac{\pi\varkappa}{2} = 75 \ldots 11.000$$

și expresiile din relația (4.17) pot fi scrise

$$\bar{\Theta}_1 + \bar{\Theta}_2 = \operatorname{ch}^2\frac{\pi\varkappa}{2} + \cos^2\frac{\pi\varkappa}{2} - 1 \cong \operatorname{ch}^2\frac{\pi\varkappa}{2},$$

$$\bar{\Theta}_2(\bar{\Theta}_4 - \bar{\Theta}_3) - \bar{\Theta}_1(\bar{\Theta}_3 + \bar{\Theta}_4) = -\operatorname{sh}\frac{\pi\varkappa}{2}\operatorname{ch}\frac{\pi\varkappa}{2} -$$

$$-\sin\frac{\pi\varkappa}{2}\cos\frac{\pi\varkappa}{2} \cong -\operatorname{ch}^2\frac{\pi\varkappa}{2}$$

deoarece funcțiile trigonometrice pot fi neglijate în raport cu cele hiperbolice. Rezultă astfel

$$\theta_p \cong -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{ma}{\varkappa K} = -\frac{1}{2\sqrt[4]{3}}\,\frac{ma}{K\sqrt{\frac{f}{\delta}}} \tag{4.18}$$

și prin urmare

$$\left|\frac{\theta_G}{\theta_p}\right| = \frac{8\sqrt[4]{3}}{\pi^2}\frac{Ka}{GI_r}\sqrt{\frac{f}{\delta}}\left(1+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{GI_r}{EI}\right) = 1{,}065\,\frac{1}{I_r^*}\sqrt{\frac{f}{\delta}}\left(1+1{,}5708\,\frac{I_r^*}{I^*}\right), \tag{4.19}$$

în care s-au introdus notațiile:

$$I_r^* = \frac{GI_r}{Ka}, \quad I^* = \frac{EI}{Ka}. \tag{4.20 a,b}$$

Avînd în vedere aproximațiile făcute în calcule, relația (4.19) poate fi scrisă sub o formă mai simplă

$$\left|\frac{\theta_G}{\theta_p}\right| = \left(\frac{1}{I_r^*}+\frac{1{,}6}{I^*}\right)\sqrt{\frac{f}{\delta}}, \tag{4.21}$$

care, introdusă în (4.1), ne oferă relația

$$\alpha = \frac{2}{1+\left(\frac{1}{I_r^*}+\frac{1{,}6}{I^*}\right)\sqrt{\frac{f}{\delta}}}. \tag{4.22}$$

Așa cum am arătat mai înainte, dacă $\alpha > 1$, marginile sînt mai rigide decît restul plăcii și pierderea stabilității se produce spre centrul plăcii. Pentru $\alpha < 1$, marginile sînt mai slabe și suprafața de voalare va antrena și arcele marginale.

4.2. INFLUENȚA DISTRIBUȚIEI SOLICITĂRILOR

În cazul cupolelor pe contur pătrat, suprafața de voalare poate ocupa următoarele poziții:

a) în centrul plăcii, centrul ei corespunzînd cu cel al suprafeței de voalare (fig. 10*a*),

b) atinge marginea plăcii într-un singur punct (fig. 10*b*),

c) atinge marginea plăcii în două puncte (fig. 10*c*).

Din cauza diferitelor poziții, și distribuția stării de solicitare pe suprafața de voalare este diferită; dacă se admite că suprafața de voalare este circulară, eforturile pot fi exprimate în coordonate polare r și θ. Deoarece acestea pot fi deduse cu o suficientă aproximație din teoria de membrană pentru care există relația

$$N_r + N_0 = -pR, \tag{4.23}$$

se poate scrie că

$$N_r = -\beta(r, \theta)\, pR; \quad N_\theta = -[1 - \beta(r, \theta)]\, pR. \tag{4.24}$$

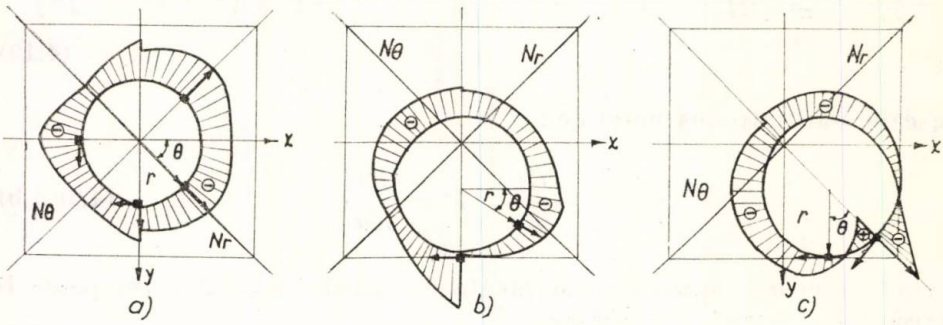


Fig. 10

Pentru cazul *a* din figura 10, $\beta = \frac{1}{2}$, deoarece eforturile sînt practic egale; pentru cazul *b*, în punctul de contact cu marginea, $\beta = 0$; pentru cazul *c*, valoarea maximă $\beta_{max} = 2{,}0$ se produce chiar în colţul plăcii. Prin urmare domeniul de variaţie a lui β este $0 < \beta < 2$; deoarece însă în cazul $\beta = 2$ nu se poate forma suprafaţa de voalare, în funcţie de mărimea acesteia s-a determinat domeniul practic de variaţie

$$0 \leqslant \beta \leqslant 1{,}5.$$

În coordonatele polare, ecuaţiile teoriei neliniare (3.1) devin [2]:

$$K \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\nabla^2 w) - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r} = \psi, \tag{4.25a}$$

$$\frac{1}{E\delta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\nabla^2 F) + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} = 0, \tag{4.25b}$$

în care operatorul lui Laplace are expresia

$$\nabla^2(A) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}\right], \tag{4.26}$$

iar ψ este definit prin relaţia

$$p = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\psi). \tag{4.27}$$

În cele ce urmează se face ipoteza simplificatoare, fără de care problema este (în stadiul actual) nerezolvabilă, că distribuţia solicitărilor este aceeaşi pe întreaga suprafaţa de voalare ca cea din punctul de unde va porni voalarea plăcii. Considerarea în calcule a distribuţiei reale este dificilă, deoarece ar trebui să cunoaştem de la început forma, poziţia şi mărimea suprafeţei de voalare. Această ipoteză este folosită şi la cupolele pe contur circular, la care suprafaţa de voalare are contact cu grinda marginală numai într-un singur punct, dar se admite că rotirea marginii este aceeaşi pe întreg conturul [13].

Deplasările verticale w vor fi

$$w = w_0 + w_1, \tag{4.28}$$

în care w_0 este deplasarea elastică din încărcări [13],

$$w_0 = \frac{p R^2}{2 E \delta} = \frac{p a^4}{8 E f^2 \delta}, \tag{4.29}$$

iar w_1 este deplasarea suprafeţei de voalare [2]

$$w_1 = d\left(1 - \frac{r^2}{c^2}\right)^2, \tag{4.30}$$

în care c este raza acestei suprafeţe, iar d amplitudinea ei (fig. 11); ecuaţia (4.30) respectă condiţiile de margine pentru $r = c (w_1 = 0$ şi $\frac{dw_1}{dr} = 0)$.

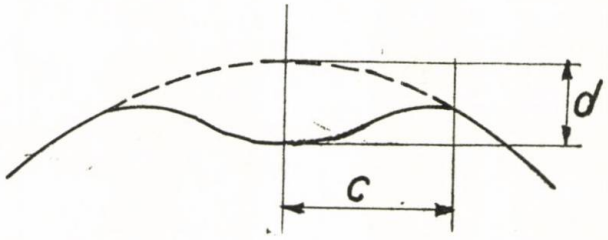


Fig. 11

Din ecuaţia (4.25b) şi ţinînd seamă de condiţiile de margine: $r = c$, $\frac{d^2F}{dr^2} = 0$; $r = 0$, $\frac{dF}{dr} = 0$, rezultă [2]

$$\frac{dF}{dr} = -\frac{E\delta}{R}\frac{cd}{6}\left(4\frac{r}{c} - 3\frac{r^3}{c^3} + \frac{r^5}{c^5}\right) + \frac{E\delta d^2}{6c}\left(5\frac{r}{c} - 6\frac{r^3}{c^3} + 4\frac{r^5}{c^5} - \frac{r^7}{c^7}\right). \tag{4.31}$$

Eforturile unitare vor fi:

$$N_r = \frac{1}{r}\frac{dF}{dr} = -\frac{E\delta d}{6R}\left(4 - 3\frac{r^2}{c^2} + \frac{r^4}{c^4}\right) + \frac{E\delta d^2}{6c^2}\left(5 - 6\frac{r^2}{c^2} + 4\frac{r^4}{c^4} - \frac{r^6}{c^6}\right) - \\ - \beta pR, \tag{4.32a}$$

$$N_\theta = \frac{d^2F}{dr^2} = -\frac{E\delta d}{6R}\left(4 - 9\frac{r^2}{c^2} + 5\frac{r^4}{c^4}\right) + \frac{E\delta d^2}{6c^2}\left(5 - 18\frac{r^2}{c^2} + 20\frac{r^4}{c^4} - \right. \\ \left. - 7\frac{r^6}{c^6}\right) - (1 - \beta)\, pR. \tag{4.32b}$$

Energia potențială W a sistemului se compune din energia potențială de deformație (care este compusă la rîndul ei din cea a eforturilor axiale, W_N, și a momentelor de încovoiere, W_M) și din cea a încărcărilor exterioare W_p:

$$W = W_N + W_M + W_p, \tag{4.33}$$

în care [18]

$$W_N = \frac{1}{2E\delta}\int_0^c \left[(\nabla^2 F)^2 - 2\,\frac{1}{r}\,\frac{dF}{dr}\cdot\frac{d^2F}{dr^2}\right] 2\pi r\, dr, \tag{4.34a}$$

$$W_M = \frac{K}{2}\int_0^c \left[(\nabla^2 w)^2 - 2\,\frac{1}{r}\,\frac{dw}{dr}\cdot\frac{d^2w}{dr^2}\right] 2\pi r\, dr, \tag{4.34b}$$

$$W_p = \int_0^c p\left(\frac{1}{2}\,w_0 + w_1\right) 2\pi r\, dr. \tag{4.34c}$$

Dacă în relațiile (4.34) se introduc relațiile (4.28) și (4.32) și apoi se scrie energia potențială a sistemului, rezultă asemănător cu [2]

$$\overline{W} = \frac{23}{83}\cdot\frac{\xi^4}{k} - \frac{1}{2}\,\xi^3 + \frac{7}{30}\,k\xi^2 + \frac{4}{3}\,\frac{\xi^2}{k} + 6\left(\frac{1}{2} - \beta\right)^2 \bar{\sigma}^2 \cdot k - \\ - \frac{5}{6}\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\bar{\sigma}\, k\xi - \left[1 - \frac{13}{12}\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\right]\bar{\sigma}\,\xi^2, \tag{4.35}$$

în care s-au introdus notațiile:

$$\bar{\sigma} = \frac{pR^2}{2E\delta^2};\quad k = \frac{c^2}{R\delta};\quad \xi = \frac{d}{\delta};\quad \overline{W} = \frac{3}{2}\,\pi\,\frac{R}{E\delta^4}. \tag{4.36a, b, c, d}$$

Pentru a exista un echilibru, energia potențială trebuie să fie minimă. Din condițiile $\frac{\partial \overline{W}}{\partial \xi} = 0$ și $\frac{\partial \overline{W}}{\partial k} = 0$, rezultă sistemul

$$\sigma^* \left\{ \left[1 - \frac{13}{12}\left(\frac{1}{2} - \beta\right) \right] \varkappa + \frac{5}{12}\left(\frac{1}{2} - \beta\right) \right\} = \frac{7}{30} - \frac{3}{4}\varkappa + \frac{23}{42}\varkappa^2 + \frac{4}{3}\frac{1}{k^2}, \tag{4.37a}$$

$$6\left(\frac{1}{2} - \beta\right)^2 \sigma^{*2} - \frac{5}{6}\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\sigma^* = \frac{23}{84}\varkappa^2 - \frac{7}{30} + \frac{4}{3}\frac{1}{k^2}, \tag{4.37b}$$

în care

$$\frac{\overline{\sigma}}{\xi} = \sigma^* \; ; \; \frac{\xi}{k} = \varkappa. \tag{4.38a,b}$$

Sistemul de ecuații (4.37) are trei necunoscute σ^*, k, $\varkappa$; dacă se rezolvă aceasta în raport cu σ^* și k și parametric cu χ, se obțin valorile:

$$\sigma^* = \frac{\varkappa C}{12\left(\frac{1}{2} - \beta\right)^2}\left[1 - \sqrt{1 - 12\left(\frac{1}{2} - \beta\right)^2 \frac{A}{C^2}}\right] \tag{4.39a}$$

$$k = \frac{1}{\varkappa}\frac{1}{\sqrt{\frac{D\sigma^*}{\varkappa} + B}}, \tag{4.39b}$$

în care

$$A = \frac{23}{42} - \frac{3}{2}\frac{1}{\varkappa} + \frac{14}{15}\frac{1}{\varkappa^2}, \tag{4.40a}$$

$$B = -\frac{23}{56} + \frac{9}{16}\frac{1}{\varkappa} - \frac{7}{40}\frac{1}{\varkappa^2}, \tag{4.40b}$$

$$C = \frac{5}{4}\left(\frac{1}{2} - \beta\right) + 1 - \frac{13}{12}\left(\frac{1}{2} - \beta\right), \tag{4.40c}$$

$$D = \frac{3}{4}\left[\frac{5}{12\varkappa}\left(\frac{1}{2} - \beta\right) + 1 - \frac{13}{12}\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\right]. \tag{4.40d}$$

Din relaţiile (4.36a) şi (4.38) rezultă

$$p = 2\sigma^* \, k\varkappa E \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \tag{4.41}$$

şi prin urmare prin intermediul relaţiilor (4.39), încărcarea este funcţie de parametrii β şi $\varkappa$. Pentru primul au fost alese valorile $\beta = 0{,}0$; $0{,}5$; $1{,}0$; $1{,}5$. Din relaţiile (4.36b,c) şi (4.38b) rezultă

$$\varkappa = \frac{Rd}{c^2}. \tag{4.42}$$

În figura 12 s-a reprezentat încărcarea p în funcţie de $\frac{Rd}{c^2}$ şi parametric cu β. Dacă se ia drept bază încărcarea critică a sferei complete, pentru care $\beta = \frac{1}{2}$, din minimul curbelor din figura 12 s-a determinat încărcarea

$$p_{cr}\beta = c_\beta p_{cr}, \tag{4.43}$$

în care c_β este reprezentat în figura 13; se constată că variaţia exactă poate fi înlocuită acoperitor cu o relaţie simplă de forma

$$c_\beta = 1{,}055 - 0{,}11 \ \beta. \tag{4.44}$$

S-au eliminat din discuţie cazurile cînd $\beta < 0{,}5$, deoarece se obţin valori mai mari şi voalarea se va produce la centrul plăcii. Dacă voalarea se va produce la marginea plăcii din cauza unei rigidităţi insuficiente la răsucire a arcelor marginale, suprafaţa de voalare se va forma la colţurile plăcii, acolo unde influenţa distribuţiei solicitărilor asupra încărcării critice este maximă; de aceea, în acest caz se recomandă să se ia $\beta = 1{,}5$ şi $c_\beta = 0{,}89$.

4.3. INFLUENŢA DEPLASĂRILOR

Deplasarea normală la suprafaţa plăcii a sferelor complete este dată de relaţia (4.29). La cupolele pe contur pătrat deplasările sînt

$$w_{a\Delta} = w_a + w_\Delta, \tag{4.45}$$

în care

— w_a corespunde cupolei rezemate pe arce cu două articulaţii şi poate fi calculată la centrul şi marginea plăcii cu relaţia [9]

$$w_a = k_w^p \cdot \frac{pa}{E}, \tag{4.46}$$

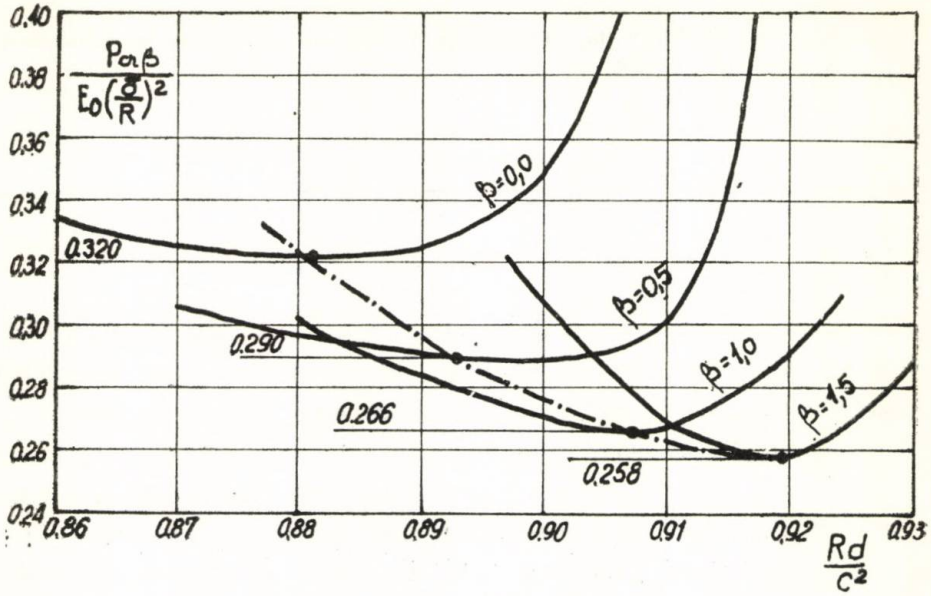

0.40
0.38
0.36
0.34
0.32
0.30
0.28
0.26
0.24
$\frac{P_{cr}\beta}{E_0(\frac{\delta}{R})^2}$
β=0,0
β=0,5
β=1,0
β=1,5
0.320
0.290
0.266
0.258
0.86
0.87
0.88
0.89
0.90
0.91
0.92
0.93
$\frac{Rd}{c^2}$

Fig. 12

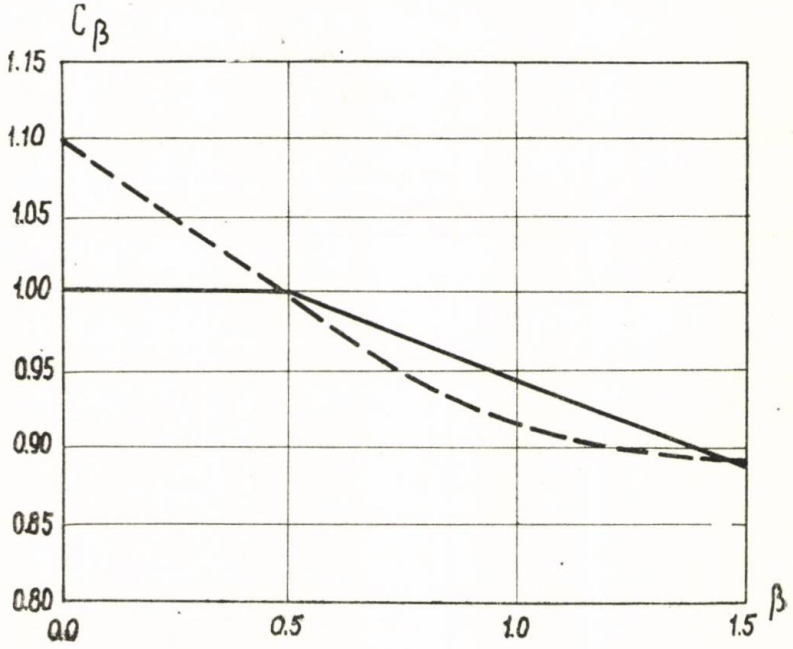

C_β
1.15
1.10
1.05
1.00
0.95
0.90
0.85
0.80
0.0
0.5
1.0
1.5
β

Fig. 13

k_w^p fiind dat în tabela 1 pentru cupole la care $\frac{a}{f} = 5$ (k_{wc}^p și k_{wm}^p referindu-se la centrul și marginea plăcii) și în funcție de rapoartele $\frac{f}{\delta}$, $\frac{b}{h}$ și $\frac{2a}{h}$,

Tabela 1

Coeficienții k_{wc}^p, k_{wm}^p

$\frac{f}{\delta}$	$\frac{b}{h}$	$k_{wc}^p/10^3$					$k_{wm}^p/10^3$				
		$\frac{2a}{h}$					$\frac{2a}{h}$				
		20	30	40	50	60	20	30	40	50	60
20	1/3	0,747	0,933	1,190	1,529	1,938	0,378	0,986	1,831	3,004	4,429
	1/2	0,705	0,848	1,050	1,310	1,620	0,284	0,756	1,427	2,321	3,399
	2/3	0,684	0,797	0,964	1,187	1,437	0,235	0,619	1,188	1,934	2,841
40	1/3	1,361	1,592	1,943	2,426	3,068	0,428	1,233	2,451	4,175	6,533
	1/2	1,317	1,478	1,741	2,114	2,597	0,332	0,913	1,854	3,191	5,015
	2/3	1,292	1,418	1,626	1,931	2,339	0,280	0,748	1,519	2,642	4,162
60	1/3	1,979	2,221	2,620	3,194	3,963	0,486	1,364	2,835	4,887	7,739
	1/2	1,929	2,099	2,389	2,818	3,403	0,386	1,020	2,107	3,713	5,933
	2/3	1,905	2,035	2,264	2,607	3,092	0,338	0,835	1,715	3,043	4,912

— w_Δ, deplasării orizontale ale reazemelor Δ_H

$$w_\Delta = k_w^\Delta \Delta_H, \tag{4.47}$$

k_w^Δ rezultînd în mod asemănător din tabela 2. Deplasarea orizontală a

Tabela 2

Coeficienții k_{wc}^Δ, k_{wm}^Δ

$\frac{f}{\delta}$	$\frac{b}{h}$	k_{wc}^Δ					k_{wm}^Δ				
		$\frac{2a}{h}$					$\frac{2a}{h}$				
		20	30	40	50	60	20	30	40	50	60
20	1/3	2,748	2,970	3,078	3,137	3,167	4,610	4,558	4,549	4,554	4,529
	1/2	2,734	2,971	3,073	3,138	3,172	4,703	4,641	4,611	4,606	4,582
	2/3	2,739	2,956	3,060	3,150	3,175	4,791	4,668	4,645	4,651	4,611
40	1/3	2,725	2,956	3,064	3,124	3,165	4,827	4,716	4,664	4,636	4,628
	1/2	2,720	2,949	3,057	3,125	3,182	4,896	4,780	4,715	4,694	4,686
	2/3	2,719	2,943	3,052	3,115	3,158	4,949	4,816	4,750	4,715	4,701
60	1/3	2,732	2,953	3,067	3,126	3,169	4,925	4,794	4,713	4,693	4,675
	1/2	2,717	2,944	3,057	3,123	3,171	4,969	4,842	4,776	4,736	4,724
	2/3	2,715	2,944	3,053	3,119	3,164	5,000	4,878	4,805	4,762	4,744

reazemelor Δ_H, rezultată în urma alungirii tiranților [9]:

$$\Delta_H = \frac{k_H^p}{k_H^\Delta + n\overline{A}_z} \cdot \frac{pa}{E}, \tag{4.49}$$

în care k_H^p și k_H^Δ sînt dați în tabela 3, iar

$$n = \frac{E_z}{E}, \quad \overline{A}_z = \frac{A_z}{a^2}, \tag{4.50}$$

Tabela 3

Coeficienții k_H^p și k_H

$\frac{f}{\delta}$	$\frac{b}{h}$	k_H^p					$k_H^\Delta/10^{-4}$				
		$\frac{2a}{h}$					$\frac{2a}{h}$				
		20	30	40	50	60	20	30	40	50	60
20	1/3	1,198	1,330	1,393	1,428	1,445	2,979	0,862	0,368	0,164	0,111
	1/2	1,180	1,313	1,378	1,416	1,436	4,019	1,186	0,516	0,263	0,181
	2/3	1,170	1,302	1,387	1,407	1,430	4,947	1,516	0,616	0,358	0,286
40	1/3	1,153	1,291	1,361	1,402	1,427	2,177	0,570	0,293	0,120	0,067
	1/2	1,140	1,276	1,347	1,389	1,416	2,984	0,760	0,319	0,170	0,095
	2/3	1,133	1,267	1,337	1,380	1,409	3,795	0,924	0,386	0,211	0,127
60	1/3	1,136	1,272	1,340	1,368	1,415	1,952	0,492	0,240	0,094	0,054
	1/2	1,126	1,260	1,330	1,373	1,402	2,744	0,633	0,247	0,126	0,075
	2/3	1,121	1,253	1,322	1,365	1,395	3,535	0,789	0,299	0,151	0,089

E_z fiind modulul de elasticitate al tiranților metalici și A_z, aria secțiunii acestora.

Dacă se introduce notația

$$\gamma = \frac{w_{a\Delta}}{w_0}, \tag{4.51}$$

în mod asemănător cu relația (4.35) se determină

$$\overline{W} = \frac{23}{84}\frac{\xi^4}{k} - \frac{1}{2}\xi^3 + \frac{7}{30}k\xi^2 + \frac{4}{3}\frac{\xi^2}{k} + \frac{3}{2}(1-\gamma)\overline{\sigma}^2 k - \overline{\sigma}\xi^2 \tag{4.52}$$

Din condițiile de minim a energiei potențiale în raport cu ξ și k rezultă

$$\bar{\sigma} = \frac{23}{42}\frac{\xi^2}{k} - \frac{3}{4}\xi + \frac{7}{30}k + \frac{4}{3}\frac{1}{k}, \tag{4.52a}$$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{2\xi^2}{3(\gamma-1)}\left(\frac{7}{30} - \frac{4}{3}\frac{1}{k^2} - \frac{23}{84}\frac{\xi^2}{k^2}\right). \tag{4.52b}$$

Relațiile (4.52) reprezintă un sistem de două ecuații cu trei necunoscute. Folosind notațiile (4.38a, b) și (4.40a, b)

$$\sigma^* = \frac{\varkappa}{3(\gamma-1)}\left[\sqrt{1+3(\gamma-1)A} - 1\right], \tag{4.53a}$$

$$k = \frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{1}{\frac{3}{4}\frac{\sigma^*}{\varkappa} + B}}, \tag{4.53b}$$

iar din relația (4.41), încărcarea p, în funcție de $\varkappa$ dat de relația (4.42) și γ. În figura 14 sînt trasate curbele de echilibru, în funcție de $\frac{Rd}{c^2}$ și parametric cu γ. Asemănător cu (4.2) și (4.43) se poate scrie încărcarea critică de forma

$$p_{cr\gamma} = c_\gamma p_{cr}, \tag{4.54}$$

în care c_γ s-a dedus din curbele figurii 14. Se constată din figură o reducere importantă a încărcărilor critice în raport cu γ, putîndu-se ajunge pînă la jumătate din valoarea inițială.

5. CALCULUL APROXIMATIV AL ÎNCĂRCĂRII CRITICE

5.1. ÎNCĂRCAREA CRITICĂ A CUPOLELOR FĂRĂ IMPERFECȚIUNI

În cele de mai sus s-a determinat influența separată a fiecăruia dintre factorii care reduc încărcarea critică. Cum însă ei pot acționa concomitent și cum un calcul care să țină seamă de aceasta este poate dificil, s-a pus problema găsirii unei relații simple de interacțiune între valorile determinate anterior. După analizarea a mai multor variante, s-a stabilit că cea mai simplă și rațională relație este

$$p_{cr\alpha\beta\gamma} = c_\alpha\, c_\beta\, c_\gamma\, p_{cr}, \tag{5.1}$$

care presupune independența celor trei factori. De aceea calculul este aproximativ și urmează să fie verificat experimental.

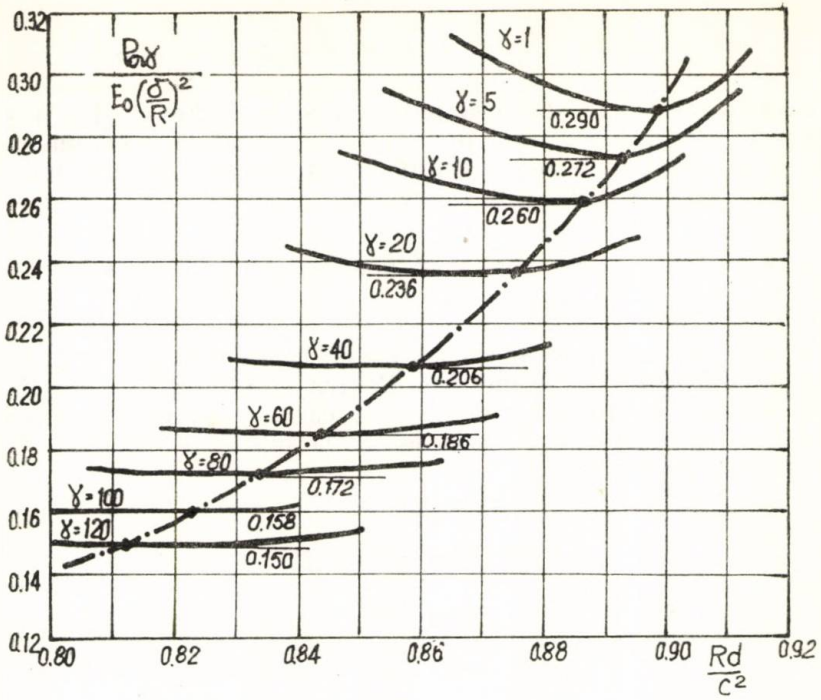

0.32
0.30
0.28
0.26
0.24
0.22
0.20
0.18
0.16
0.14
0.12
0.80
0.82
0.84
0.86
0.88
0.90
0.92
Rd/C²
γ=1
γ=5
γ=10
γ=20
γ=40
γ=60
γ=80
γ=100
γ=120
0.290
0.272
0.260
0.236
0.206
0.186
0.172
0.158
0.150

Fig. 14

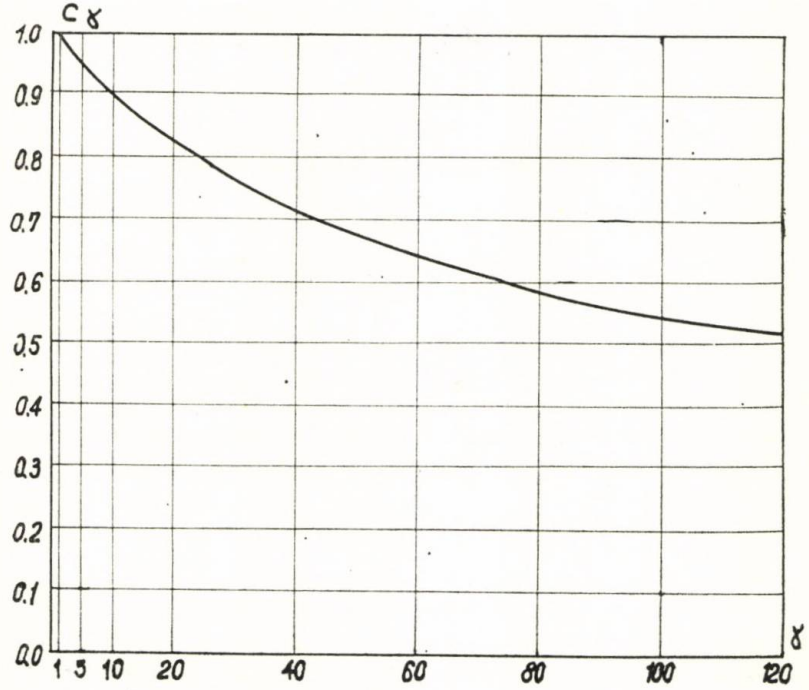

Cγ
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
1
5
10
20
40
60
80
100
120
γ

Fig. 15

5.2. INFLUENȚA IMPERFECȚIUNILOR ȘI NEOMOGENITĂȚILOR

Relația (5.1) este stabilită pentru plăcile curbe ideale; imperfecțiunile pot fi geometrice, adică devieri de la suprafața mediană sau mecanice, caracterizate prin neomogenități în structură. De aceea încărcarea critică reală p_{lim} va fi dată de relația

$$p_{\text{lim}} = m_e \, k_e \, p_{cr\alpha\beta\gamma}, \tag{5.2}$$

în care

m_e este un coeficient al condițiilor de lucru, care ține seamă de influența imperfecțiunilor geometrice. Pentru stabilirea lui se pot folosi valorile indicate în [19], care ține seamă că la creșterea raportului R/δ, îi corespunde și o creștere a devierilor de la suprafața mediană. Valorile lui sînt date în tabela 4,

Tabela 4

Coeficienții condițiilor de lucru m_e

R/δ	250	500	750	1000	1500
m_e	1,00	0,80	0,67	0,53	0,50

k_e — coeficientul de omogenitate al modulului de elasticitate, care ține seamă că acesta este dat în norme cu valoarea normată și există o împrăștiere a valorilor reale. Valorile lui au fost determinate în tabela 5 pe baza celor stabilite în [20].

Tabela 5

Coeficienții de omogenitate k_e ai modulilor de elasticitate

Marca betonului	B 200	$\geqslant$ B 300
k_e	0,70	0,85

În [21], pentru coeficientul de omogenitate se consideră $k_e = 0{,}75$, indiferent de marca betonului. Dacă nu există o garanție a unei calități superioare a execuției, se recomandă să nu se ia valori mai mari decît $k_e = 0{,}75$, deoarece acesta trebuie să acopere și neomogenitățile structurale.

Prin urmare relația de verificare a stabilității cupolelor în domeniul elastic

$$p \leqslant p_{\text{lim}}, \tag{5.3}$$

p fiind încărcarea de calcul (încărcarea normată, multiplicată cu coeficienții de supraîncărcare).

În cazul cupolelor din beton armat intervine și influența curgerii lente și contracției betonului, care reduce încărcarea limită.

5.3. COMPORTAREA POSTCRITICĂ A CUPOLELOR

Pentru unele elemente care au pereți subțiri, calculele moderne admit ca în exploatare să fie depășite încărcările critice, structurile lucrînd în stadiul postvoalat. Și în cazul plăcilor curbe subțiri există tendințe de folosire a acestui domeniu; astfel, în cazul unor materiale perfect elastice s-a dovedit experimental în [22] că la paraboloizii hiperbolici există stări postcritice, a căror mărime depinde de rigiditatea elementelor de margine.

În cazul cupolelor, în figura 16 s-au suprapus diagramele obținute în paragrafele precedente (fig. 2 și 4), care ne vor da imaginea comportării

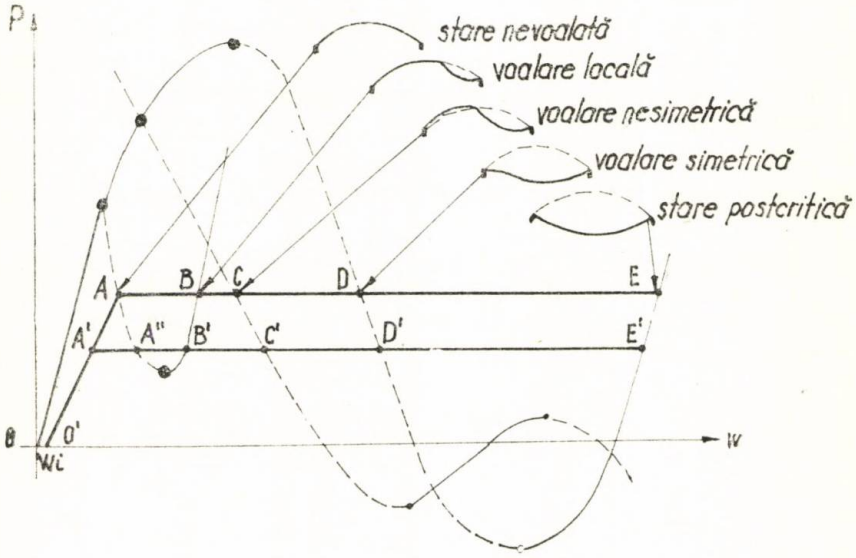


Fig. 16

postcritice. Din cauza imperfecțiunilor, curba de încărcare nu va porni din origine și va intersecta curba de stabilitate prin voalări locale pe ramura echilibrului labil (punctul A). Cum încărcările în construcții nu scad în timpul voalării, placa trece brusc în starea voalată local (punctul B). Din cauza forțelor de inerție mari care iau naștere în timpul voalării locale, placa poate să ajungă pe curba de echilibru labil al voalării nesimetrice (punctul C), de aici, pe ramura labilă a voalării simetrice (punctul D) și apoi pe cea stabilă a acestui din urmă mod de voalare (punctul E) care reprezintă aproximativ forma oglindită a poziției inițiale. Astfel, datorită deplasărilor foarte mari (de ordinul $4f$), se nasc forțe inerțiale foarte mari, la care structura nu poate rezista și placa se distruge. Menționăm încercarea modelului de paraboloid eliptic descrisă în [10], în care sistemul de încărcare păstra practic constantă încărcarea în timpul deformării plăcii; pierderea stabilității s-a produs brusc, astfel că la o filmare cu 32 cadre/s nu a putut fi prins pe peliculă momentul și procesul de dezvoltare a suprafeței de voalare, de unde rezultă vitezele și forțele de iner-

ţie foarte mari care se produc în cazul pierderii stabilităţii prin saltul echilibrului. Distrugerea modelului a fost totală, din model rămînînd practic numai elementele marginale şi mici porţiuni din colţurile plăcii. La modelele din [9], sistemul de încărcare a fost astfel alcătuit încît încărcarea scădea brusc în momentul voalării plăcii; la experimentare s-a ajuns numai pe ramura labilă a voalării locale, după care încărcarea a scăzut, păstrîndu-se forma suprafeţei de voalare.

Prin urmare, în cazul încărcărilor curente din construcţii, pierderea stabilităţii se produce prin voalări locale, dar distrugerea se produce prin antrenarea suprafeţei întregi şi în cazul cupolelor din beton armat nu se poate conta pe stadiul postcritic.

6. EXEMPLU DE CALCUL

Să se calculeze încărcarea critică a cupolei pe contur pătrat avînd următoarele caracteristici:

$2a = 48{,}00$ m; $f = 4{,}8$ m; $\delta = 0{,}12$ m; $R = 60{,}0$ m, rezemată

pe arce avînd secţiunea de $0{,}60 \times 1{,}20$ m şi tiranţi cu aria secţiunii transversale de 173 cm^2. Modulul de elasticitate al betonului este $E = 315.000$ kgf/ m^2 (B 300), iar al tiranţilor metalici $E_z = 2.100.000$ kgf/ m^2. Din (4.20) rezultă

$$I_r^* = \frac{G\bar{\alpha}b^3h}{\frac{E\delta^3a}{12}} = 6\bar{\alpha}\frac{b^3h}{\delta^3a} = 8{,}58,$$

$$I^* = \frac{\frac{Ebh^3}{12}}{\frac{E\delta^3a}{12}} = \frac{bh^3}{\delta^3a} = 25{,}00,$$

$\bar{\alpha}$ rezultînd din [23] în funcţie de raportul h/b; în calcule s-a admis că $\mu = 0$. Din relaţia (4.22) rezultă

$$\alpha = \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{8{,}58} + \frac{1{,}6}{25{,}00}\right)\sqrt{\frac{4{,}80}{0{,}12}}} = 0{,}92 < 1{,}00$$

şi prin urmare voalarea se produce la marginea plăcii. Din (4.3) rezultă

$$c\alpha = 0{,}12 + 0{,}44 \times 0{,}92 = 0{,}52.$$

Conform celor arătate în § 4.2, în acest caz se va lua $\beta = 1{,}5$ și din (4.44) $c\beta = 0{,}89$.
Deplasarea elastică a sferei complete este

$$w_0 = \frac{1}{8}\,\frac{a^3}{f^2\delta}\cdot\frac{pa}{E} = 0{,}625 \times 10^3\,\frac{pa}{E},$$

iar cea a cupolei rezemate pe arce cu două articulații, rezultă la margini din (4.46) și tabela 1, pentru

$$\frac{a}{f} = \frac{24{,}0}{4{,}8} = 5\,; \quad \frac{f}{\delta} = \frac{4{,}80}{0{,}12} = 40\,; \quad \frac{2a}{h} = \frac{48{,}0}{1{,}20} = 40\,; \quad \frac{b}{h} = \frac{0{,}60}{1{,}20} = \frac{1}{2},$$

$$w_a = 1{,}854 \times 10^3\,\frac{pa}{E}.$$

Deplasarea orizontală a reazemelor se calculează din relația (4.49) și tabela 3, $k_H^p = 1{,}347$, $k_H^{\Delta} = 0{,}319 \times 10^4$ și

$$n = \frac{2.100.000}{315.000} = 6{,}65 \quad ; \quad \overline{A}_z = \frac{173}{24^2} = 0{,}300,$$

$$\Delta_H = \frac{1{,}347}{(0{,}319 + 6{,}65 \times 0{,}300)10^{-4}}\cdot\frac{pa}{E} = 5{,}81 \times 10^3\,\frac{pa}{E},$$

iar deplasarea la margini din alungirea tiranților cu relația (4.47) și tabela 2, $k_H^{\Delta} = 4{,}715$,

$$w_{\Delta} = 4{,}715 \times 5{,}81 \times 10^3\,\frac{pa}{E} = 27{,}5 \times 10^3\,\frac{pa}{E}.$$

Deplasarea totală a marginilor rezultă din relația (4.41)

$$w_a = (1{,}854 + 27{,}5)\,10^3\,\frac{pa}{E} \cong 29{,}35 \times 10^3\,\frac{pa}{E},$$

iar din relația (4.51)

$$\gamma = \frac{29{,}35}{0{,}625} = 47$$

și prin urmare deplasarea cupolei rezemate pe arce cu tiranți este de 47 ori mai mare la margini decît cea a cupolelor complete. Din diagrama figurii 15 rezultă $c\gamma = 0{,}68$.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM 1948 MŰSZAKI KÖNYVTÁR

Din relaţia (2.1b) se obţine încărcarea critică a sferei complete :

$$p_{cr} = 0{,}30 \times 315.000. \left(\frac{0{,}12}{60{,}0}\right)^2 = 0{,}3780 \text{ kgf/cm}^2 = 3780 \text{ kgf/m}^2,$$

iar din (5.1), încărcarea critică a cupolei ideale, rezemate pe arce cu tiranţi

$$p_{cr\alpha\beta\gamma} = 0{,}52 \times 0{,}89 \times 0{,}68 \; p_{cr} = 0{,}315 \; p_{cr} = 1190 \text{ kgf/m}^2.$$

Pentru cupolele cu imperfecţiuni, din tabela 4 pentru $\frac{R}{\delta} = 500$ rezultă $m_\varepsilon = 0{,}80$, iar din tabela 5, pentru B 300, $k_c = 0{,}85$. Relaţia de verificare (5.3) va fi :

$$p \leqslant 0{,}80 \times 0{,}85 \times p_{cr\alpha\beta\gamma} = 0{,}68 \; p_{cr\,\alpha\beta\gamma} = 0{,}214 \; p_{cr} = 810 \text{ kgf/m}^2.$$

7. CONCLUZII

Relaţiile deduse în lucrare permit determinarea încărcărilor critice elastice a cupolelor rezemate pe arce cu tiranţi. Calculele efectuate arată reduceri importante faţă de valorile recomandate în literatură, din cauza influenţei condiţiilor de rezemare, dintre care cea mai mare este cea dată de rigiditatea la răsucire a arcelor marginale.

Lucrarea este o parte din teza de doctorat elaborată sub conducerea profesorului emerit Constantin Avram, membru corespondent al Academiei, căruia autorul îi exprimă profunda sa recunoştinţă.

Primită la redacţie la 2 octombrie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. M. C. Kornişin, *Nelineinie zadaci teorii plastin i pologhih obolocek i metodi ih reşenia*, Izdatelstvo „Nauka", Moscova, 1964.
2. A. S. Wolmir, *Biegsame Platten und Schalen*, VEB Verlag für Bauwessen, Berlin, 1962.
3. A. Beleş, M. Soare, *Calculul plăcilor curbe subţiri*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1969.
4. H. Schmidt, *Ergebnisse von Beulversuchen mit Doppelt Gekrümmten Schalen Modellen*, Shell Research, IASS Symposium Delft, 1961, p. 159 — 181.
5. H. Kwang-Chien, W. Lien, *The nonlinear elastic stability of eliptical paraboloid shallow shells under uniform external load*, Scientia Sinica, *2*, p. 273 — 288 (1966).
6. M. Pagano, C. Catazaro, G. C. Pedicini, *The collapse load of braced translation vaults and cilindrical barrel vaults*, Space Structures, Londra, 1966, p. 502—524.
7. G. K. Haidukov, V. V. Sugaev, *Issledovanie predelnovo sostoiania jelezobetonnih pologhih obolocek pri bolşih proghibah*, Beton i jelezobeton, *3*, p. 13 — 17 (1970).
8. A. A. Oatul, A. P. Novoselov, *Experimentalnoe issledovanie kratkovremennoi i dlitelnoi ustoicivosti modelei pologhih jelezotonnih obolocek*, Stroitelnie konstrukţii, Vîpusc XI, Kiev, 1969, p. 79—86.
9. V. Gioncu, *Comportarea şi calculul cupolelor din beton armat rezemate pe arce cu tiranţi*, Teză de doctorat, Institutul politehnic Timişoara, mai 1971.
10. S. H. Abu-Sitta, *Experimental studies of shell models*, IASS Congress Mexic 1967.

11. G. K. Haidukov, I. S. Ishakov, *Issledovanie na modeliah i rascet pologhih priamougolnîh obolocek polojitelnoi gausovoi krivizni po predelnomu ravnovesin*, Beton i jelezobeton, *1* (1966).
12. B. S. Vasilkov, V. G. Vlasov, *Eksperimentalno-teoreticeskie issledovania modelei jelezobetonnoi obolociki dvoiakoi krivizni*, Novîe metodî rasceto stroitelnîh konstrukţii, Stroiizdat, Moscova, p. 39—44.
13. H. van Koten, A. M. Haas, *Influence of edge stiffness and the angle of buckled area on the stability of a spherical shell*, Large span shells. IASS Congress Leningrad, 1966, vol. 1, p. 656—666.
14. M. Soare, *The deformation of elliptical and rotational shells*, The Indian Concrete Journal, *9*, p. 323—331 (1963).
15. P. M. Oghibalov, M. A. Koltunov, *Obolociki i plastini*, Izdatelstvo Moskovskovo Universiteta, 1969.
16. M. A. Koltunov, *Utocennoe reşenie ob ustoicivosti preamougolnih panelei ghibkih pologhih obolocek*, Vestnik Moskovskovo Universiteta, *3*, 37—45 (1961).
17. L. R. L. Wang, Leandro Rodriquez-Argait, W. A. Litle, *Effect of boundary conditions on shell buckling*, Journal of the Engineering Mechanics Division, EM *6*, 101—116 (1966).
18. A. Beleş, M. Soare, *Paraboloidul eliptic şi hiperbolic în construcţii*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1964.
19. * * * *Procinost, ustoicivost, kolebania*, Izdatelstvo Maşinostroenie, Moscova, 1968.
20. V. A. Baldin, *Calculul elementelor de construcţii pe baza stărilor limită* (traducere din limba rusă), Editura MCIMC, 1953.
21. Academia URSS, *Instrucţiuni pentru proiectarea acoperişurilor şi planşeelor din plăci curbe subţiri de beton armat*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1963.
22. K. M. Leet, *Study of stability in the hyperbolic paraboloid*, Journal of the Engineering Mechanics Division, EM *1*, 121—142 (1966).
23. A. Beleş, R. Voinea, *Rezistenţa materialelor*, Vol. II, Bucureşti, Edit. tehnică, 1958.

STAREA DE ECHILIBRU NATURAL PENTRU ROCILE DIN MASIVELE NEATACATE

de GORUN MANOLESCU

CCLA, PAMID

În lucrarea de faţă se introduc conceptele de „stare de echilibru natural" şi „curbă de echilibru natural" ale unui masiv neatacat de lucrări subterane.
„Curbele de echilibru natural" pot fi utilizate la calculele de geologie inginerească, legate de tasarea terenurilor.

1. GENERALITĂŢI

Cauza fundamentală a rezistenţei unui corp, rezidă în forţele de atracţie dintre particulele sale. Cu toate că fizica solidelor a obţinut succese mari, ea nu a atins încă un astfel de grad de dezvoltare încît, pe baza concluziilor ei, să poată fi efectuate calcule practice de rezistenţă a materialelor reale. Într-adevăr, experienţa arată că proprietatea corpurilor solide de a se opune acţiunilor mecanice exterioare este de zeci şi sute de ori mai mică decît valoarea teoretică a forţelor de atracţie dintre atomi. Cauzele principale ale unor asemenea diferenţe sînt: neomogenitatea fizico-mecanică a materialelor reale şi defectele şi golurie din structura lor.

Mecanica clasică a corpurilor deformabile pune la baza cercetărilor ei o ipoteză convenţională cu privire la continuitatea corpurilor. Valoarea acestei ipoteze, constă în faptul că ea permite aplicarea aparatului de analiză infinitizimală. Studierea unui mediu continuu prin folosirea operaţiilor cu funcţii continuui, este mult mai uşoară şi mai simplă decît studierea unui ansamblu de particule discrete, separate, ale corpului. Structura reală, discontinuă a corpului cere, pentru studierea sa, un aparat matematic mult mai complicat.

Metodele statistice de studiere a unui material, care, probabil, vor căpăta în viitor o mare importanţă, se află astăzi la începutul dezvoltării lor.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 32, NR. 2, 1973, p. 421 — 440

Deocamdată, ipoteza de lucru cu privire la continuitatea structurii corpurilor, în strînsă legătură cu cercetările experimentale, permite obținerea unor rezultate care aproximează destul de bine comportarea macroscopică a materialelor reale sub acțiunea forțelor exterioare.

Un domeniu deosebit de important îl constituie schimbarea structurii microscopice a materialelor atunci cînd sînt supuse la stări mari*) și intense*) de tensiune triaxială. Asemenea schimbări apar îndeosebi la roci și ele duc la modificarea proprietăților mecanice, macroscopice, ale acestora în condiții de compresiune triaxială. În aceste cazuri, teoria aplicată a mecanicii mediilor deformabile care operează, cum s-a arătat, cu un mediu ipotetic continuu, idealizat, nediferențiat din punctul de vedere al structurii microscopice și al variațiilor acesteia, pe de o parte deformează mult realitatea, iar, pe de alta, se găsește în imposibilitatea de a explica variația macroscopică a proprietăților mecanice în funcție de variația stărilor de tensiune triaxială. Deci, îndeosebi pentru roci, descrierea matematică bazată pe calculul infinitizimal ar trebui să fie dublată de o descriere a schimbărilor structurale, microscopice, în funcție de variația stărilor de tensiune triaxială. În lucrarea de față s-a căutat să se realizeze acest lucru.

2. STRUCTURA ROCILOR

Rocile sînt asociații de grăunți minerali legați între ei direct, sau prin intermediul unui ciment de legătură sau a unor pelicule coloidale.

Din punctul de vedere al omogenității naturii constituienților, rocile sînt asemănătoare cu aliajele alcătuite din constituienți de naturi diferite (de exemplu fontele cenușii care sînt formate din zone de perlită sau ferită și din zone de cărbune grafitizat).

În timpul supunerii rocilor la diverse stări de eforturi unitare care ating o anumită valoare limită, procesele de alunecare, maclare și de apariție a micro și macro-fisurilor se produc similar ca la metale și aliaje, cu deosebirea că în cazul rocilor ele sînt mult favorizate de existența porozității ridicate.

În ceea ce privește rezistența opusă de roci la acțiunea forțelor exterioare, ea va fi condiționată de structura lor și de forțele interioare care se opun deformărilor induse de forțele exterioare.

Forțele interioare se pot împărți în două mari categorii :

— forțe interioare condiționate de coeziunea rocilor,

— forțe interioare de natură mecanică.

Forțele de coeziune, avînd în vedere neomogenitatea ridicată a rocilor, vor varia în funcție de poziția punctului în care se determină. Nu vom intra în amănunte în privința acestor forțe. Despre ele se pot spune mai multe lucruri care însă depășesc cadrul lucrării de față.

*) Asupra noțiunilor de „mărime" și „intensitate" a stării de eforturi unitare triaxiale a se vedea paragraful „Notații și precizări" de la finele lucrării.

Forţele interne de natură mecanică se pot pune în evidenţă îndeosebi la rocile neconsolidate (mai ales la nisipuri). Astfel de forţe sînt de natura unor frecări care apar la contactul corpurilor macroscopice cînd acestea se deplasează unele faţă de altele de-a lungul planelor de contact.

De menţionat că la rocile în care acţionează forţele interne de coeziune, se manifestă şi forţe de frecare interioară. Deasemenea, la rocile neconsolidate se manifestă, însă în măsură extrem de mică, practic neglijabilă, şi forţe de coeziune.

3. IPOTEZE ASUPRA DISTRIBUŢIEI EFORTURILOR UNITARE ÎN INTERIORUL MASIVELOR NEATACATE. ADMITEREA UNEI IPOTEZE

În diversele lucrări din literatura de specialitate, nu există o unitate de vederi în privinţa adoptării ipotezelor în legătură cu distribuţia tensiunilor în interiorul masivelor neatacate.

Noi am considerat că cea mai logică este ipoteza lui M. P. Timbarevici, completată cu ipoteza lui P. Khun citată în [2]. Am denumit aceste două ipoteze reunite, ipoteza lui Khun-Timbarevici.

În cadrul acestei ipoteze se consideră că, în cazul masivelor neatacate, pe măsură ce rocile se tasează — şi acest lucru se produce odată cu creşterea adîncimii — această tasare are loc cu posibilitatea unei scurtări specifice pe direcţia verticalei şi cu scurtare sau alungire specifică împiedicată în plan orizontal.

Alegînd un sistem de coordonate cu originea într-un punct din masivul considerat şi cu axele : z corespunzînd cu direcţia verticalei, x şi y fiind cuprinse într-un plan orizontal, pentru un volum elementar infinit mic, condiţiile impuse de acceptarea ipotezei sînt : $\varepsilon_z \neq 0$, $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$.

Ţinînd seama de faptul că axele x, y, z, datorită condiţiilor impuse, sînt direcţii principale de deformare, urmează că aceste direcţii corespund şi cu direcţiile eforturilor unitare principale. În acest caz, axa z (verticala) va fi direcţia pe care se exercită efortul unitar principal maxim, $\sigma_1 = \sigma_z$ (presiunea litostatică), iar axele x şi y vor fi direcţiile în care se exercită eforturile unitare principale minime, $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_x = \sigma_y$.

În continuare se consideră că, pînă la o anumită adîncime, în funcţie de caracteristicile rocii, denumită adîncime critică, va exista proporţionalitate între eforturile unitare principale maxime, $\sigma_1 = \sigma_z$, şi minime $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_x = \sigma_y$. Acest lucru rezultă din acceptarea unei stări de deformare elastică în care se respectă condiţiile impuse : $\varepsilon_z \neq 0$, $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] = 0, \qquad (1)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\sigma_z}{m-1} = \frac{P}{m-1} = \frac{\gamma_r H}{m-1}, \qquad (2)$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{\sigma_z}{\sigma_x} = m - 1. \qquad (3)$$

În final se admite că odată cu depășirea adîncimii critice, raportul $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{\sigma_z}{\sigma_x}$ începe să varieze prin faptul că mărimea constantei lui Poisson, m, se aproprie treptat de valoarea 2, ceea ce indică o tendință de trecere spre o distribuție hidrostatică a eforturilor unitare.

Această ipoteză a fost parțial verificată experimental, în condiții simulate [3, 4] și prin măsurători în interiorul tunelurilor și galeriilor subterane, cu ajutorul metodelor și dispozitivelor descrise în lucrările [5]—[8]. Din cadrul ipotezei admise, sînt excluse presiunile tectonice remanente, care pot interveni în practică și care modifică condițiile acceptate. Din acest motiv, o serie de măsurători executate în tuneluri și galerii subterane n-au verificat-o [6], [9]. O verificare experimentală mai exactă, în ceea ce privește reproducerea simulată a condițiilor în care este valabilă ipoteza, nu am întîlnit în lucrările cercetate.

Trebuie spus în încheiere că în formațiile masive, fără presiuni tectonice remanente, se realizează cel mai bine condițiile de valabilitate a ipotezei. Asemenea formații, sînt și formațiile argiloase.

4. CONSECINȚE ALE IPOTEZEI ADMISE. STAREA DE ECHILIBRU NATURAL

4.1. ASPECT MACROSCOPIC

Dacă se vor reproduce, în cazul unei stări de compresiune triaxială, condițiile în care este valabilă ipoteza acceptată și anume $\varepsilon_z \neq 0$, $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$, și se vor determina eforturile unitare principale : maxim, σ_1, și minim, σ_3, va trebui să se obțină o înfășurătoare a cercurilor cu diametrul $\sigma_1 - \sigma_3$, de forma celei prezentate în figura 1.

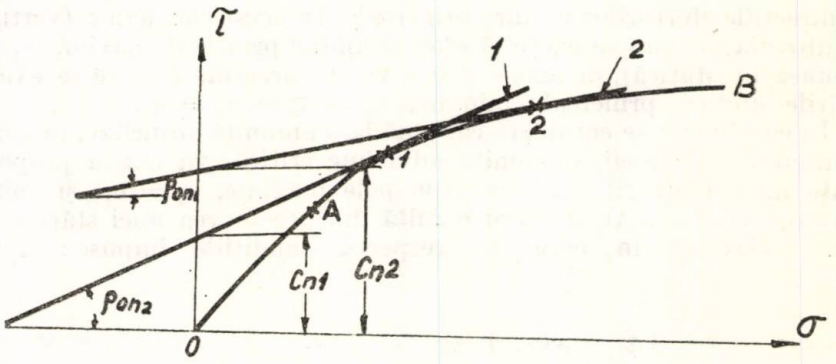


Fig. 1

Această curbă va prezenta o porțiune liniară OA care va indica o proporționalitate între eforturile unitare principale : maxim σ_1, și minim, σ_3, și o porțiune neliniară AB în care această proporționalitate nu se mai verifică.

Indicații prețioase în acest sens pot da încercările edometrice [10], [11]

Încercările edometrice se execută pe probe de roci fretate în cilindrii indeformabili de oțel, supuse la eforturi de compresiune paralele cu axa

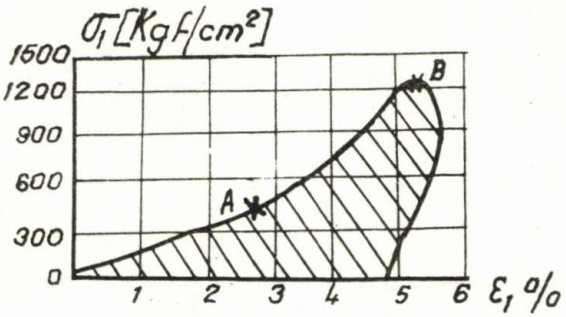


Fig. 2

inelului. Aceste încercări reproduc condițiile : $\varepsilon_z \neq 0$, $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$, putîndu-se măsura, pentru fiecare variație a efortului unitar de compresiune, $\Delta\sigma_1$, reducerea de înălțime, Δh. Raportînd reducerea de înălțime, Δh, la înălțimea inițială a probei, h_0, se poate trasa curba $\varepsilon_1 = \frac{\Delta h}{h_0}$ în funcție de σ_1. O astfel de curbă, obținută pentru sare gemă de H. Wohlbier, are aspectul din figura 2. Cu aceeași instalație se poate trasa și curba de revenire la destinderea probei. Încercările edometrice au dat curbe asemănătoare și pentru alte tipuri de roci (în special pentru pămînturi și argile).

Pe curba edometrică prezentată în figura 2, se poate distinge, pe ramura de încărcare, o porțiune liniară OA care corespunde unei stări elastice de deformare și o porțiune neliniară AB care indică apariția unor schimbări structurale ale rocii. Porțiunea neliniară AB, avînd concavitatea îndreptată în sus, sugerează faptul că, prin schimbările structurale care se petrec în timpul încărcării care depășește domeniul liniar, proprietățile mecanice se îmbunătățesc, apărînd o consolidare a materialului.

Folosind ambele ramuri ale curbei : de încărcare și de descărcare obținute în edometru, putem căpăta indicații macroscopice asupra transformărilor fizice (structurale) produse în rocă prin depășirea stării de deformare elastică. Acest lucru îl putem realiza printr-o metodă energetică.

Calitativ, acumularea și cedarea de energie înmagazinată în eșantionul pe care se face determinarea, se poate vedea privind curba de încărcare-descărcare.

Cantitativ, energia înmagazinată și energia cedată se pot determina prin planimetrarea suprafețelor cuprinse între ramurile de încărcare, respectiv descărcare ale curbei și axa absciselor, (ε).

Diferența dintre lucrul mecanic de încărcare și cel de descărcare, reprezintă lucrul mecanic necesar schimbărilor structurale care apar în eșantionul de rocă (suprafața hașurată pe fig. 2).

Existența acestui lucru mecanic indică, evident, faptul că o rocă supusă la încercări edometrice, la valori mari ale eforturilor, unitare de compresiune triaxială, suferă anumite schimbări structurale, cu toate că scurtarea sau lungirea specifică în plan orizontal sînt împiedicate.

Ipoteza privitoare la alura curbei prezentate în figura 1, care, în același timp, materializează și ipoteza admisă de noi, am căutat s-o verificăm cu ajutorul unei instalații experimentale de construcție proprie. Încercările s-au executat pe roci de natură argiloasă. Pe principiul adoptat în metoda experimentală, a fost posibilă măsurarea simultană a efortului

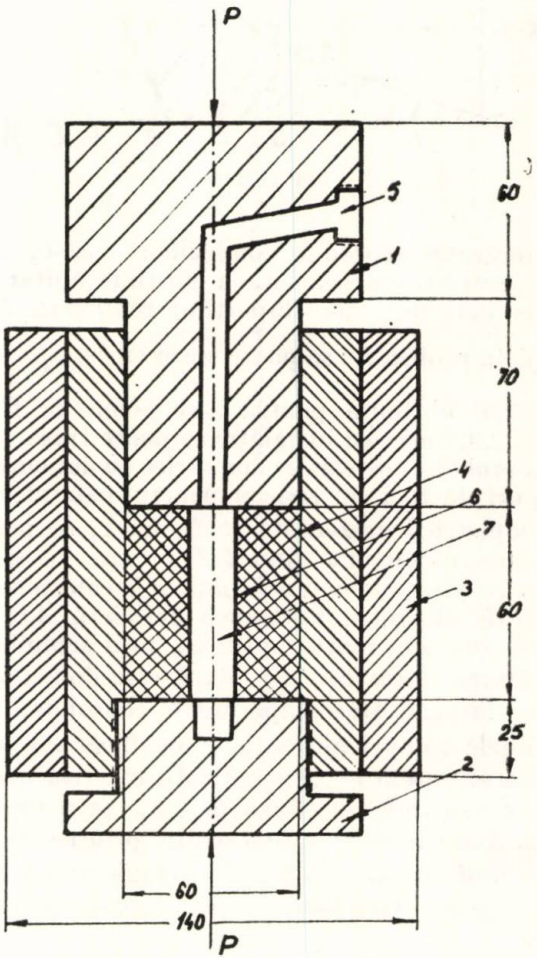


Fig. 3

unitar principal maxim, σ_1, și a celui minim, σ_3, la încărcări variabile, cu respectarea condițiilor: $\varepsilon_z \neq 0$, $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$.

Partea principală a instalației o constituie celula de presiune a cărui schiță este prezentată în figura 3. Această celulă se introduce între pla-

tanele unei mașini de încercat rezistența materialelor, cu ajutorul căreia se realizează sarcina de compresiune P pe suprafața superioară a pistonului *1* și pe suprafața inferioară a capacului *2*. Proba de rocă *4*, de formă cilindrică, este introdusă în interiorul celulei *3* (executată din oțel superior — țeavă de tun, cilindrii fretați) în care culisează pistonul *1*. Prin canalul *5* al pistonului *1*, care corespunde axial cu cavitatea interioară *7* a probei, se poate crea o presiune interioară cu ajutorul unei pompe manuale (s-a folosit o pompă de tip „Automatica" de încercat manometrele pînă la 800 at.). Proba *4* este învelită în hîrtie de calc unsă pentru a micșora frecările între probă și pereții interiori ai celulei, iar în cavitatea *7* se introduce o manta de cauciuc.

Determinările se fac în felul următor: se introduce uleiul în cavitatea *7* a probei *4* care se găsește în celula *3*, iar apoi se montează pistonul *1* al cărui canal *5* se umple, deasemenea, cu ulei pentru a elimina aerul. Se montează celula în poziție de lucru și apoi se pune canalul *5* în legătură cu împingerea pompei prin intermediul unei conducte metalice și a unor ștuțuri de legătură. Pistonul pompei manuale se fixează în poziția în care conducta de legătură, canalul *5* și cavitatea interioară a probei sînt pline cu ulei și deci aerul a fost eliminat. Se pune în funcțiune mașina de încercat, care face să apară forța de compresiune P pe suprafețele orizontale ale probei. În momentul în care se pornește mașina de încercat, încep citirile simultane ale forței de compresiune P și ale forței interioare care se transmite la manometrul pompei manuale prin intermediul uleiului cu care este plină cavitatea *7*. Cu ajutorul forței P și al presiunii interioare, se determină eforturile unitare σ_1 și σ_3. Prin faptul că pereții celulei sînt executați din oțel masiv și uleiul din cavitatea *7* este practic incompresibil, sînt realizate condițiile: $\varepsilon_z \neq 0$, $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$. O demonstrație riguroasă a condițiilor amintite, am dat-o în lucrarea [12].

Cu ajutorul instalației și metodei descrise, s-au obținut curbele prezentate în figurile: 4 (argilă cu 8% apă), 5 (argilă cu 13% apă), 6 (argilă cu 18% apă), 7 (argilă cu 23% apă). Toate aceste curbe au aspect asemănător cu cea din figura 1, prezentînd la început un sector liniar, iar ulterior un sector curbiliniu. Aceste curbe confirmă deci, în cazul rocilor argiloase, ipoteza admisă.

4.2. ASPECT STRUCTURAL. NOȚIUNEA DE STARE DE ECHILIBRU NATURAL

În privința curbelor prezentate în figurile 4, 5, 6, 7, se poate face remarca că, spre deosebire de curbele intrinseci ale rocilor, care se determină pentru atingerea stării limită (de curgere sau de rupere) a materialului la diverse mărimi ale stării de tensiune triaxială și care necesită deci un număr de probe pe care se fac încercările, egal cu numărul de puncte necesar trasării curbelor intrinseci, deoarece fiecare probă în parte se distruge la executarea încercării, curbele $\tau = f(\sigma)$ prezentate în figurile citate necesită, pentru trasarea lor, o singură probă care trece succesiv prin toate stadiile de transformare pe care le suferă o rocă dintr-un masiv odată cu creșterea adîncimii la care se află roca. Din acest punct de vedere, se poate spune despre curbele obținute de noi, că ele materializează,

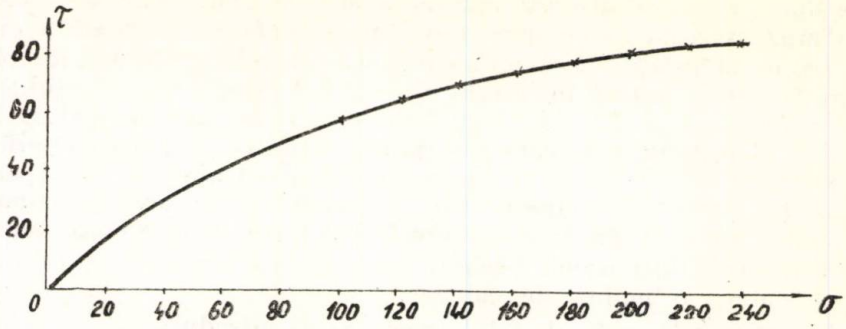


Fig. 4

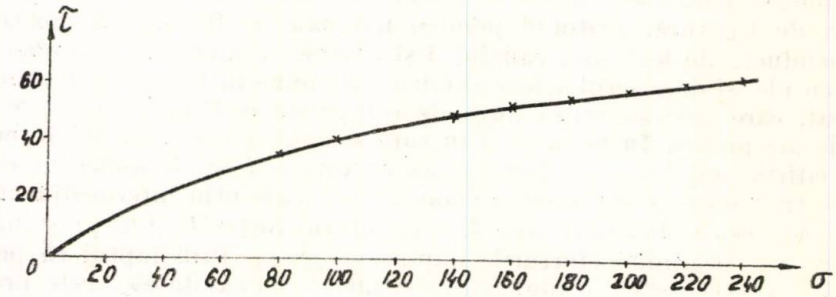


Fig. 5

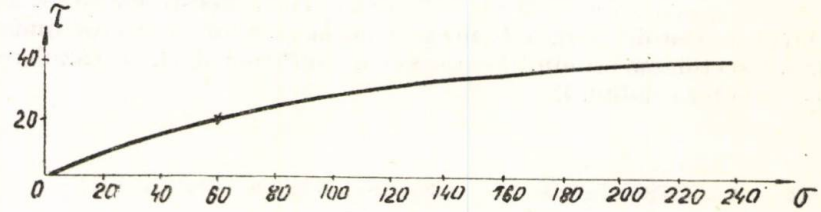


Fig. 6

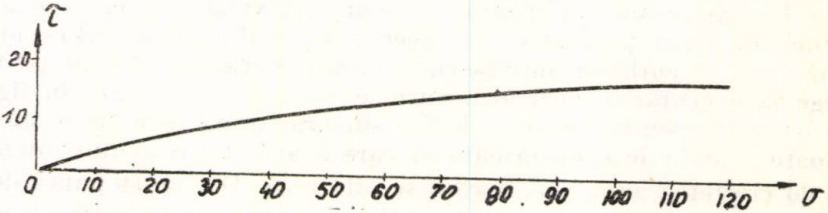


Fig. 7

sugestiv, diversele *stări de echilibru natural*, pe care le traversează roca în procesul de tasare. Pentru acest motiv, vom denumi curbele $\tau = f(\sigma)$ astfel obținute, *„curbe de echilibru natural"*.

Curbele de echilibru natural au, față de curbele intrinseci, avantajul de a permite o aproximare mai bună a fenomenelor reale care se petrec într-un masiv neatacat, fiind mult mai apropiate de condițiile naturale.

Deasemenea, vom denumi stările succesive prin care trece o rocă în procesul de tasare *„stări de echilibru natural"*.

În același timp, determinările necesare trasării unei curbe de echilibru natural făcîndu-se pe unul și același eșantion, se vor elimina o serie de erori care intervin în cazul trasării curbelor intrinseci datorită diferențelor inerente care se pot ivi între diversele eșantioane pe care se determină stările limită.

Spre deosebire de condițiile în care se ridică curbele intrinseci, în cazul în care se ridică curbele de echilibru natural, deformația laterală este împiedicată. Din acest motiv, la stările de compresiune triaxială mici, se va produce doar o deformare elastică în diversele puncte ale eșantionului supus la încercare. Cu cît va crește compresiunea pe verticală, σ_1, cu atît va crește și reacțiunea în direcția orizontală, $\sigma_2 = \sigma_3$, deoarece $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$*). Atîta timp cît eforturile unitare din diversele puncte ale materialului nu vor depăși coeziunea acestuia, se va produce doar o deformare elastică care se va materializa prin constanța raportului $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$, iar curba de echilibru natural va fi linară. Această deformare se va produce pe seama reducerii golurilor (porilor) existente în masa rocii. La depășirea unei anumite valori a lui σ_1, coeziunea materialului va fi depășită în acele puncte în care este mai mică. Din acest moment, la nivel structural, va începe o cedare a materialului și o redistribuire a lui în golurile existente în masa rocii. În această situație, schimbîndu-se structura materialului, se vor schimba și proprietățile sale mecanice. Această schimbare este reflectată de caracterul neliniar pe care începe să-l prezinte curba de echilibru natural. Din momentul apariției neliniarității, parametrii C_n, ρ_{0n} (vezi fig. 1), pot reda, cantitativ, schimbările structurale intervenite. Acești parametrii ar putea să aibă o semnificație fizică similară coeziunii materialului, C, și unghiului de frecare interioară, ρ_0, determinate cu ajutorul curbei intrinseci. Pentru a demonstra acest lucru, sînt necesare încercări experimentale suplimentare. Deocamdată, prin convenție, vom denumi acești doi parametrii : coeziune în stare de echilibru natural C_n, și unghi de frecare interioară în stare de echilibru natural, ρ_{0n}.

O indicație utilă despre semnificația fizică a parametrului C_n, o putem avea dacă vom compara între ele figurile 1 și 2. Astfel, pe figura 2, remarcam anterior că porțiunea neliniară AB, prin faptul că prezintă

*) Din cauza neomogenității și discontinuităților din interiorul rocilor, spre deosebire de σ_1, σ_2, σ_3, care reprezintă niște valori medii, eforturile unitare reale din interiorul unui eșantion supus la compresiune triaxială vor varia în funcție de poziția punctului în care se determină.

concavitatea îndreptată în sus, indică o consolidare a materialului din ce în ce mai accentuată. Dacă vom privi acum figura 1 se poate observa că și aici pe porțiunea neliniară AB se petrece un fenomen asemănător care este relevat de creșterea coeficientului C_n.

4.3. ASPECT MATEMATIC

4.3.1. *Distribuția eforturilor unitare în masivul neatacat, aflat în stare elastică de echilibru natural.*

Privind figura 8, se poate scrie :

$$\sigma = \frac{\sigma_{n1} + \sigma_{n3}}{2} + \frac{\sigma_{n1} - \sigma_{n3}}{2} \cos 2\varphi, \tag{4}$$

$$T = \frac{\sigma_{n1} - \sigma_{n3}}{2} \sin 2\varphi.$$

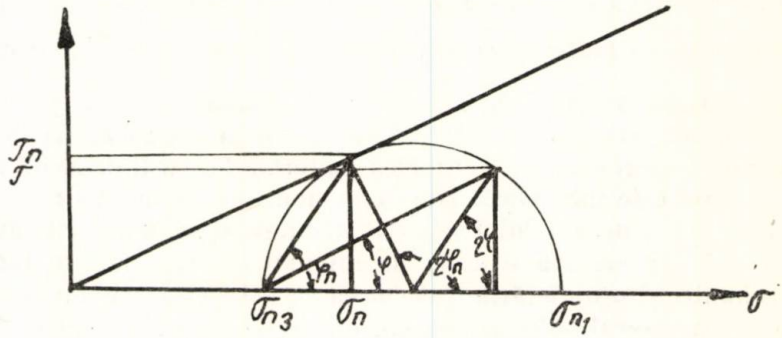


Fig. 8

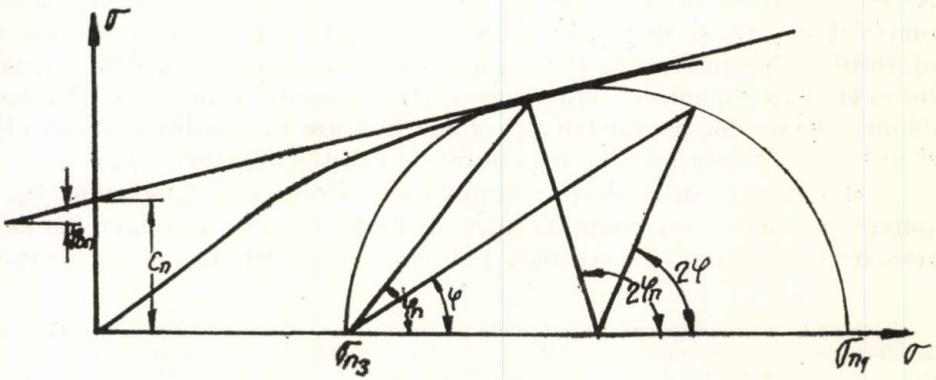


Fig. 9

Dacă calculăm eforturile unitare pe planul a cărui normală face unghiul φ_n cu σ_{n1}, atunci

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{n1} + \sigma_{n3}}{2} + \frac{\sigma_{n1} - \sigma_{n3}}{2} \cos 2\varphi, \tag{5}$$

$$T = \frac{\sigma_{n1} - \sigma_{n3}}{2} \sin 2\varphi_n.$$

Planul caracterizat prin φ_n, îl vom denumi „plan virtual de alunecare" această noțiune introdusă de noi referindu-se la starea de echilibru natural elastic al masivului.

Unghiul φ_n, are expresia

$$\varphi_n = \frac{\pi}{4} + \frac{\rho_{0n}}{2}. \tag{6}$$

Substituind (6) în (5) obținem

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{n1} + \sigma_{n3}}{2} - \frac{\sigma_{n1} - \sigma_{n3}}{2} \sin \rho_{0n}, \tag{7}$$

$$T_n = \frac{\sigma_{n1} - \sigma_{n3}}{2} \cos \rho_{0n}.$$

În coordonate polare, se poate scrie:

$$\sigma_r = \frac{\sigma_{n1} + \sigma_{n3}}{2} + \frac{\sigma_{n1} - \sigma_{n3}}{2} \cos 2\varphi,$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_{n1} + \sigma_{n3}}{2} - \frac{\sigma_{n1} - \sigma_{n3}}{2} \cos 2\varphi, \tag{8}$$

$$T_{r\theta} = \frac{\sigma_{n1} - \sigma_{n3}}{2} \sin 2\varphi.$$

În cazul în care $\varphi = \varphi_n$, avem:

$$\sigma_{rn} = \frac{\sigma_{n1} + \sigma_{n3}}{2} - \frac{\sigma_{n1} - \sigma_{n3}}{2} \sin \rho_{0n},$$

$$\sigma_{\theta n} = \frac{\sigma_{n1} + \sigma_{n3}}{2} + \frac{\sigma_{n1} - \sigma_{n3}}{2} \sin \rho_{0n}, \tag{9}$$

$$T_{r\theta n} = \frac{\sigma_{n1} - \sigma_{n3}}{2} \cos \rho_{0n}.$$

Condiția suplimentară introdusă pentru starea de echilibru natural în domeniul elastic, conform (3), este

$$\frac{\sigma_{n1}}{\sigma_{n3}} = m - 1. \tag{10}$$

Efortul unitar σ_{n1} reprezintă tocmai presiunea litostatică:

$$\sigma_{n1} = P = \gamma_r H. \tag{11}$$

Substituind (10) și (11) în (8), obținem

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{P}{2(m-1)}[m + (m-2)\cos 2\varphi], \\ \sigma_\theta &= \frac{P}{2(m-1)}[m + (m-2)\cos 2\varphi], \\ T_{r\theta} &= \frac{P(m-2)}{2(m-1)}\sin 2\varphi. \end{aligned} \tag{12}$$

Relațiile (12), sînt relațiile lui Fenner [13].

Procedînd analog cu (9), se obține distribuția eforturilor unitare într-un masiv în stare elastică de echilibru natural pe planele virtuale de alunecare:

$$\begin{aligned} \sigma_{rn} &= \frac{P}{2(m-1)}[m - (m-2)\sin\rho_{0n}], \\ \sigma_{\theta n} &= \frac{P}{2(m-1)}[m + (m-2)\sin\rho_{0n}], \\ T_{r\theta n} &= \frac{P(m-2)}{2(m-1)}\cos\rho_{0n}. \end{aligned} \tag{13}$$

Curba de echilibru natural în domeniul elastic, reprezintă înfășurătoarea familiei de cercuri (vezi fig. 8):

$$\left[\sigma - \frac{\sigma_{n1} + \sigma_{n3}}{2}\right]^2 + T^2 = \left(\frac{\sigma_{n1} - \sigma_{n3}}{2}\right)^2. \tag{14}$$

Substituind (10) în (14) se obține

$$4\sigma^2 - 4m\sigma_{n3}\sigma + m^2\sigma_{n3}^2 + 4T^2 = \sigma_{n3}^2(m^2 - 4m + 4). \tag{15}$$

Pentru determinarea ecuației înfășurătoarei, se derivează (15) în raport cu parametrul σ_{n3}:

$$-2m\sigma + m\sigma_{n3} = \sigma_{n3}(m^2 - 4m + 4). \tag{16}$$

Se elimină parametrul σ_{n3} între (16) și (15):

$$T = \pm A\sigma, \qquad A = \frac{m-2}{2\sqrt{m-1}}. \tag{17}$$

Ecuația (17) reprezintă înfășurătoarea familiei de cercuri (14). Această ecuație este liniară. S-a demonstrat astfel că, prin introducerea condiției (10), curba de echilibru limită este liniară în domeniul elastic.

În privința relațiilor (8) și (9) este de făcut următoarea remarcă: ambele grupuri de relații reprezintă distribuția eforturilor unitare într-un punct din masivul neatacat care se află în stare de echilibru natural în domeniul elastic, dar în timp ce (8) reprezintă distribuția eforturilor unitare pe un plan oarecare care trece prin punct, (9) reprezintă distribuția eforturilor unitare pe planul de alunecare virtuală.

Trebuie remarcat, în încheiere, că nu trebuie confundată starea de echilibru natural elastic, care este caracterizată prin mărimile σ_{n1} și σ_{n3}, cu starea de eforturi unitare din planul virtual de alunecare. Starea de eforturi din planul virtual de alunecare, este doar o consecință a apariției în material a stării de echilibru natural elastic, caracterizată prin σ_{n1} și σ_{n3}.

4.3.2. *Distribuția eforturilor unitare în masivul neatacat, aflat în stare de echilibru natural caracterizat printr-o curbă neliniară.* Pentru a putea să facem anumite considerații și să ajungem la unele interpretări în acest caz, vom asimila porțiunea neliniară a curbei de echilibru natural cu o parabolă care are ecuația

$$\sigma = aT^2 - b, \tag{18}$$

unde a, b, reprezintă constantele parabolei.

Ecuația generală a unei conice este

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{19}$$

Identificînd coeficienții între (19) și, (18) ($\sigma = y$, $T = x$), rezultă

$$a_{11} = a,\ 2a_{12} = 0,\ a_{22} = 0,\ 2a_{13} = 0,\ 2a_{23} = -1,\ a_{33} = -b. \tag{20}$$

Ecuația tangentei la o conică este

$$a_{11}x_0x + a_{12}(y_0x + x_0y) + a_{22}y_0y + a_{13}(x + x_0) + a_{23}(y + y_0) + a_{33} = 0. \tag{21}$$

Ecuația tangentei la curba (18), în punctul (T', σ'), este

$$\sigma = 2aT'T - (2b + \sigma'). \tag{22}$$

Panta acestei tangente (vezi fig. 9), folosind (7) (pentru $T_n = T'$) este

$$\operatorname{tg}\rho'_{0n} = 2aT' = a(\sigma'_{n1} - \sigma'_{n3})\cos\rho'_{0n}, \tag{23}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\rho'_{0n}}{\cos\rho'_{0n}} = a(\sigma'_{n1} - \sigma'_{n3}). \tag{24}$$

Notînd

$$\lambda' = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\rho'_{0n}}{2}\right), \tag{25}$$

rezultă

$$\operatorname{tg}\rho'_{0n} = \frac{\lambda'_n - 1}{2\sqrt{\lambda'_n}}, \tag{26}$$

$$\sin\rho'_{0n} = \frac{\lambda'_n - 1}{\lambda'_n + 1}, \tag{27}$$

$$\cos\rho'_{0n} = \frac{2\sqrt{\lambda'_n}}{\lambda'_n + 1}. \tag{28}$$

Din (24), prin înlocuiri cu ajutorul relațiilor (26), (28), se obține

$$\lambda'_n = \sqrt{(\sigma'_{n1} - \sigma'_{n3})\,a - 1}. \tag{29}$$

În (22), punînd condiția $\sigma = 0$, avem (vezi fig. 9):

$$T = C'_n = \frac{2b + \sigma'}{2T'}. \tag{30}$$

Înlocuind σ', T', cu expresiile similare din (7), rezultă

$$C'_n = \frac{4b + \sigma'_{n1} + \sigma'_{n3} - (\sigma'_{n1} - \sigma'_{n3})\sin\rho'_{0n}}{2a(\sigma'_{n1} - \sigma'_{n3})\cos\rho'_{0n}}. \tag{31}$$

În (31), înlocuind $\sin\rho'_{0n}$, $\cos\rho'_{0n}$ în funcție de λ'_n, cu ajutorul relațiilor (27), (28), și apoi λ'_n în funcție de σ'_{n1} și σ'_{n3}, cu ajutorul relației (29), se obține

$$C'_n = \frac{(4b + T'_{n1} + \sigma'_{n3})\left(\sqrt{(\sigma'_{n1} + \sigma'_{n3})\,a - 1} + 1\right) - (\sigma'_{n1} - \sigma'_{n3})\left(\sqrt{(\sigma'_{n1} - \sigma'_{n3})\,a - 1} + 1\right)}{4a(\sigma'_{n1} - \sigma'_{n3})\sqrt[4]{(\sigma'_{n1} - \sigma'_{n3})\,a - 1}}. \tag{32}$$

Relaţiile (29) şi (32), arată că în cazul unei curbe de echilibru natural neliniară, ρ_{0n} şi C_n, sînt nişte funcţii de starea de tensiuni atunci cînd relaţiile respective se scriu pentru un punct curent de pe această curbă:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= f_1(\sigma_{n1},\ \sigma_{n3}), \\ C_n &= f_2(\sigma_{n1},\ \sigma_{n3}), \\ \rho_{0n} &= f_3(\sigma_{n1},\ \sigma_{n3}). \end{aligned} \tag{33}$$

Din punct de vedere formal-matematic, acelaşi rezultat se obţine dacă în loc să se considere o curbă neliniară de echilibru natural, se consideră o curbă intrinsecă neliniară pe care o vom asimila cu o parabolă. În acest caz avem

$$\begin{aligned} \lambda &= f_1(\sigma_{L1},\ \sigma_{L3}), \\ C &= f_2(\sigma_{L1},\ \sigma_{L3}), \\ \rho_0 &= f_3(\sigma_{L1},\ \sigma_{L3}). \end{aligned} \tag{34}$$

Dacă vom considera fiecare punct în parte al curbei de echilibru natural şi vom determina tangentele în punctele respective, se poate observa (vezi fig. 9, punctele de coordonate $\sigma = \sigma'$, $T = T'$, de exemplu) că pentru cercul tensiunilor tangent la curbă într-un punct, se va putea trata problema liniar. În acest caz se va putea folosi relaţia (9) în coordonate polare, cu deosebirea că planul corespunzător unghiului φ_n este de data aceasta un plan real de alunecare şi nu unul virtual, cum se întîmplă în cazul unei curbe de echilibru natural cu alură liniară.

Dacă în (9) introducem condiţia:

$$\sigma'_{n1} = 2C'_n\sqrt{\lambda'_n} + \lambda'_n\sigma'_{n3} \tag{35}$$

care presupune proporţionalitatea între σ'_{n1} şi σ'_{n3} şi care se obţine din consideraţii geometrice elementare cu ajutorul figurii 9, după o serie de transformări, se obţin relaţiile:

$$\sigma'_{rn} = \frac{P}{2\left(\dfrac{2C'_n\sqrt{\lambda'_n}}{\sigma'_{n3}} + \lambda'_n\right)}\left[\frac{2C'_n\sqrt{\lambda'_n}}{\sigma'_{n3}} + \lambda'_n + 1 - \left(\frac{2C'_n\sqrt{\lambda'_n}}{\sigma'_{n3}} + \lambda'_n - 1\right)\sin\rho'_{0n}\right].$$

$$\sigma'_{\theta n} = \frac{P}{2\left(\dfrac{2C'_n\sqrt{\lambda'_n}}{\sigma'_{n3}} + \lambda'_n\right)}\left[\frac{2C'_n\sqrt{\lambda'_n}}{\sigma'_{n3}} + \lambda'_n + 1 + \left(\frac{2C'_n\sqrt{\lambda'_n}}{\sigma'_{n3}} + \lambda'_n - 1\right)\sin\rho'_{0n}\right], \tag{36}$$

$$T'_{r\theta n} = \frac{P\left(\dfrac{2C'_n\sqrt{\lambda'_n}}{\sigma'_{n3}} + \lambda'_n - 1\right)}{2\left(\dfrac{2C'_n\sqrt{\lambda'_n}}{\sigma'_{n3}} + \lambda'_n\right)}\cos\rho'_{0n}.$$

Pentru a scrie relaţiile (36) pentru un punct curent de pe porţiunea neliniară a curbei de echilibru natural, vom ţine seama de (33), (27) şi (28):

$$\sigma_{rn}=\frac{P}{2\left[\frac{2f_2(\sigma_{n1},\,\sigma_{n3})\sqrt{f_1(\sigma_{n1},\,\sigma_{n3})}}{\sigma_{n3}}+f_1(\sigma_{n1},\,\sigma_{n3})\right]}\left\{\frac{2f_2(\sigma_{n1},\,\sigma_{n3})\sqrt{f_1(\sigma_{n1},\,\sigma_{n3})}}{\sigma_{n3}}+\right.$$

$$\left.+f_1(\sigma_{n1},\,\sigma_{n3})+1-\left[\frac{2f_2(\sigma_{n1},\,\sigma_{n3})\sqrt{f_1(\sigma_{n1},\,\sigma_{n3})}}{\sigma_{n3}}+f_1(\sigma_{n1},\,\sigma_{n3})-1\right]\right\},$$

$$\sigma_{\theta n}=\frac{P}{2\left[\frac{2f_2(\sigma_{n1},\,\sigma_{n3})\sqrt{f_1(\sigma_{n1},\,\sigma_{n3})}}{\sigma_{n3}}+f_1(\sigma_{n1},\,\sigma_{n3})\right]}\left\{\frac{2f_2(\sigma_{n1},\,\sigma_{n3})\sqrt{f_1(\sigma_{n1},\,\sigma_{n3})}}{\sigma_{n3}}+\right.$$

$$\left.+f_1(\sigma_{n1},\,\sigma_{n3})+1+\left[\frac{2f_2(\sigma_{n1},\,\sigma_{n3})\sqrt{f_1(\sigma_{n1},\,\sigma_{n3})}}{\sigma_{n3}}+f_1(\sigma_{n1},\,\sigma_{n3})-1\right]f_3(\sigma_{n1},\,\sigma_{n3})\right\},\tag{37}$$

$$T_{r\theta n}=\frac{P\left[\frac{2f_2(\sigma_{n1},\,\sigma_{n3})\sqrt{f_1(\sigma_{n1},\,\sigma_{n3})}}{\sigma_{n3}}+f_1(\sigma_{n1},\,\sigma_{n3})-1\right]}{2\left[\frac{2f_2(\sigma_{n1},\,\sigma_{n3})\sqrt{f_1(\sigma_{n1},\,\sigma_{n3})}}{\sigma_{n3}}+f_1(\sigma_{n1},\,\sigma_{n3})\right]}f_3(\sigma_{n1},\,\sigma_{n3}).$$

Avînd în vedere forma destul de greoaie a expresiilor lui C_n şi ρ_{0n}, s-a preferat modul de mai sus de înlocuire a lui λ_n şi C_n, cu atît mai mult cu cît am aproximat partea neliniară a curbei de echilibru natural cu o parabolă, în timp ce în alte cazuri se pot ivi situaţii în care această aproximare să nu fie valabilă.

Cel mai comod este să rezolvăm problema grafo-analitic. Astfel, fără a schematiza curba de echilibru natural, se poate în schimb trasa într-un anumit punct al acestei curbe, pe cale grafică, tangenta. Se poate obţine apoi, tot grafic, C'_n şi ρ'_{0n}. În final, folosind relaţiile (36) se poate afla distribuţia eforturilor unitare în punctul respectiv.

Pe marginea obţinerii relaţiilor (36), trebuie făcute cîteva remarci importante.

În primul rînd se observă că aceste relaţii sînt valabile doar în anumite puncte, bine precizate, ale părţii neliniare de pe curba de echilibru natural. Variaţia distribuţiei eforturilor unitare în funcţie de poziţia unui punct de pe porţiunea neliniară a curbei de echilibru natural, este dată de relaţiile (37).

Fixîndu-se un anumit punct al curbei, este posibilă aplicarea relaţiei (35), care presupune proporţionalitate între σ_{n1} şi σ_{n3}. Însă, de la punct la punct, pe porţiunea neliniară a curbei de echilibru natural, coeficientul

de proporționalitate dintre cele două mărimi variază. *Raportul* $\frac{\sigma_{n1}}{\sigma_{n3}}$, *care se numește în mod uzual coeficient de împingere laterală și este constant pe porțiunea liniară a curbei de echilibru natural, va deveni deci variabil pe porțiunea neliniară și anume* $\cdot \frac{\sigma_{n1}}{\sigma_{n3}} = f_4(\sigma_{n1}, \sigma_{n3})$. Acest lucru se poate observa și pe curbele de echilibru natural prezentate în figurile 4—7, care au fost obținute pentru argile cu diverse umidități.

Modul matematic de abordare al problemei, ne sugerează o analogie formală între raportul $\frac{\sigma_{n1}}{\sigma_{n3}}$ din cazul părții liniare a curbei de echilibru natural și același raport din porțiunea neliniară.

Astfel, deoarece $\frac{\sigma_{n1}}{\sigma_{n3}} = m - 1$ pe porțiunea liniară, putem nota, analog,

$$\frac{\sigma'_{n1}}{\sigma'_{n3}} = K' - 1 \tag{38}$$

pe porțiunea neliniară.

Semnificația fizică a simbolului K este că pentru unul și același punct al porțiunii neliniare de pe curba de echilibru natural, el reprezintă o constantă care caracterizează proprietățile mecanice ale materialului, întocmai cum constanta lui Poisson, m, caracterizează aceste proprietăți pe toată porțiunea liniară. Avînd însă în vedere schimbările structurale ale materialului care sînt reflectate de porțiunea neliniară a acestei curbe, proprietățile mecanice ale materialului și deci coeficientul K, vor prezenta un caracter variabil.

Din cele de mai sus rezultă că analogia sugerată de abordarea matematică, prezintă și un conținut fizic.

Folosindu-ne de analogia relevată, propunem, pentru porțiunea neliniară a curbei de echilibru natural, introducerea coeficientului K. Expresia acestui coeficient, într-un punct bine precizat de pe curba de echilibru natural, pe porțiunea neliniară, se obține prin împărțirea relației (35) cu σ'_{n3}:

$$\frac{\sigma'_{n1}}{\sigma'_{n3}} = \frac{2C'_n\sqrt{\lambda'_n}}{\sigma'_{n3}} + \lambda'_n. \tag{39}$$

Comparînd (38) cu (39), rezultă:

$$K' = \frac{2C'_n\sqrt{\lambda'_n}}{\sigma'_{n3}} + \lambda'_n + 1. \tag{40}$$

Pentru un punct curent, ținînd seama de (33),

$$K = \frac{2f_2(\sigma_{n1}, \sigma_{n3})\sqrt{f_1(\sigma_{n1}, \sigma_{n3})}}{\sigma_{n3}} + f_1(\sigma_{n1}, \sigma_{n3}) + 1. \tag{41}$$

Prin înlocuirea lui m din relațiile (13) cu expresia lui K' dată de (40), se pot obține relațiile (36). Acest lucru confirmă din nou justețea introducerii coeficientului K.

Avînd în vedere că există similitudine între mărimile C și C_n și ρ_0 și ρ_{0n} din cazul curbelor de echilibru natural neliniare, respectiv din cazul curbelor intrinseci neliniare ale rocilor, coeficientul K poate fi extins și la curbele intrinseci neliniare. În acest caz avem :

$$\frac{\sigma'_{L1}}{\sigma'_{L3}} = \frac{2C'\sqrt{\lambda'}}{\sigma'_{L3}} + \lambda', \tag{42}$$

$$K' = \frac{2C'\sqrt{\lambda'}}{\sigma'_{L3}} + \lambda' + 1, \tag{43}$$

$$K = \frac{2f_2(\sigma_{L1}, \sigma_{L3})\sqrt{f_1(\sigma_{L1}, \sigma_{L3})}}{\sigma_{L3}} + f_1(\sigma_{L1}, \sigma_{L3}) + 1. \tag{44}$$

În lucrarea [14] am propus, pentru curbele intrinseci neliniare, introducerea coeficientului K' dat de relația (43), plecînd de la o analogie formală. În lucrarea de față, am căutat să dăm și un conținut fizic acestei analogii, extinzînd introducerea acestui coeficient și la curbele de echilibru natural.

5. CONSIDERAȚII FINALE

Încercînd să aruncăm o privire retrospectivă asupra celor discutate în legătură cu starea de echilibru natural al unei roci dintr-un masiv neatacat, se observă că acest echilibru se manifestă printr-o stare de deformare elastică la nivel structural, iar ulterior, după depășirea unei anumite adîncimi critice, prin schimbări structurale.

Schimbările structurale care se produc, reflectă tendința de adaptare a corpului la starea de tensiuni, în sensul că, odată cu mărirea stării de tensiuni, proprietățile mecanice ale rocilor se îmbunătățesc. Îmbunătățirea proprietăților mecanice ale rocilor este facilitată de faptul că, odată cu depășirea stării elastice de echilibru natural, începe să se producă o cedare a materialului la nivel structural și o redistribuire a lui în golurile existente în masa rocilor.

Curba de echilibru natural redă sugestiv schimbările care se produc la nivel structural.

Pentru a se putea aplica o relație liniară în porțiunea neliniară a curbei de echilibru limită, este necesar să se determine tangenta în fiecare punct al acestei curbe.

Trebuie remarcat în mod deosebit că acest fel de a privi lucrurile nu trebuie interpretat ca o extindere a liniarității în domeniul neliniar al curbei de echilibru natural deoarece, așa cum rezultă din (29) și (32), parametrii care caracterizează tangenta la curbă sînt niște funcții de starea de tensiuni.

6. NOTAȚII

σ_1, σ_2, σ_3 — eforturi unitare principale;
σ_{L1}, σ_{L3} — eforturi unitare principale: maxim și minim, care caracterizează starea limită;
σ_{n1}, σ_{n3} — eforturi unitare principale: maxim și minim, care caracterizează starea de echilibru natural;
σ_{rn}, $\sigma_{\theta n}$ — eforturi unitare normale, în coordonate polare, în direcțiile razei și tangentei, pentru unghiul φ_n;
$T_{r\theta n}$ — efortul unitar tangențial, în coordonate polare, pentru unghiul φ_n;
φ_n — unghiul pe care îl face normala la planul de cedare ce trece printr-un punct aflat în stare de echilibru natural, cu direcția efortului unitar principal σ_{n1};
P — presiunea litostatică;
ε_x, ε_y, ε_z — alungirile sau scurtările specifice în direcțiile axelor x, y, z;
C — coeziunea materialului;
ρ_0 — unghiul de frecare interioară;
C_n — coeziunea în stare de echilibru natural;
ρ_{0n} — unghiul de frecare interioară în stare de echilibru natural
m — numărul lui Poisson.

Notă. În relațiile în care apare indicele prim, acesta se referă la un punct anumit de pe curba de echilibru natural, iar acolo unde nu apare acest indice, relațiile sînt valabile pentru un punct curent de pe curba de echilibru natural.

În cuprinsul lucrării se folosesc denumirile: „mărimea stării de tensiune triaxială", caracterizată prin valoarea efortului unitar principal minim, σ_{nz}, și „intensitatea stării de tensiune triaxială" caracterizată, în cazul adoptării teoriei lui O. Mohr, prin mărimea deviatorului eforturilor unitare principale, $\sigma_{n1} - \sigma_{n3}$.

Primită la redacție la 9 octombrie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. M. P. Timbarevici, *Mecanica rocilor*, Moscova, 1948.
2. M. Stamatiu, *Mecanica rocilor*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1965.
3. G. Baron, P. Habib, P. Morlier, *Déformations des roches sous contraines. Phénomènes physico-mécaniques apparissant dans les roches entrées dans le domaine ductile*, Revue de l'Institut Français du Pétrole, *Hors—Série*, p. 97—131 (1963).
4. G. Baron, P. Habib, Y. Castel, *Déformations des roches sous contraines. Influence de la pression interstitielle sur les caractéristiques mécaniques des roches en conditions de fond* Revue de l'Institut Français du Pétrole, *Hors—Série*, p. 78—96 (1963).
5. A. Mayer, J. Bernede, *Mesures des contraines dans le terrain en place en roches tendres ou sensibles à l'humidité* (Lucrările Primului Congres al Societății Internaționale de Mecanica Rocilor), Lisabona, tema 4, p. 41—44 (1966).
6. G. Oberti, *Mesures des contraines naturelles dans les massifs rocheux* (Lucrările Primului Congres al Societății Internaționale de Mecanica Rocilor) Lisabona, tema 4, p. 31—34 (1966).
7. M. Borecki, A. Kidybinski, *Problems of stress measurements in rocks taken in the Coal-mining Polish Industry* (Lucrările Primului Congres al Societății Internaționale de Mecanica Rocilor) Lisabona, tema 4, p. 9—16 (1966).

8. Ko Suzuki, *Fundamental study on the rock stress measurement by berhole deformation method* (Lucrările Primului Congres al Societății Internaționale de Mecanica Rocilor), Lisabona, Tema 4, p. 35—39 (1966).
9. V. T. Galușko, A. Z. Sirokov, *Mecanica rocilor și susținerea lucrărilor subterane*, Kiev, Academia Nauk S.S.S.R., 1967.
10. J. A. Talobre, *La mécanique des roches et ses applications*, Paris, Dunod, 1967.
11. A. Caquot, J. Kreisler, *Tratat de mecanica pămînturilor*, Edit. tehnică, 1968.
12. Gorun Manolescu, *Contribuții la problema stabilității găurilor de sonde*, Teză de doctorat, București, I.P.G.G., 1969.
13. R. Fenner, Cercetarea presiunii rocilor, *Probleme din teoria presiunii rocilor*, Moscova, 1961, p. 5—58.
14. Gorun Manolescu, *Studiul concentrării eforturilor unitare în jurul găurilor de sonde*, St. cerc. mec. aplic., **29**, *4*, *5*, 749—775 (1970).
15. H. L. Overton, D. J. Timko, *The salinity factor A tectonic stress indicator in marine sands*, Oil and Gas Journal, **67**, *40*, p. 115—121 (1969).
16. Ben A. Eaton, *Fracture Gradient Prediction and its Application in Oilfield Operations*, Journal of Petroleum Technology, **21**, *octombrie* p. 1353—1360 (1969).
17. B. Haimson, G. Fairhurst, *Hydraulic Fracturing in Porous-Permeable Materials*, Journal of Petroleum Technology, **21**, *iulie*, p. 811—817 (1969).
18. K. M. Hubbert, D. G. Willis, *Mechanics of Hydraulic Fracturing*, Trans. A.I.M.E., *210*, p. 153—166 (1967).
19. H.C.H. Darley, *A laboratory Investigation of Berhole Stability*, Journal of Petroleum Technology, **21**, *iulie*, p. 883—892 (1969).
20. B. B. Mc. Gothlin, J. L. Huitt, *Relation of Formation Rock Strenght to Propping Agent Strenght in Hydraulic Fracturing*, Journal of Petroleum Technology, **18**, *martie*, p. 377—384 (1966).
21. Gorun Manolescu, *Stadiul actual al problemei stabilității găurilor de sondă*, Petrol și Gaze, **21**, *5*, 274—280 (1970).
22. R. L. Zencov, *Mecanica corpurilor necoezive*, Moscova, 1952.
23. A. Nadai, *Theory of Flow and Fracture of Solids*, New York, Mc. Graw-Hill, 1950.
24. K. Terzaghi, *Mécanique théoretique des sols*, Paris, Dunod, 1951.
25. R. L'Hermite, *Résisaénce des matériaux, théorique et expérimentale*, Paris, Dunod, 1953.
26. L. Solomon, *Elasticitatea liniară*, București, Edit. Academiei, 1969.
27. M. Mișicu, *Mecanica mediilor deformabile*, București, Edit. Academiei, 1967.
28. V. V. Socolovski, *Teoria plasticității*, București, Edit. tehnică, 1954.
29. Gorun Manolescu, *Instabilitatea formațiunilor argiloase*, Petrol și Gaze, **13**, *II*, 457—482 (1962).
30. Gorun Manolescu, *Determinarea greutății specifice a noroiului de foraj, necesară pentru menținerea stabilității găurii de sondă*, Petrol și Gaze, **20**, *II*, 791—796 (1969).
31. G. P. Tschebotarioff și colab., *Large scale triaxial cell tests*, Princenton University, 1956.
32. P. H. Jones, *Hydrodinamics of Geopressure in the Northen Gulf of Mexico Basin*, Journal of Petroleum Technology, **21**, *iulie*, p. 803—810 (1969).
33. N A. Tîtovici, *Mecanica pămînturilor*, Moscova, 1955.
34. N. N. Maslov, *Geologia inginerească*, Moscova, 1950.
35. I. Stănculescu, *Încercarea pămînturilor pentru fundații*, București, Edit. tehnică, 1950.
36. D. Stan, L. Constantinescu, I. Stănculescu, *Stabilitatea structurală a pereților golurilor din masive de sare*, Buletinul I.P.G.G. **13** (1965).
37. S. D. Ponomariov și colab., *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, ed. a 2-a, vol. I, București, Edit., tehnică, 1963.
38. Gorun Manolescu, *Repartizarea tensiunilor în jurul găurilor de sonde înclinate, executate în medii elastice, omogene și izotrope*, Petrol și Gaze, **17**, *9*, p. 463—468 (1966).
39. G. Savin, *Stress concentrations around holes*, New York, Pergamon Press, 1961.
40. K. V. Ruppeneit, I. A. Pesleak, *Teoria presiunii rocilor și metode de calcul ale coloanei de tubaj*, Moscova, 1961.

Academicianului ȘTEFAN BĂLAN în semn de omagiu cu prilejul împlinirii a 60 de ani de viață

CERCETĂRI PRIVIND CONLUCRAREA ANSAMBLELOR DE ELEMENTE DIN BETON CELULAR LA SOLICITĂRI ORIZONTALE *

de MIRCEA V. SOARE
Institutul de Construcții București
și
MIHAI SIMONICI
Institutul de cercetări în Construcții și Economia Construcțiilor (INCERC) București

Se dezvoltă studiul teoretic al comportării unui număr de cinci tipuri de fragmente de șaibă, alcătuite din plăci de beton celular autoclavizat, în vederea determinării modului de lucru a diferitelor tipuri de îmbinări ca : monolitizarea cu beton greu în rosturile longitudinale, dibluri lucrînd la forfecare sau lunecare, centuri de beton armat în rosturile transversale. Datele de calcul au fost comparate cu cele experimentale, obținîndu-se rezultate concordante. În alte situații, pe baza experimentărilor efectuate, au fost determinate caracteristici fizico-mecanice ale betonului celular autoclavizat.

1. INTRODUCERE

Betonul celular autoclavizat s-a dovedit un material de construcție cu numeroase calități, în special în privința greutății volumetrice și a conductivității termice; în străinătate au fost realizate numeroase construcții la care acoperișul, pereții și chiar planșeele de la ultimul nivel sînt din plăci de b.c.a.

O serie de dezavantaje ale acestui material, cum ar fi rezistența foarte redusă la întindere, adeziunea slabă de betonul (sau mortarul) obișnuit, corodarea armăturilor neprotejate, sensibilitatea extremă la șocuri etc., împreună cu unele particularități specifice țării noastre (în special seismicitatea), au ridicat problema cunoașterii mai aprofundate a caracteristicilor acestui material, în vederea stabilirii domeniului de aplicabilitate, a condițiilor de lucru și a elaborării unei metode de calcul.

În principal, problema care se punea era de a ști dacă plăcile de b.c.a. pentru acoperirea halelor industriale pot fi îmbinate între ele în mod satisfăcător și dacă au capacitatea de a forma o șaibă rigidă și dacă, în consecință, pot fi utilizate în regiuni cu grad de seismicitate superior lui 6.

* Lucrarea a fost comunicată de către primul dintre autori la sesiunea de comunicări științifice „Probleme actuale de mecanică" a Academiei Republicii Socialiste România, Secția de Științe Tehnice, București, 18 decembrie 1972

Problema care se punea avea un caracter foarte complex, atît din punctul de vedere al numeroşilor parametri de ordin constructiv şi de calcul care intervin, cît şi al dificultăţilor de a experimenta şaibe de dimensiuni mai mari.

Dintre parametrii care intervin se menţionează :

— caracteristicile fizico-mecanice ale b.c.a. şi schemele de încărcare ;

— varietatea mijloacelor de îmbinare (mortar în rosturi, dibluri de beton greu, centuri armate de monolitizare) ;

— concomitenţa a două sau mai multe mijloace de îmbinare şi eficacitatea fiecăruia ;

— dimensiunile în plan ale şaibei de acoperiş şi condiţiile ei de rezemare.

Experimentarea unei şaibe de acoperiş de circa 200 m^2 suprafaţă în plan, la scară naturală, luată în discuţie iniţial, prezintă o serie de dezavantaje, practic inevitabile şi anume :

— durată mare de experimentare şi deci obţinerea tîrzie a concluziilor experimentării ;

— cost extrem de ridicat şi consum mare de materiale ;

— dificultatea de a realiza un dispozitiv experimental care să simuleze acţiunea seismică.

Aceste consideraţii au condus la ideea de a face cercetări experimentale pe fragmente de şaibă de dimensiuni moderate şi de a le compara cu datele de calcul. În ipoteza unei corespondenţe satisfăcătoare între rezultatele teoretice şi cele experimentale, efectul de şaibă al acoperişului poate fi apreciat prin aplicarea metodei de calcul folosite pentru studierea fragmentelor de şaibă.

Obiectul prezentului studiu este de a indica rezultatele teoretice pentru cazurile de fragmente de şaibă încercate pînă la rupere în cadrul INCERC. Ţinînd seama că documentaţia cunoscută [2], [8] are un caracter empirico-experimental, s-a căutat abordarea mai riguroasă a metodelor teoriei elasticităţii plane. Valorile numerice au indicat o bună concordanţă cu datele experimentale, putînd servi uneori la determinarea caracteristicilor fizico-mecanice ale betonului celular autoclavizat.

2. STUDIUL UNUI FRAGMENT DE ŞAIBĂ

Experimentările unor fragmente de şaibă au avut drept obiectiv principal cunoaşterea modului de lucru (cantitativ) al fiecărui element de îmbinare (mortar greu în rosturile longitudinale, dibluri de beton greu, monolitizarea transversală).

Fragmentele au fost alcătuite din maxim şase plăci de b.c.a. de 6,00 × 0,60 × 0,20 m, de calitatea GSB 50, ţinînd seama de dimensiunile instalaţiei de încercat disponibilă.

Tipurile experimentate, în număr de cinci, au fost reprezentate în figura 1, fiind notate cu simbolurile *A*, *B*, *C*, *D*, *E*.

2.1. TIPUL A

Fragmentul de șaibă tip *A* este alcătuit din șase plăci de b.c.a., dispuse ca în planșa 1. Rezultă astfel o șaibă de lungime $2\ l = 12{,}00$ m și lățime $3\ b = 1{,}80$ m.

Rosturile longitudinale sînt umplute cu mortar; rostul transversal, situat deasupra unei grinzi, a fost studiat în două variante

— umplerea simplă cu mortar (nu există mustăți);

— realizarea unei centuri, prin înglobarea mustăților care ies din grindă și prevederea a două bare Ø 8 mm la partea superioară a rostului.

Pentru a putea studia comportarea rosturilor longitudinale, schema de încărcare prevedea aplicarea, la un capăt al șaibei, a unei sarcini $2\ p$ distribuite pe lățimea b a plăcii mijlocii și la celălalt capăt, a unor sarcini p pe cele două plăci marginale (fig. 1).

Studiul analitic este mai simplu și totodată se obține o imagine mai clară a stării de eforturi în șaibă dacă se separă încărcarea reală în trei încărcări elementare, folosind proprietățile de simetrie și de antisimetrie (fig. 2).

Încărcarea 1 reprezintă o compresiune simplă în lungul șaibei, corespunzînd eforturile unitare

$$\sigma_x \equiv 0, \qquad \sigma_y = -0{,}5p, \qquad \tau_{xy} \equiv 0. \tag{1}$$

Încărcarea 2 constă în aplicarea locală a unei sarcini de compresiune. Starea de eforturi a fost determinată cu ajutorul metodei diferențelor finite [3] pentru o rețea cu ochiuri dreptunghiulare $\Delta x = b/4 = 0{,}15$ m și $\Delta y = l/6 = 5\ b/3 = 1{,}00$ m. Rețeaua astfel rezultată a fost reprezentată în figura 3.

Se știe că, în teoria elasticității plane, problema poate fi redusă la căutarea soluției ecuației biarmonice

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0, \tag{2}$$

în care funcția de eforturi satisface anumite condiții la limită prescrise. În cazul de față, pentru un nod curent m, n, ecuația cu diferențe finite dedusă din (2) se scrie:

$$\begin{aligned}(6 + 8\,\alpha + 6\alpha^2)\,F_{m,n} - 4(1+\alpha)\,(F_{m+1,n} + F_{m-1,n}) - 4\alpha(1+\alpha) \times \\ \times\,(F_{m,n+1} + F_{m,n-1}) + F_{m+2,n} + F_{m-2,n} + \alpha^2(F_{m,n+2} + F_{m,n-2}) + \\ + 2\alpha(F_{m+1,n+1} + F_{m-1,n+1} + F_{m+1,n-1} + F_{m-1,n-1}) = 0 \\ (m,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5),\end{aligned} \tag{3}$$

în care s-a notat

$$\alpha = \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 = 0{,}0225.$$

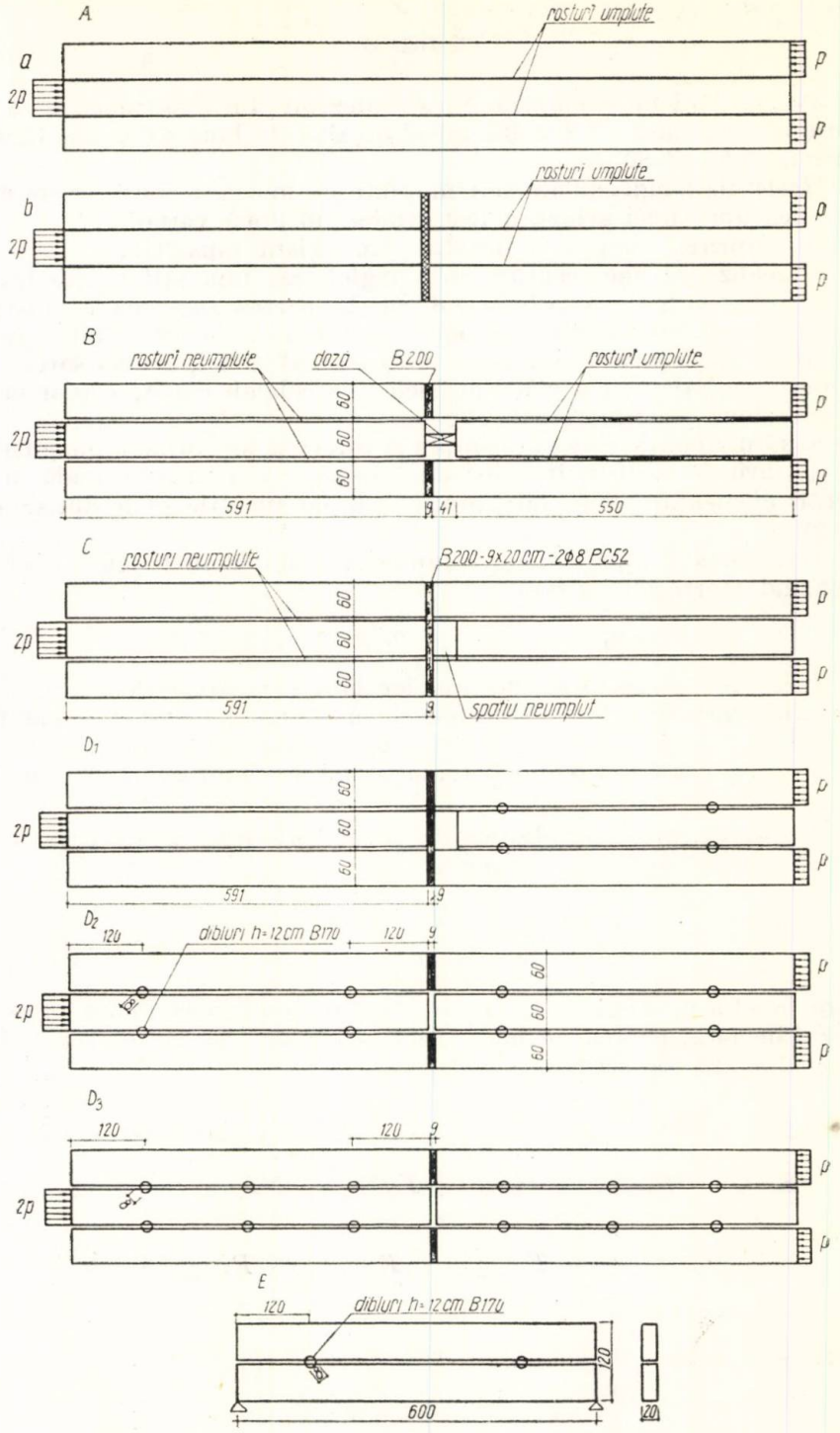


Fig. 1. — Tipurile de fragmente de șaibă studiate.

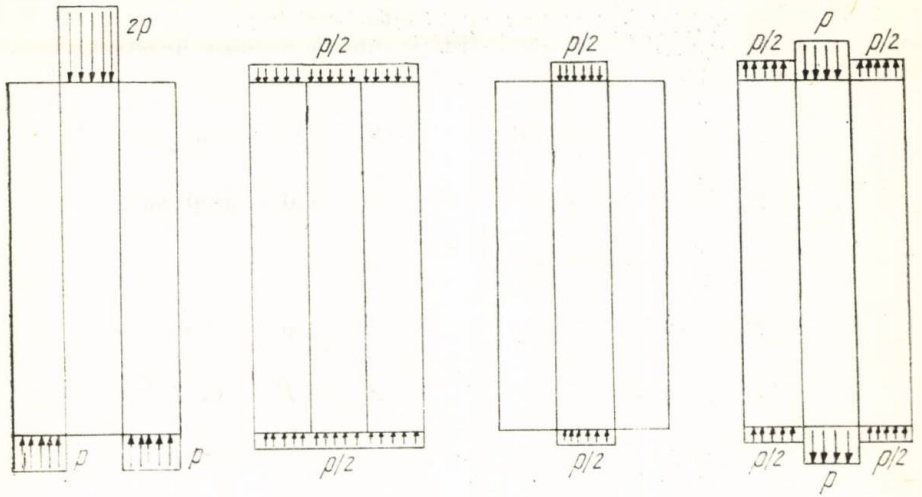


Fig. 2. — Schema de încărcare pentru fragmentul de șaibă tip A.

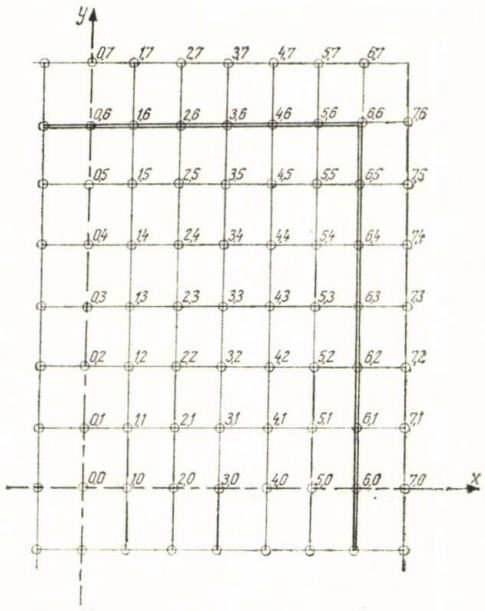


Fig. 3. — Rețeaua de puncte pentru aplicarea diferențelor finite.

Scriind ecuații de tipul (3) pentru toate nodurile interioare ale rețelei, intervin ca necunoscute și valorile funcției pe contur și în vecinătatea conturului. Ținînd seama de condițiile la limită impuse, aceste valori pot fi determinate în prealabil:

$$F_{0,6} = 0{,}312500\ pb^2; \qquad F_{3,6} = 0{,}187500\ pb^2,$$

$$F_{1,6} = 0{,}296875\ pb^2; \qquad F_{4,6} = 0{,}125000\ pb^2,$$

$$F_{2,6} = 0{,}250000\ pb^2; \qquad F_{5,6} = 0{,}062500\ pb^2$$

$$F_{6,i} = 0 \qquad (i = 0,1, \ldots 6)$$

$$F_{0,7} = F_{0,5}; \qquad F_{7,6} = F_{5,6} - 0{,}125\ pb^2 =$$

$$= + 0{,}062500\ pb^2,$$

$$F_{i,7} = F_{i,5} \qquad (i = 1,2, \ldots 6),$$

$$F_{7,i} = F_{5,i} - 0{,}125\ pb^2 \qquad (i = 0,1, \ldots 5).$$

Rădăcinile sistemului de 36 ecuații astfel rezultat au fost trecute în tabela 1

Eforturile unitare se deduc din funcția de eforturi cu ajutorul relațiilor

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

sau, transcrise în diferențe finite,

$$\sigma_{x,m,n} = \frac{0{,}36}{b^2}(F_{m,n+1} - 2F_{m,n} + F_{m,n-1}),$$

$$\sigma_{y,m,n} = \frac{16}{b^2}(F_{m+1,n} - 2F_{m,n} + F_{m-1,n}), \qquad (4)$$

$$\tau_{xy,m,n} = -\frac{0{,}6}{b^2}(F_{m+1,n+1} - F_{m-1,n+1} - F_{m+1,n-1} + F_{m-1,n-1}).$$

Valorile numerice rezultate sînt trecute în tabela 1.

Încărcarea 3 constă în aplicarea unor sarcini distribuite la ambele capete ale șaibei, dispuse simetric în raport cu axa y și antisimetric în raport cu axa x. Datorită acestei particularități, funcția F ia valori nule în punctele situate pe axa x și sistemul de ecuații de tipul (3) cuprinde doar 30 necunoscute.

Tabela 1

Încărcarea simetrică 2 Valori: $F_{m,n}/pb^2$, $\sigma_{x,m,n}/p$, $\sigma_{y,m,n}/p$, $\tau_{xy,m,n}/p$

$m =$ / $n =$	0	1	2	3	4	5	6
6	0,312.500 −0,068.98 −0.500.00 0	0,296.875 −0,062.75 −0,250.00 0	0,250.000 −0.043.78 −0,250.00 0	0,187.500 −0.009.46 0 0	0,125.000 −0,009.02 0 0	0,062.500 −0,001.97 0 0	0 0 0 0
5	0,216.69 +0,025.20 −0,223.04 0	0,209.72 +0,001.84 −0,175.36 0,036.49	0,189.19 +0,014.71 −0,197.60 0,039.76	0,156.47 +0,006.21 −0,175.36 0,036.49	0,112.47 +0,000.84 −0,141.76 0,024.10	0,059.77 +0,000.18 −0,113.12 0,011.97	0 0 −0,087.36 0
4	0,190.88 +0,008.13 −0,173.44 0	0,185.46 0,007.64 −0,172.96 0,003.97	0,169.23 0,006.30 −0,170.24 0,007.00	0,142.36 0,004.42 −0,170.24 0,007.00	0,105.05 0,002.36 −0,163.36 0,007.89	0,057.53 0,000.72 −0,160.16 0,004.97	0 0 −0,159.04 0
3	0,187.66 0,001.11 −0,167.36 0	0,182.42 0,001.05 −0,166.72 0,000.49	0,166.77 0,000.85 −0,167.04 0,000.49	0,140.68 0,000.85 −0,166.40 0,001.01	0,104.19 0,000.30 −0,166.56 0,000.90	0,057.29 0,000.09 −0,166.24 0,000.90	0 0 −0,166.72 0
2	0,187.49 0,000.06 −0,166.40 0	0,182.29 0,000.05 −0,166.88 0,000.04	0,166.66 0,000.04 −0,166.56 0,000.04	0,140.62 0,000.02 −0,166.72 0,000.07	0,104.16 0,000.01 −0,166.56 0,000.04	0,057.29 0,000.00 −0,166.72 0,000.02	0 0 −0,166.72 0
1	0,187.49 0,000.00 −0,166.40 0	0,182.29 0,000.00 −0,166.88 0,000.00	0,166.66 0,000.00 0,166.56 0,000.00	0,140.62 0,000.00 −0,166.56 0,000.00	0,104.16 0,000.00 −0,166.56 0,000.00	0,057.29 0,000.00 −0,166.72 0,000.00	0 0 −0,166.72 0
	0,187.49 0,000.00 −0,166.40 0	0,182.29 0,000.00 −0,166.88 0	0,166.66 0,000.00 −0,166.56 0	0,140.62 0,000.00 −0,166.72 0	0,104.16 0,000.00 −0,166.56 0	0,057.29 0,000.00 −0,166.72 0	0 0 −0,166.72 0

Condițiile la limită corespunzătoare sînt:

$$F_{0,6} = 0{,}375000\ pb^2; \qquad F_{3,6} = 0{,}140625\ pb^2,$$

$$F_{1,6} = 0{,}343750\ pb^2; \qquad F_{4,6} = 0{,}062500\ pb^2,$$

$$F_{2,6} = 0{,}250000\ pb^2; \qquad F_{5,6} = 0{,}015625\ pb^2$$

$$F_{6,i} = 0 \qquad (i = 0{,}1, \ldots 6),$$

$$F_{i,7} = F_{i,5} \qquad (i = 0{,}1, \ldots 6),$$

$$F_{7,6} = F_{5,6} - 0{,}015625\ pb^2;$$

$$F_{7,i} = F_{5,i} \qquad (i = 0{,}1, \ldots 5),$$

$$F_{i,0} = 0 \qquad (i = 0{,}1, \ldots 7).$$

Rădăcinile sistemului de 30 ecuații astfel rezultat au fost trecute în tabela 2, împreună cu valorile eforturilor unitare, deduse cu ajutorul relațiilor (4).

Pentru prima variantă de alcătuire a rostului transversal (cînd se consideră că grinda nu împiedică deplasările în planul șaibei), starea de eforturi finală rezultă prin suprapunerea celor trei cazuri de încărcare elementare; valorile corespunzătoare ale eforturilor unitare σ_x, σ_y, τ_{xy} au fost trecute în tabela 3.

Examinarea acestor valori numerice înscrise în tabela 3 denotă, așa cum era de așteptat, comportarea de grindă-perete a fragmentului de șaibă considerat.

Pe direcția y, șaiba lucrează la compresiuni care se uniformizează rapid în secțiunea transversală, pe măsură ce ne depărtăm de capetele încărcate. Valoarea maximă a eforturilor unitare σ_y este

$$\sigma_{y,\max} = -2p \quad \text{(compresiune)}.$$

Pe direcția x, șaiba lucrează la încovoiere ca o grindă-perete; pentru $y = l$, corespunde efortul unitar maxim

$$\sigma_{x,\max} = -0{,}293\ p \quad \text{(compresiune)}.$$

Eforturile unitare tangențiale ating valoarea maximă în secțiunea $x = b/2$ (rostul longitudinal)

$$\tau_{xy,\max} = 0{,}160\ p.$$

La experimentare, încărcarea $2p$ s-a realizat prin aplicarea unei forțe concentrate (prese) pe placa centrală, prin intermediul unei plăci metalice.

Tabela 2

Încărcarea antisimetrică 3 Valori: $T_{m,n/p b^2}$ $\sigma_{x,m,n/p}$ $\sigma_{y,m,n/p}$ $\tau_{xy,m,n/p}$

$m =$ $n =$	0	1	2	3	4	5	6
6	0,375.00 −0,224.06 −1,000.00 0	0,343.75 −0,204.83 −1,000.00 0	0,250.00 −0,148.23 −0,250.00 0	0,140.625 −0,079.10 +0,500.00 0	0,062.50 −0,033.10 +0,500.00 0	0,015.625 −0.008.18 +0,500.00 0	0 0 +0,500.00 0
5	0,063.81 0,091.18 −0,260.16 0	0,059.27 0,083.05 −0,124.64 0,074.06	0,046.94 0,057.77 −0,061.60 0,110.71	0,030.76 0,029.49 +0,012.64 0,110.71	0,015.37 0,011.92 −0,068.64 0,073.51	0,004.27 0,002.67 0,109.28 0,036.69	0 0 0,136.64 0
4	0,005.91 0,018.75 −0,013.76 0	0,005.48 0,017.42 −0,011.36 0,010.10	0,004.34 0,013.79 −0,006.24 0,017.06	0,002.81 0,004.05 +0,001.12 0,018.21	0,001.35 0,004.55 0,007.04 0,015.88	0,000.33 0,001.29 0,011.04 0,009.23	0 0 0,010.56
3	+0,000.08 0,002.04 −0,000.32 0	+0,000.07 0,001.90 −0,000.32 0,000.95	0,000.04 0.001.51 −0,000.16 0,001.62	−0,000.00 0,001.00 +0,000.32 0,001.82	−0,000.42 0,000.49 +0,000.32 0,002.51	−0,000.02 0,000.13 +0,000.32 0,000.82	0 0 −0,000.64 0
2	−0,000.07 0,000.08 0,000.00 0	−0,000.07 0,000.07 0,000.16 0,000.05	−0,000.06 0,000.05 0,000.16 0,000.04	−0,000.04 0,000.03 0,000.00 0,000.04	−0,000.02 0,000.01 −0,000.16 0,000.02	−0,000.01 0,000.00 0,000.00 −0,000.01	0 0 −0,000.32 0
1	−0,000.01 −0,000.02 0,000.00 0	−0,000.01 −0,000.02 0,000.00 −0,000.01	−0,000.01 −0,000.01 0,000.00 −0,000.02	−0,000.01 0,000.00 0,000.00 −0,000.02	0,000.00 0,000.00 0,000.00 −0,000.02	0,000.00 0,000.00 0,000.00 0,000.01	0 0 0 0
0	0 0 0 0	0 0 0 0,000.00	0 0 0 0,000.00	0 0 0 0,000.00	0 0 0 0,000.00	0 0 0 0,000.00	0 0 0 0

Tabela 3

Încărcarea totală Valori: $\sigma_{x,m,n/p}$ $\sigma_{y,m,n/p}$ $\tau_{xy,m,n/p}$

$m =$ $n =$	0	1	2	3	4	5	6
6	−0,293.04 −2 0	−0,267.58 −2 0	−0,192.01 −1 0	−0,101.56 0 0	−0,042.95 0 0	−0,010.15 0 0	0 0 0
5	+0,116.38 −0,983.20 0	+0,105.69 −0,841.60 +0,098.57	0,072.48 −0,759.20 0,160.03	0,035.70 −0,662.72 0,147.20	0,013.76 −0,573.12 0,097.61	0,002.86 −0,503.84 0,048.66	0 −0,450.72 0
4	0,026.88 −0,687.20 0	0,025.06 −0,684.32 0,014.07	0,020.09 −0,675.48 0,024.06	0,013.47 −0,665.92 0,027.39	0,006.91 −0,656.32 0,023.77	0,002.01 −0,649.12 0,014.20	0 −0,648.48 0
3	0,003.15 −0,667.68 0	0,002.95 −0,667.04 0,001.44	0,002.36 −0,667.20 0,002.48	0,001.58 −0,666.08 0,003.83	0,000.79 −0,666.24 0,003.41	0,000.22 −0,665.92 0,001.35	0 −0,667.36 0
2	0,000.14 −0,666.40 0	0,000.12 −0,666.72 0,000.08	0,000.09 −0,666.40 0,000.08	0,000.05 −0,666.72 0,000.11	0,000.02 −0,666.72 0,000.06	0,000.00 0,666.72 0,000.01	0 −0,667.04 0
1	−0,000.02 −0,666.40 0	−0,000.02 −0,666.88 −0,000.01	−0.000.01 −0,666.56 −0,000.02	0,000.00 −0,666.72 −0,000.02	0,000.00 −0,666.56 −0,000.02	0,000.00 −0,666.72 −0,000.01	0 −0,666.72 0

0	0,000.00 −0,666.40 0	0,000.00 −0,666.88 0,000.00	0,000.00 −0,666.56 0,000.00	0,000.00 −0,666.72 0,000.00	0,000.00 −0,666.56 0,000.00	0,000.00 −0,666.72 0,000.00	0 −0,666.72 0
−1	+0,000.02 −0,666.40 0	0,000.02 −0,666.88 0,000.01	0,000.01 −0,666.56 0,000.02	0,000.00 −0,666.72 0,000.02	0,000.00 −0,666.56 0,000.02	0,000.00 −0,666.72 0,000.01	0 −0,666.72 0
−2	−0,000.02 −0,666.40 0	−0,000.02 −0,666.72 0,000.02	−0,000.01 −0,666.40 0,000.00	−0,000.01 −0,666.72 0,000.03	0,000.00 −0,666.72 0,000.02	0,000.00 −0,666.72 0,0000.3	0 −0,666.40 0
−3	− 0,000.93 −0,667.04 0	−0,000.85 −0,666.40 −0,000.46	−0,000.66 −0,666.88 −0,000.76	−0,000.42 −0,666.72 −0,000.81	−0,000.19 −0,666.88 −0,001.61	−0,000.04 −0,666.56 −0,000.49	0 −0,666.08 0
−4	−0,010.62 −0,687.20 0	−0,009.78 −0,661.60 −0,006.13	−0,007.49 −0,664.00 −0,010.06	−0,004.63 −0,668.16 −0,010.43	−0,002.19 −0,670,40 −0,007.99	−0,000.57 −0,671.20 −0,004.26	0 −0,669.60 0
−5	−0,065.98 −0,462.88 0	−0,060.41 −0,592.32 −0,049.55	−0,043.06 −0,636.00 −0.080.51	−0,023.28 −0,688.00 −0,074.22	−0,010.08 −0,710.40 −0,049.41	−0,002.49 −0,722.40 −0,024.72	0 −0,724.00 0
−6	+0,155.08 0 0	+0,142.08 0 0	0,104.45 −0,5 0	0,056.64 −1 0	0,024.91 −1 0	0,062.1 − 1 0	0 − 1 0

Notînd cu $d = 20$ cm grosimea plăcii de b.c.a. și cu P forța aplicată, rezultă

$$p = \frac{P}{2\,bd} = \frac{P}{2400} \qquad (P \text{ în kgf, } p \text{ în kgf/cm}^2).$$

Condiția a treia, de efort tangențial maxim este, de departe, cea mai defavorabilă. Experimental s-a obținut $P_r = 12000$ Kgf, de unde se deduc

$$\tau_{xy,\max} = R_{ad} = \frac{0{,}160 \times 12000}{2400} = 0{,}8 \text{ kgf/cm}^2,$$

adică o rezistență la adeziune R_{ad} extrem de redusă.

Pentru a doua variantă de alcătuire a rostului transversal, se poate admite că aceasta împiedică deplasările longitudinale ale șaibei.

Fiecare jumătate a fragmentului de șaibă poate fi atunci considerată ca făcînd parte din cîte o șaibă întreagă, solicitată identic la cele două

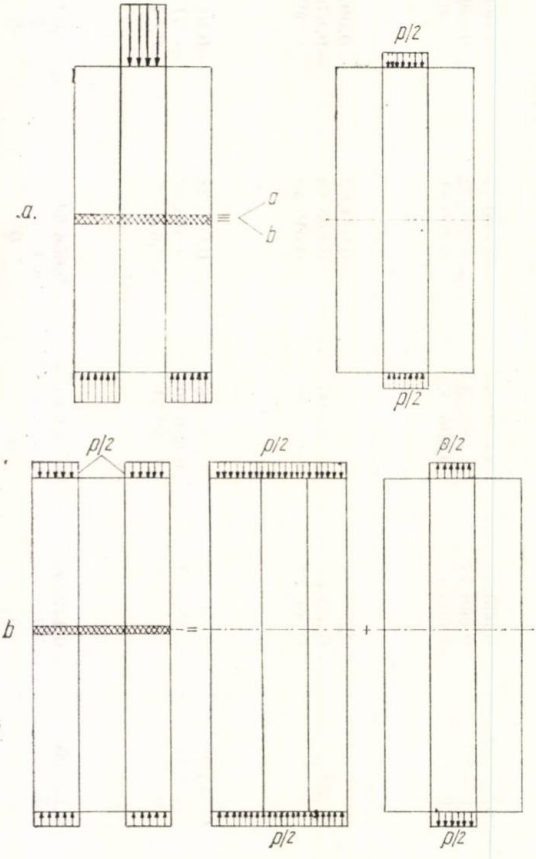


Fig. 4. — Fragmentul de șaibă tip *A* cu rostul transversal rigid.

capete, odată cu cîte o sarcină $2p$ pe placa centrală, a doua oară cu cîte două sarcini p pe plăcile marginale.

Se observă ușor că aceste două cazuri se deduc din cazurile de încărcare elementare studiate precedent (fig. 4).

Pentru primul caz (fig. 4*a*), rezultatele se iau direct din tabela 1:

$$\sigma_{x,\max} = -0{,}069\ p\ ;\ \sigma_{y,\max} = -0{,}5\ p\ ;\ \tau_{xy,\max} = 0{,}0397\ p.$$

Experimental s-a obținut o sarcină de ruină $P_r = 10000$ kgf, de unde rezultă o rezistență de adeziune dintre placa b.c.a. și mortar

$$R_{ad} = 0{,}66 \text{ kgf/cm}^2,$$

adică o valoare de același ordin de mărime, însă ușor inferioară.

Al doilea caz (fig. 4 *b*) nu aduce concluzii diferite și dealtfel nu a fost confirmat experimental; fisurarea s-a produs în rosturile longitudinale, în jumătatea de șaibă solicitată de sarcina acționînd asupra plăcii mijlocii, în jumătatea cealaltă rosturile rămînînd nefisurate.

2.2. TIPUL B

O încercare similară cu aceea a tipului *A* a fost efectuată considerînd un ansamblu de trei plăci de b.c.a., alcătuind deci un fragment de șaibă de lungime $l = 6{,}00$ m și lățime $3\,b = 1{,}80$ m. Concluziile teoretice și experimentale au fost analoge cu acelea de la punctul 2.1, rezultînd că rezistența la adeziune a b.c.a. de mortar este foarte redusă și este considerabil influențată de condițiile de execuție, astfel încît practic nu se poate conta pe preluarea unor eforturi de lunecare prin simpla umplere a rosturilor dintre plăci.

2.3. TIPUL C

Fragmentul de șaibă tip *C* este alcătuit tot din 3×2 plăci de b.c.a. ca la tipul *B*, cu diferența că rostul transversal este continuu, constituind, prin prezența mustăților ce ies din grindă și a două vergele Ø 8 mm la partea superioară, o centură.

Rosturile longitudinale au rămas neumplute, de asemenea un spațiu creat într-o placă mediană (vezi figura 1).

Schema de încărcare este aceeași cu cele precedente. Încercarea are drept scop să pună în evidență sarcina pe care o poate transmite centura (monolitizarea rostului transversal).

Verificarea centurii (9×20 cm) se face la forfecare, aplicînd metoda de calcul la rupere. Notînd

$P_r = 2\ pbd = 15000$ Kgf, sarcina de rupere (obținută experimental),

$A_b = 2 \times 9 \times 20 = 360$ cm², aria celor două secțiuni de forfecare,

R_t , rezistența la eforturi principale a betonului,

$A_a = 2 \times 0{,}50 = 1{,}00$ cm², aria a 2 vergele Ø 8 mm,

$\tau_r = 0{,}8 \times 3400 = 2720$ kgf/cm², rezistența de rupere la forfecare a armăturii,

se poate scrie

$$P_r = A_b R_t + A_a \tau_r,$$

de unde rezultă

$$R_t = \frac{15000 - 1 \times 2720}{360} = 34 \text{ kgf/cm}^2 \sim \frac{R_t}{6,5}.$$

2.4. TIPUL D

Fragmentul de şaibă tip D a fost alcătuit în trei variante, plăcile de b.c.a. fiind solidarizate cu dibluri de beton marca B 170, avînd diametrul $2a = 8$ cm şi o adîncime $b_c = 12$ cm. Încărcarea este aceeaşi ca în cazurile precedente.

Numărul plăcilor, al diblurilor şi forţa de rupere P_r sînt redate pentru cele trei variante în tabela 4.

Tabela 4

Varianta	Nr. plăci	Nr. dibluri*) n =	P_r, exp. (kgf)	Forfecarea diblului (kgf/cm²)	Rezistenţa de rupere a b.c.a. (kgf/cm²)
D_1	1×3	2	3300	11,5	17,2
D_2	2×3	4	7000	12,2	18,2
D_3	2×3	6	13200 12000	15,3 13,9	22,9 20,8

*) În lungul rostului longitudinal (pe 6 m, respectiv 12 m lungime)

Valorile numerice înscrise în tabela 3 arată că eforturile unitare tangenţiale τ_{xy} sînt maxime în apropierea capătului încărcat cu sarcina $2p$ şi descresc la valori practic nule la o distanţă egală cu lăţimea $3b$ a fragmentului de şaibă. Dată fiind această distribuţie a lui τ_{xy}, în cazul unei solidarizări localizate apare probabil că toată forţa tăietoare ($T = P/2$) din secţiune va fi preluată la început de un diblu. Pe măsura creşterii forţei P, se vor încărca toate diblurile.

Distrugerea îmbinării se poate face fie prin forfecarea diblurilor, fie prin strivirea betonului celular de către diblu (respectiv atingerea rezistenţei de rupere la întindere şi desprinderea betonului de diblu).

În cazul forfecării a n dibluri, ariei de forfecare $A_f = 2ab_c = 96$ cm² îi corespunde un efort unitar mediu ($T = P/2$)

$$\tau = \frac{4T}{3nA_f} = \frac{P}{144\,n} \qquad (P \text{ în kgf, } \tau \text{ în kgf/cm}^2).$$

În ce privește betonul celular, se poate admite că suprafața de contact este (ca la îmbinările nituite) un dreptunghi $A_c = ab_c = 48$ cm^2. Efortul unitar mediu este

$$\sigma = \frac{T}{nA_c} = \frac{P}{96\,n} \qquad (P \text{ în kgf, } \tau \text{ în kgf/cm}^2).$$

Valorile lui τ și σ corespunzătoare lui n și sarcinilor P obținute experimental au fost trecute în tabela 4; între ele există relația simplă $\sigma = 1{,}5\tau$.

Pentru valori ale lui τ cuprinse între 11,5...15,5 kgf/cm^2, diblul nu se foarfecă, astfel încît cedarea b.c.a. este factorul dominant. Deoarece la strivire, rezistența b.c.a. este mult superioară, valorile obținute corespund în realitate rezistenței de rupere la întindere (desprinderea plăcii de dibluri). Valoarea medie este

$$R_t = 20 \text{ kgf/cm}^2.$$

2.5. TIPUL E

Dacă în cazul precedent diblurile sînt acționate direct de forța tăietoare din secțiune, poate fi imaginată o încercare la care diblurile preiau forțe de lunecare. În acest scop a fost prevăzut fragmentul de șaibă tip E, constînd din două plăci de b.c.a. suprapuse pe grosime și rezemate la capete (fig. 1). Încărcarea constă dintr-o sarcină de intensitate P distribuită, la mijlocul deschiderii, pe o lățime $b' = 30$ cm.

Diblurile de solidarizare introduc în secțiunile respective forțe concentrate care modifică considerabil starea de încovoiere așa cum rezultă din teoria clasică.

Între două dibluri vecine $i-1$ și i, va lua naștere în rostul longitudinal, o forță de lunecare L_i; momentul încovoietor mediu pe interval (corespunzător unei grinzi fără solidarizări) are valoarea $M^0_{i-1,i}$.

Diblul i preia diferența de forțe de lunecare din panourile adiacente (fig. 5), adică

$$L_{i+1} - L_i = D_i. \tag{5}$$

Ținînd seama de deformabilitatea diblurilor și exprimînd compatibilitatea deformațiilor liniare ale celor două fețe în contact ale plăcilor, se ajunge la relația de recurență [5]

$$-L_{i-1} + \left(2 + \frac{4Cbs_i}{3E_cW_c}\right)L_i - L_{i+1} = \frac{Cs_i}{E_cW_c}\,M^0_{i-1,i}, \tag{6}$$

analogă ecuației celor trei momente.

În relația precedentă s-a notat:
b, înălțimea unei grinzi (lățimea unei plăci de b.c.a.) (=60 cm);
s_i, distanța dintre diblurile $i-1$ și i;
$W_c = \frac{db^2}{6}$, modulul de rezistență al secțiunii unei plăci;
E_c, modulul de elasticitate al b.c.a.;
C, coeficientul de rigiditate al unui diblu (kgf/cm).
Pentru primul și ultimul interval se va lua $L_0 = L_n = 0$.

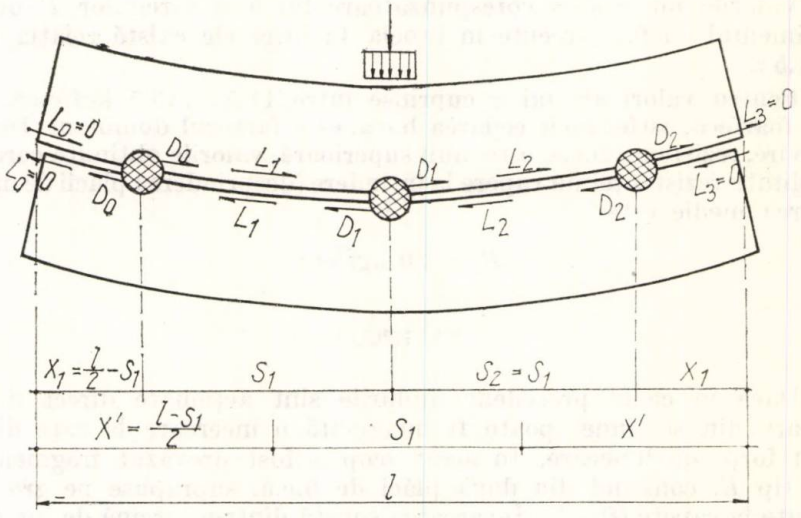


Fig. 5. — Solidarizarea la lunecare cu ajutorul diblurilor.

În cazul reprezentat în figura 4, cînd există trei dibluri, avem $L_0 = 0$; $L_1 = D_0$; $L_2 - L_1 = D_1$; $-L_2 = D_2$; $L_3 = 0$,

$$s_1 = s_2 \text{ și } M^0_{0-1} = M^0_{1-2}.$$

Ținînd seama de condițiile de simetrie și de antisimetrie rezultă imediat

$$L_1 = L_2;\ D_0 = L_1;\ D_1 = 0;\ D_2 = -L_1 = -D_0.$$

Relația (6) se scrie

$$\left(1 + \frac{4Cbs_1}{3E_cW_c}\right) L_1 = \frac{Cs_1}{E_cW_c} M^0_{0-1}; \tag{7}$$

ea determină direct efortul de lunecare L_1 și deci forța D_0 preluată de diblurile extreme. Diblul central, deși nu se încarcă, are un efect favorabil prin faptul că micșorează distanțele s_1 și s_2 și momentul mediu M^0_{0-1}.

Valoarea coeficientului C nu este cunoscută, iar din relația (7) reiese că mărimea efortului de lunecare L_1 este influențată considerabil de această valoare :

$$L_1 = \frac{3M^0_{0-1}}{4b} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3E_c W_c}{4Cs_1 b}}. \tag{8}$$

Pentru cazul de încărcare considerat, avem

$$M^0_{0-1} = \frac{Px'}{2} = P\frac{l - a_1}{4}. \tag{9}$$

Pentru determinarea forței P, va trebui să examinăm efectul diblului asupra peretelui găurii din placa de b.c.a.

În mod aproximativ, fiecare placă va putea fi asimilată cu semiplanul elastic solicitat de o forță tangențială pe contur (fig. 6).

În teoria elasticității plane se demonstrează că, în acest caz, în semiplanul elastic ia naștere o stare de eforturi radială ; eforturile unitare sînt date de relațiile

$$\sigma_r = \frac{2H\cos\varphi}{\pi r}\,;\quad \sigma_\varphi \equiv 0\,;\quad \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r} \equiv 0.$$

Punctul singular $r = 0$ este exclus deoarece $r \geqslant a$.

Valoarea maximă a lui σ_r are loc pentru $\varphi = 0$ și $\varphi = \pi$, fiind de întindere, respectiv de compresiune.

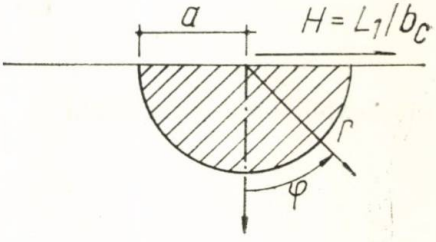


Fig. 6. — Acțiunea unei forțe tangențiale H.

Considerînd valoarea pozitivă (întindere) și ținînd seama că forța tangențială H provine din distribuirea efortului de lunecare pe lungimea diblului,

$$H = \frac{L_1}{b_c},$$

rezultă

$$\sigma_{r,\max} = \frac{2H}{\pi a} = \frac{2L_1}{\pi a b_c}. \tag{10}$$

Cînd efortul unitar atinge rezistența de rupere R_t, va corespunde o forță

$$L_1 = \frac{\pi}{2} R_t a b_c . \tag{11}$$

Ducînd pe M^0_{0-1} din (9) și pe L_1 din (11) în (8) și explicitînd forța P, se obține după toate simplificările

$$P_r = \frac{8\pi}{3} \frac{abb_c}{1-s_1} \left(1 + \frac{3E_c W_c}{4Cs_1 b}\right) R_t . \tag{12}$$

Pentru datele numerice

l = 600 cm, deschiderea de grindă;
b = 60 cm, înălțimea unei grinzi (lățimea plăcii de b.c.a.);
d = 20 cm, lățimea grinzii (grosimea plăcii);
b_c = 12 cm, lungimea unui diblu;
$s_1 = s_2$ = 180 cm, distanța dintre dibluri;
$x' = \frac{1-s_1}{2}$ = 210 cm, secțiunea în care se calculează momentul mediu (jumătatea intervalului între două dibluri);
$W_c = \frac{20 \times 60^2}{6}$ = 12000 cm³;
E_c = 25000 Kgf/cm² (pentru GSB 50, E_c = 500 R);
a = 4 cm, raza unui diblu;

relația (12) se scrie numeric

$$P_r = \frac{128\pi}{7} \left(1 + \frac{62500}{3C}\right) R_t ;$$

sau, explicitînd coeficientul C,

$$C = \frac{48 \times 10^{-6}}{\frac{7P_r}{128\pi R_t} - 1} \tag{13}$$

(P_r în kgf, R_t în kgf/cm², C în kgf/cm).

Luînd R_t = 20 Kgf/cm² și valorile experimentale P'_r și P''_r obținute pe două probe, rezultă

pentru P'_r = 2000 kgf, C' = 28000 kgf/cm;

pentru P''_r = 2200 kgf, C'' = 22800 kgf/cm.

Se va putea lua valoarea medie $C = 25000$ kgf/cm.

Separat de această verificare locală, trebuie determinate și eforturile unitare de încovoiere în plăcile de b.c.a., în secțiunile de îmbinare și la mijlocul deschiderii. Vom reda doar a doua verificare, care este mai defavorabilă.

Ținînd seama și de influența eforturilor de lunecare, pentru fibra inferioară a plăcii superioare se obține

$$\sigma = -\frac{D_0}{A_c} + \frac{1}{2}\frac{Pl}{4W_c} - \frac{D_0}{W_c}\frac{h}{2} = -\frac{4D_0}{bd} + \frac{3Pl}{4db^2}. \tag{14}$$

Ținînd seama că

$$D_0 = L_1 = \frac{3}{16}\frac{P(l-s_1)}{b}\frac{1}{1+\dfrac{3E_cW_c}{4Cs_1b}},$$

relația (14) devine

$$\sigma_{max} = R_t = \frac{3Pl}{4db^2}\left(1 - \frac{l-s_1}{l}\frac{1}{1+\dfrac{3E_cW_c}{4Cs_1b}}\right). \tag{15}$$

Cu valorile numerice precedente, rezultă

$$P = 259\ R_t.$$

Pentru $R_t = 15 - 20$ kgf/cm^2, corespunde

$$P = 3885 \ldots . 5180 \text{ kgf}$$

față de sarcinile de fisurare 3800, respectiv 4600 Kgf obținute experimental (fig. 7).

Rezultă așadar că avaria locală a plăcii de b.c.a. în jurul diblurilor nu micșorează capacitatea ei portantă. Placa poate fi încărcată mai departe pînă la fisurarea ei din încovoiere. Sarcina de ruină poate fi dedusă pe baza unui calcul la rupere.

2.6. CONCLUZII ASUPRA COMPORTĂRII FRAGMENTELOR DE ȘAIBĂ

Studiul analitic pe fragmentele de șaibă descrise în paragrafele 2.1 — 2.5 și confirmate cu datele experimentale [4] permit tragerea unor concluzii privind rolul diferitelor tipuri de îmbinări și mărimea caracteristicilor fizico-mecanice corespunzătoare.

a) Rezistența la adeziune dintre b.c.a. și un mortar obișnuit este foarte redusă (de ordinul 0,5...1,0 Kgf/cm^2) și depinde de condițiile de execuție. De aceea, este recomandabil ca influența monolitizării simple

a rosturilor să fie neglijată în calcul, la evaluarea efectului de şaibă (transmiterea unor eforturi de lunecare în lungul rosturilor). Problema rămîne deschisă în sensul realizării unor mortare speciale care să asigure o adeziune bună între plăcile de b.c.a. (mortare cu adezivi).

b) Monolitizarea rosturilor prin crearea de centuri de beton armat este eficientă ; pentru calcul se va aplica teoria obişnuită a betonului armat.

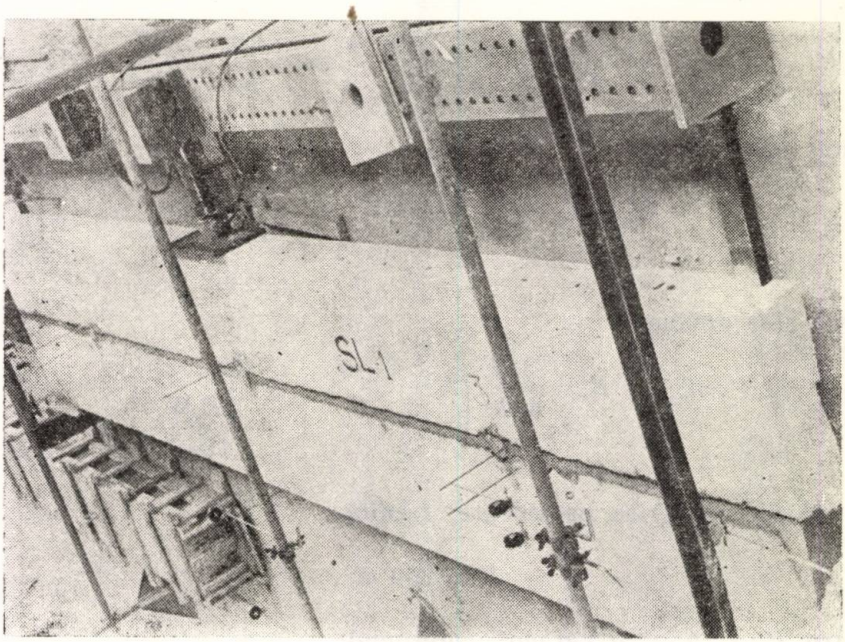


Fig. 7. — Experimentarea unui fragment de şaibă tip *E*.

c) Diblurile asigură solidarizarea plăcilor de b.c.a. Pentru un număr de două sau trei dibluri pe fiecare latură lungă a plăcii, se poate admite că ele se încarcă uniform.

Sarcina de fisurare se evaluează pe baza unei rezistenţe de rupere $R_t = 20$ kgf/cm^2.

d) Diblurile sînt capabile să transmită şi eforturi de lunecare, calculul lor urmînd a se face conform teoriei dezvoltate în § 2.5. Coeficientul de rigiditate are o valoare medie $C = 25000$ kgf/cm.

e) Sarcina de fisurare locală (în jurul diblurilor) corespunde unei rezistenţe $R_t = 20$ kgf/cm^2; prin aceasta însă, capacitatea portantă a plăcii nu este epuizată, putîndu-se ajunge la sarcina de fisurare şi apoi de rupere, aplicînd calculul corespunzător elementelor de beton armat.

7. Studiile teoretice şi experimentale au avut drept scop punerea în evidenţă, calitativă şi cantitativă, a rolului fiecărui mijloc de îmbinare considerat separat. Este probabil că folosirea concomitentă a mai multor mijloace de îmbinare conduce la o sarcină capabilă superioară sumei sarcinilor capabile corespunzătoare fiecărui caz izolat. În

lipsa unor experimentări concludente, este însă recomandabil ca acest efect să nu fie luat în considerare, ţinînd seama de variabilitatea calităţii plăcilor de b.c.a. şi de sensibilitatea materialului la condiţii de execuţie şi exploatare necorespunzătoare.

3. STUDIUL UNEI ŞAIBE ÎN ANSAMBLUL EI

Aşa cum s-a subliniat în paragraful introductiv, studiile teoretice şi experimentale pe fragmente de şaibă au avut drept scop să evidenţieze în ce măsură calculele bazate pe teoria elasticităţii şi rezistenţa materialelor concordă cu rezultatele experimentale. Compararea acestor date, descrise în § 2.1. — 2.5. a permis obţinerea a două rezultate principale :

a) stabilirea unor caracteristici mecanice ale b.c.a.,

b) justificarea, pe bază experimentală, a unor metode de calcul exacte sau simplificate.

Ultima concluzie îndreptăţeşte extinderea metodelor de calcul bazate pe teoria elasticităţii şi la studierea şaibei în ansamblul ei, pentru stabilirea mărimilor secţionale periculoase, a poziţiei lor şi apoi a dimensionării corespunzătoare a îmbinărilor.

Să considerăm o şaibă de acoperiş acoperind în plan 2 deschideri $\times 6$ travei ; datele de calcul sînt următoarele :

deschiderea : $L = 18{,}00$ m,

traveea (egală cu deschiderea unei plăci de b.c.a.) : $l = 6{,}00$ m,

intensitatea sarcinii seismice : $q = 882$ kgf/m.

Pentru grinda-perete vom considera schema din figura 8 ; în mod simplificat, ea comportă continuitatea pe două deschideri şi o înălţime totală $H = 6l = 36{,}00$m (se neglijează efectul rezemării pe fermele de acoperiş).

Este ştiut că pentru rapoarte, $H/L > 1/2$, distribuţia eforturilor unitare de încovoiere σ_x nu mai ascultă de legea lui Navier. În literatura de specialitate este mai puţin studiat cazul continuităţii pe două deschideri şi al rezemării pe reazeme înguste. De aceea, vom extrapola datele cunoscute pentru grinda continuă cu multe deschideri.

Rezultanta eforturilor de întindere, necesară pentru determinarea cantităţii de armătură poate fi determinată cu ajutorul formulei

$$I = \frac{3}{2}\frac{M}{H},$$

însă minim

0,089 qL în secţiunea de moment maxim $\left(x_0 = \frac{3}{8}L\right)$,

0,273 qL în axul stîlpului.

În formula precedentă, M reprezintă momentul încovoietor de grindă continuă. Limitîndu-se la axul stîlpului, avem

$$M = \frac{qL^2}{8}$$

și deci

$$I = \frac{3qL^2}{16H} = \frac{3 \times 882 \times 18{,}00^2}{16 \times 36{,}00} = 1490 \text{ kgf.}$$

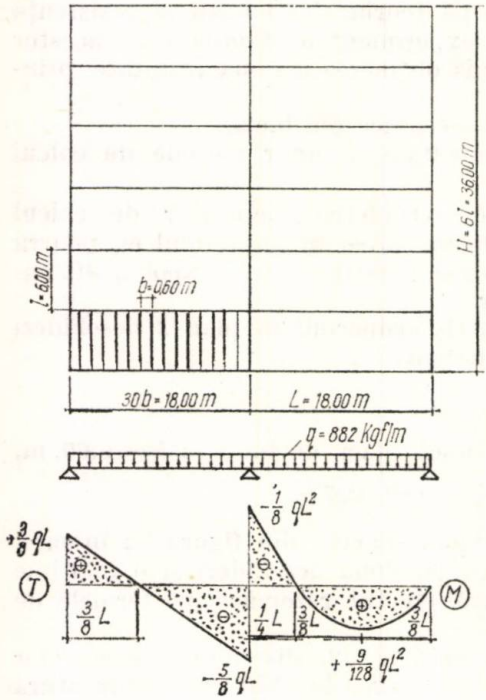


Fig. 8. — Elementele geometrice ale șaibei de acoperiș.

Deoarece

$$I_{\min} = 0{,}273 \times 882 \times 18{,}00 = 4310 \text{ kgf} > 1490,$$

dimensionarea armăturii se va face pentru această ultimă valoare

$$A_a = \frac{cI}{\sigma_c} = \frac{1{,}5 \times 4310}{3400} = 1{,}90 \text{ cm}^2.$$

Forța tăietoare are valoarea maximă

$$T_{\max} = \frac{5}{8} qL = \frac{5}{8} 882 \times 18{,}00 = 9920 \text{ kgf.}$$

Cu două dibluri în rostul longitudinal (de fiecare placă), sarcina de rupere (experimentală) este $P_r = 3300$ kgf (vezi tabela 4); corespunde un coeficient de siguranță),

$$c = \frac{6 \times 3300}{9920} = 2{,}01,$$

care este satisfăcător.

Rosturile transversale dintre șirurile de plăci de b.c.a. lucrează la lunecare. Efortul unitar mediu ce se dezvoltă poate fi evaluat acoperitor cu ajutorul formulei lui Juravski

$$\tau_{max} = \frac{3T}{2A} = \frac{3}{2} \frac{9920}{6 \times 6{,}00 \times 0{,}20} = 2065 \text{ kgf/m}^2 = 0{,}21 \text{ kgf/cm}^2,$$

el poate fi preluat cu ușurință.

O discuție mai detaliată a modului de lucru a îmbinărilor (centuri și armături în rosturile longitudinale) pentru asigurarea efectului de șaibă este dată într-un alt studiu al autorilor [4].

Primită la redacție la 5 aprilie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. Caracostea, A. și Soare, M., *Teoria elasticității*. Litografia Inst. Căi Ferate, București, 1955.
2. Esteva, L. M., *Investigación experimental sobre el comportamiento de diafragmas constituitidos por losas precoladas de concreto celular*,
3. Girkmann, K., *Flächentragwerke*, 6 Aufl, Springer-Verlag, Wien, 1963.
4. Simonici, M. și Soare, M., *Studiul experimental al fragmentelor de șaibă de acoperiș alcătuite din plăci de beton celular auto-clavizat*, Construcții.
5. Stüssi, Fr., *Baustatik*, Bd. I, Dritte Aufl, Brikhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1962, p. 318–322.
6. Stüssi, Fr. și Dubas, P., *Grundlagen des Stahlbanes*, 2te Aufl, Springer, Verlag, Berlin, 1971.
7. Teodorescu, P. P., *Probleme plane în teoria elasticității*, vol. I, București, Edit. Academiei, 1961.
8. * * * *Proiect IPC* nr. 1585/b, martie, 1969.

CERCETĂRI ASUPRA RECRUDESCENȚEI RELAXĂRII DE TENSIUNE LA SÎRME DIN OȚEL SUPERIOR SUPUSE LA COROZIUNE SUB TENSIUNE, TRATATE ÎN PREALABIL PENTRU ELIMINAREA TOTALĂ A RELAXĂRII

de S. CONSTANTINESCU-CĂTUNEȘTI

În [1] s-a arătat că datorită coroziunii sub tensiune se produce o recrudescență a relaxării eforturilor la oțeluri superioare. În continuarea studiului menționat se dau noi date culese din experimentare privind împrăștierea în durata de rupere precum și alte caracteristici. Pe sîrme de oțel superior, tratate după procedeul Dumas pentru eliminarea totală a relaxării, se arată eficiența acestui procedeu precum și persistența recrudescenței relaxării efortului ca o consecință a celui de-al doilea principiu al termodinamicii, principiul entropiei. Se arată implicațiile pe care le au proprietățile găsite asupra armăturii pretensionate din betonul precomprimat.

1. În [1] am arătat că datorită coroziunii sub tensiune a sîrmelor din oțel superior (SBP I) se produce o recrudescență a relaxării efortului pe toată durata încercării cu o accentuare în preajma ruperii (fig.1); fenomenul este o consecință a celui de-al doilea principiu al termodinamicii, principiul entropiei.

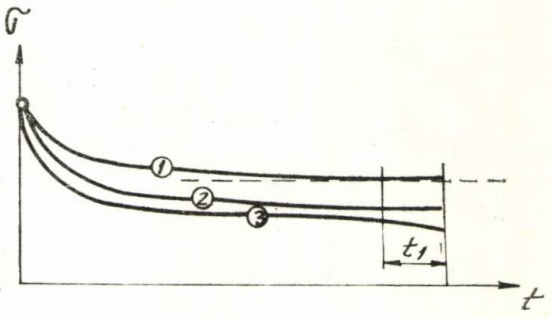


Fig. 1. — Relaxarea de efort (*1*), influența temperaturii (*2*) și a coroziunii sub tensiune (*3*).

În cele ce urmează se cercetează în continuare proprietățile stabilite în [1], precum și generalitatea procesului de recrudescență prin aceea că se tratează oțelul după o metodă în care se presupune că se elimină în întregime relaxarea oțelului.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 32, NR. 2, 1973, P. 465—474

2. Instalația pentru cercetarea coroziunii sub tensiune este aceea descrisă în [1], amplificată cu două stative (fig. 2). Pentru comparația rezultatelor se folosesc în permanență epruvete provenite din sîrma unui singur colac produs la Cîmpia Turzii, epruvetele fiind luate la rînd. Diametrul sîrmei este de 5 mm. Fiecare sîrmă-epruvetă se montează într-un stativ care asigură că efectul de întindere este centric. Lungimea epruvetei este de 117 cm între ancoraje. Pentru grăbirea fenomenului de coroziune, epruvetele se încălzesc, pe o lungime de 20 cm la temperatura

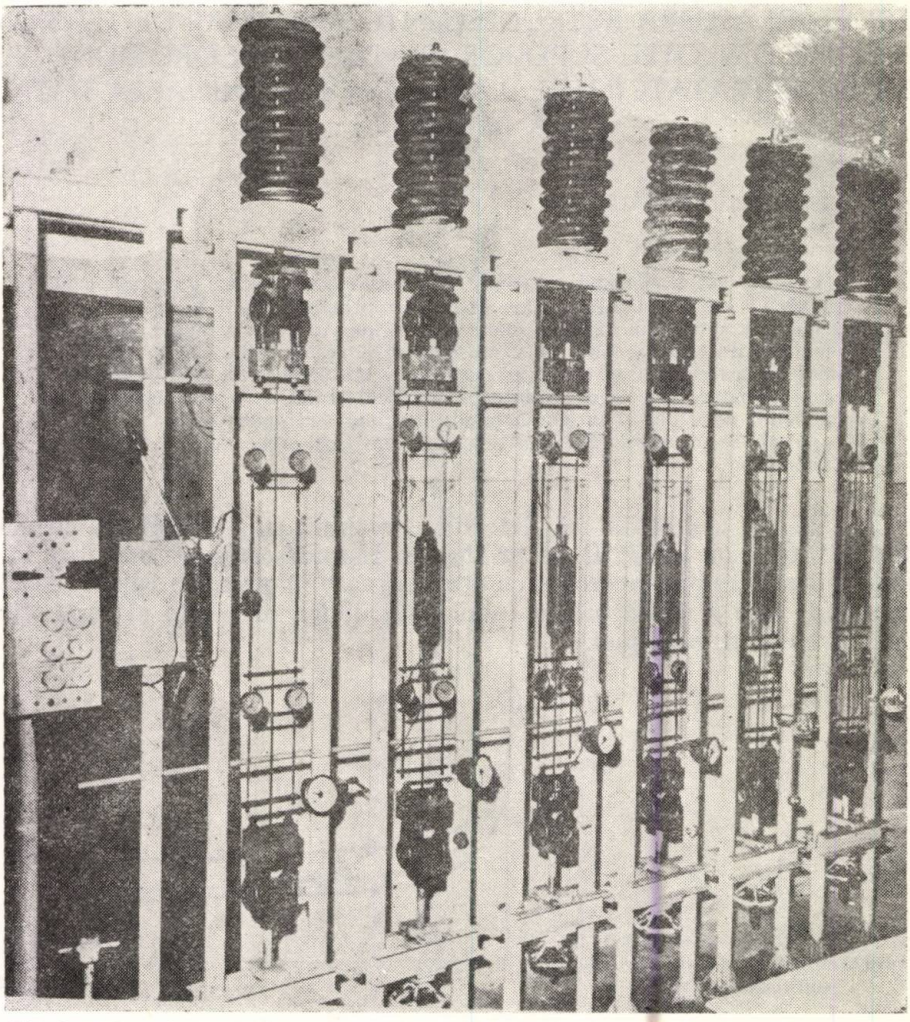


Fig. 2. — Bateria de stative; cele patru stative din dreapta conțin sîrme sub coroziune din tensiune.

de peste 90°C și se mențin într-un mediu de nitrați (5 % azotat de amoniu și 20 % azotat de calciu), nitrații se află într-un tub de sticlă cu lungimea de 20 cm., etanșat pe sîrmă.

Pentru a elimina o operație de corectare a valorii alungirii sîrmei prin efectul temperaturii, introducerea efortului în sîrme se face după ce s-a ajuns la temperatura de regim, de regulă 90°C. Gradul de grăbire a procesului de coroziune prin sporirea temperaturii este în curs de identificare; șase epruvete din oțelul întrebuințat curent sînt păstrate în mediul coroziv curent la temperatura camerei. Prima rupere s-a produs după 386 zile, celelalte cinci epruvete continuă să stea sub tensiune. Efortul de întindere este de 2058 kg.

Întreaga instalație pentru experimentarea pe o epruvetă constituie un stativ cu înălțimea de 260 cm prevăzut la partea superioară cu arc pentru producerea efortului de întindere. Încălzirea recipientului cu reactivi se face prin rezistența electrică înfășurată pe recipient pe tot timpul experimentării. Menținerea constantă a temperaturii la o baterie de mai multe stative se asigura prin termostatare. Rezistența de rupere a sîrmelor este de 19.600 kg/cm^2 cu un modul de elasticitate cuprins între 2,1 și 2,2 $\times$ 10^6 kg/cm^2. Instalația pe care s-au executat experimentările descrise aici cuprinde șase stative dintre care patru conțin sîrme încălzite tratate cu nitrați, una numai pentru încălzire și una pentru o sîrmă neîncălzită și netratată cu nitrați, ca epruvetă martor, (fig. 2). Eforturile în sîrme se introduc prin comprimarea arcurilor din creștetul stativelor. Eforturile se măsoară prin fleximetre. Concomitent se înregistrează alungirea sîrmei prin cîte două microcomparatoare pe bază de circa 58 cm cuprizînd zona încălzită și alte două microcomparatoare pe bază de circa 17 cm în afara zonei încălzite.

Departajarea efectelor de relaxare datorate temperaturii de acelea datorate coroziunii se obține prin diferența de relaxare ce se înregistrează la primele patru epruvete (temperatură și reactiv), comparate cu relaxarea de la cea de a cincea (temperatură). În recipientul celei de a cincea epruvete se află numai ulei.

De altă parte pe a șasea epruvetă se înregistrează relaxarea pe sîrma martor (fără nici un tratament).

Încercarea se continuă pînă la ruperea primelor patru sîrme și se consideră ajunsă la final prin această rupere.

Încercarea se conduce în spațiu climatizat la 20°C. Unele variații ale acestei temperaturi se fac simțite la proba martor, dar ele nu au putut fi controlate în amănunt.

3. Înainte de a prezenta și discuta rezultatele obținute pe sîrme tratate pentru eliminarea totală a relaxării anterior experimentărilor de aici, se dau cîteva rezultate privitor la împrăștierea timpului în care se produce ruperea sîrmelor supuse la coroziune sub același efort aplicat tuturor epruvetelor. Efortul introdus în sîrme a fost uniform, de 2000 kg, respectiv 2500 kg, ceea ce revine la circa 0,50 σ_r respectiv 0,65 σ_r. La un număr mai mare de sîrme s-au obținut ruperi cu efort de 2000 kg, între 10 și 35 zile, iar la 2 500 kg între 6 și 33 zile. În comparație cu cifrele comunicate într-o reuniune internațională [2], în care raportul poate varia de la 1 la 6, se vede că sîrmele produse în țară au o împrăștiere ceva mai strînsă.

De menționat că cele două extreme au fost obținute într-o singură grupă; toate epruvetele sînt tăiate foarte apropiat sau poate chiar în continuare din colacul din care se preiau epruvetele. Dacă se elimină

singura epruvetă care a dat, ca o excepție, ruperea la șase zile, atunci limita inferioară este de 13 zile, adică la ambele solicitări (2000 și 2500kg) împrăștierea este de ordinul a 1 la 3 și favorabilă pentru oțelurile produse în țară în raport cu cele internaționale.

Pe medii de grupe de patru sîrme, valoarea relaxării la rupere este, la încărcarea cu 2000 kg, cuprinsă între 10,8 % și 8,5 % din efortul introdus, la încărcare de 2500 kg între 12 % și 8,5 % din efortul introdus. Pe sîrme individuale s-a ajuns ca valoarea relaxării să fie de 14 % la efort de 2000 kg, respectiv 2500 kg.

În tabela ce urmează se arată valorile relaxării în cele trei situații experimentale : 1) reactiv și temperatură, 2) temperatură, 3) fără tratament (proba martor) :

Tabela 1

caz	2000 kg	2500 kg
1	10,8 %—8,5 %	12 %—8,5 %
2	4 %—1,6 %	5 %
3	nesemnificativ	

Se vede că reactivul aduce un spor notabil de relaxare pe tot timpul cît epruvetele se află în experimentare, adică pînă la ruperea lor. Cu alte cuvinte, se dovedește că sporul de relaxare nu este datorat numai încălzirii oțelului, fapt bine cunoscut, ci mai ales efectelor date de coroziunea sub tensiune.

4. Pentru pregătirea sîrmelor SBP I la starea de totală inexistență a relaxării tensiunilor din încărcare pentru exploatare, s-a folosit metoda propusă de Dumas [3]. După Dumas, dacă un oțel este supus la o temperatură diferită de a mediului ambiant (răcire sau încălzire ; —40°C la 300°C), urmată de o revenire la temperatura inițială (încălzire sau răcire), rezultă tensiuni interioare care blochează mai mult sau mai puțin dislocațiile oțelului, amorsînd astfel stabilizarea acestuia.

Păstrînd ideile de bază ale metodei, dar cu unele modificări în tehnica de aplicare a metodei, sîrmele SBP I au fost pregătite în felul următor :

1) punerea sub tensiune a sîrmelor la efortul de circa 0,65 pentru 24 ore (la Dumas 2—3 minute) ;

2) încărcare totală și punere sub tensiune la 0,65 σ_r (la Dumas o serie mare de epruvete la σ = 60%, 67% ; 72% ; 82% ; 86% ; 90% ; și 94% din σ_r) ;

3) măsurarea relaxării la 20°C în timp de 120 ore ;

4) trecerea de la temperatura ambiantă, 20°C, la temperatura de 90°C (Dumas, —40°C pînă la +300°C ; s-au condus probe la —40°C ;0 ; +40°C ; +60°C ; +80°C ; +100°C ; +150°C ; 200°C ; 250°C ; 300°C) ;

5) după obținerea temperaturii în fir, se restabilește alungirea inițială înregistrată la punerea sub tensiune, pt. 2 (Dumas readuce tensiunea de la pt. 2 ; în procedeul nostru, rezultă o tensiune mai ridicată decît cea folosită de Dumas) ;

6) măsurarea relaxării la temperatura de 90°C în timp de 24 ore (Dumas, numai 2 ore);

7) trecerea de la temperatura de 90°C la temperatura ambiantă, 20°C, cu menținerea constantă a lungimii firului;

8) măsurarea relaxării la 20°C în timp de 120 ore;

9) încă odată, trecerea de la temperatura ambiantă, 20°C, la temperatura de 90°C, cu menținerea constantă a lungimii firului;

10) încă odată, trecerea de la 90°C la 20°C, cu menținerea constantă a lungimii firului;

11) descărcarea firului (Dumas, eventuală măsurare a relaxării care mai subsistă 10—20 ore);

12) reîncălzire la 90°C pentru măsurarea relaxării sub 0,65.

Tratamentul sîrmelor s-a făcut într-o instalație diferită de aceea întrebuințate de Dumas [3]. S-a folosit bateria de stative fig. (2) cu care se fac toate încercările descrise aici și în ([1], fig. 1). Între blocaje fiecare sîrmă a fost îmbrăcată de un tub de oțel diametru 30 mm, înfășurat pe toată lungimea cu rezistență electrică și umplut cu ulei. Printr-un termostat în serie cu toate tuburile de oțel, se stabilește temperatura de regim, în speță 90°C, pentru perioada programată. În acest fel, sîrma SBPI sub tratament ia temperatura de 90°C a tubului și uleiului. Timpul de încălzire sau răcire între 20°C și 90°C este scurt în raport cu timpurile programate pentru planul de stabilizare.

În figura 3 se arată, comparativ cu Dumas, desfășurarea tratamentului. Ceea ce se vede la diagrama Dumas în faza finală (la 20°C și la 90°C), adică linia orizontală care descrie variația tensiunii—lipsă aproape totală de relaxare — nu a fost realizată în încercările descrise aici, mai ales atunci cînd după tratament sîrma este lăsată la 20°C pentru 24 ore, iar apoi încălzită la 90°C este supusă la eforturi de $0{,}65\,\sigma_r$ pentru alte 24 ore sau chiar 120 ore cînd relaxarea ajunge la valori comprarabile cu cele ale oțelului netratat. Se constată că relaxarea se manifestă. De altfel, și în diagramele prezentate de Dumas în [3] se vede că la temperatura $T \neq 20°C$ apare o relaxare de valoare mică și care devine mai evidentă cînd tensiunea σ de la încărcare este mai ridicată. Cum timpul de observație la Dumas a fost numai de 2 ore, este de presupus că dacă fenomenul ar fi fost urmărit 24 ore, se înregistrau valori semnificative de relaxare.

În fața afirmației categorice din [3]* observăm că se produce o reducere sensibilă a relaxării însă fără suprimare totală. Dumas explică stabilizarea prin introducere de eforturi inițiale care compensează relaxarea, dar explicația este numai calitativă; cantitativ fenomenul poate fi numai parțial compensator.

---

* relaxările sînt total suprimate în intervalul de — 40°C pînă la + 300C după două treceri prin variația de temperatură. Se va remarca, ceea ce era previzibil, pentru că era cazul să se creeze numai tensiuni interne în oțel sub acțiunea unui efect termic prin care se parvine la blocarea dislocărilor adică la stabilizare după un număr de treceri convenabile, că importă puțin, dacă temperatura T este superioară sau inferioară temperaturii la care oțelul a fost pus inițial sub tensiune pentru a parveni la această stabilizare. Faptul semnificativ este că blocarea și stabilizarea la care se poate parveni prin aceste efecte termice, în intervalul temperaturilor citate să fie totale și permanente, așa cum s-a putut verifica pe oțeluri tratate în felul descris, lăsate timp de doi ani în repaus, a fost dovedit, atît pentru relaxare cît și pentru fluaj.

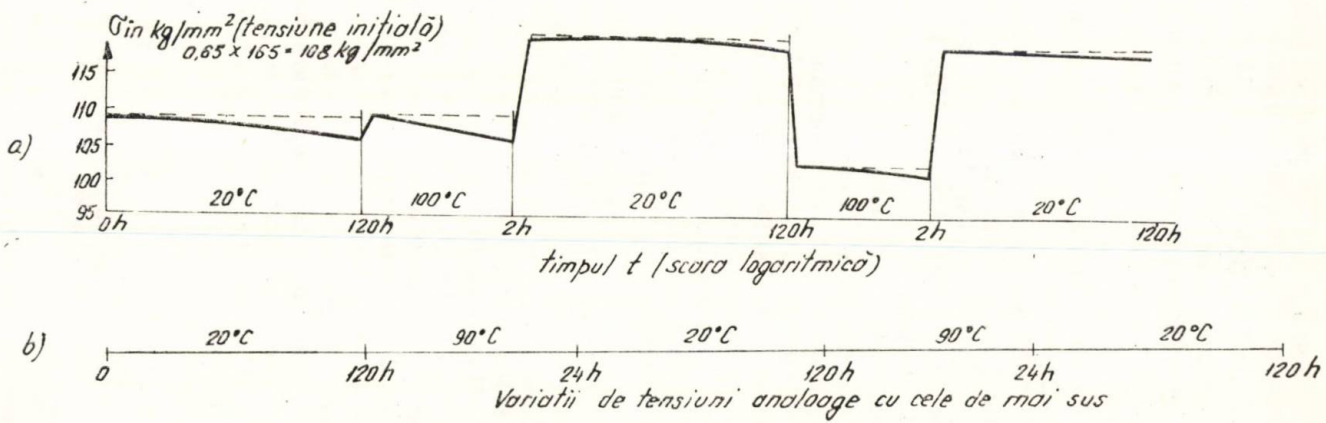


Fig. 3. — Variația de tensiuni : a) după procedeul Dumas [3] ; *b* după procedeul folosit aici.

Barele pregătite după metoda Dumas, au fost folosite în tipul de încercări descrise în [1] privind comportarea sîrmelor SBP I la coroziune sub tensiune. Se constată că pe mai multe serii s-a obținut o recrudescență de relaxare de efort de 3% la $\sigma_{efectiv} = 0{,}65\ \sigma_r$. Dumas crede că prin tratament se introduc eforturi inițiale care compensează total relaxarea. Deci, dacă este vorba de coroziune sub tensiune, cantitatea de efort inițial adusă de tratamentul Dumas nu se poate opune coroziunii.

În [4] am numit *acumulare* proprietatea inversă relaxării care se produce atunci cînd după descărcare de efort se blochează capetele epruvetei (fig. 4). (Proprietatea a fost folosită în [4] pentru curgerea lentă a betonului. Ea este generală, însă, la toate materialele fiind o consecință a principiului entropiei. Cum la materialele metalice — în speță oțelul

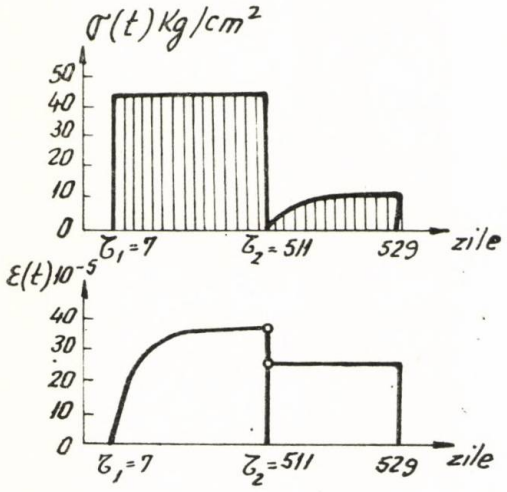


Fig. 4. — Sub acțiunea deformației $\varepsilon(t)$ blocată între $511 < \tau_2 < 529$ zile, se *acumulează* efort $\sigma(t)$ crescător.

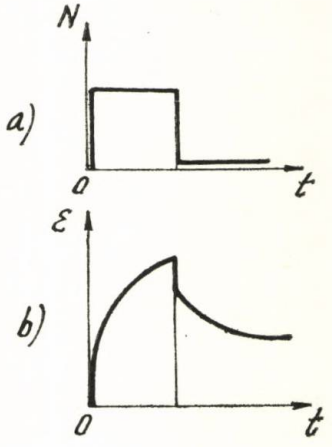


Fig. 5. — Variația fluajului oțelului la încărcare și descărcare [5].

-fluajul poate fi reprezentat printr-un model și o diagramă Burgers — ceea ce este acceptat de literatura de specialitate — de exemplu [5] (fig. 5), ca și la beton în oțel se produce acumulare atunci cînd se suprimă parțial

încărcarea, ceea ce se întîmplă de fiecare dată cînd se variază temperatura). Datorită fluajului care se continuă în epruvetă, dar a împiedicării continuării deformației din fluaj, de la descărcarea parțială produsă prin variația de temperatură, în epruvetă apar tensiuni care cresc cu timpul. La încălzirea de la 20°C la 90°C bara se alungește, și cum capetele sînt blocate, se produce acumulare de tensiune fiindcă o parte din alungirea inițială dispare. Bilanțul acestui proces este o înmagazinare de tensiune cu care se compensează parțial relaxarea. În acest fel se poate explica sub raport calitativ fenomenul de compensare admis de Dumas.

Dacă sîrmele sînt supuse la coroziune sub tensiune, compensarea nu mai este posibilă. Într-adevăr, în [1] am arătat, ca urmare a principiului entropiei, că la relaxare

$$-\frac{\mathrm{d}E_i}{\mathrm{d}t} = T\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}, \tag{1}$$

în care

E_i reprezintă lucrul forțelor interioare (tensiune),
S — entropia,
T — temperatura (90°C),

Dumas admite că după tratament relaxarea este nulă, deci $\frac{-\mathrm{d}E_i}{\mathrm{d}t} = 0$, ceea ce implică în (1) adaosul aceleiași valori dar cu semnul plus. Atunci în relația (1),

$$T\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ și } TS = t.$$

Introducînd în relația stabilită în [1] (relația 4) pentru coroziune sub tensiune :

$$\frac{-\mathrm{d}E_i}{\mathrm{d}t} = T\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\Delta E_p}{\mathrm{d}t},$$

în care

E_p este energie potențială,

rezultă

$$\frac{-\mathrm{d}E_i}{\mathrm{d}t} = TS + \frac{\mathrm{d}\Delta E_p}{\mathrm{d}t},$$

adică σ (corespunzător la E_i) se compune dintr-o constantă la care se adaugă $\mathrm{d}\Delta E_p/\mathrm{d}t$ care spune că din coroziune se menține o energie potențială suplimentară și care explică teoretic relaxarea de efort de 3% pe care am găsit-o experimental.

În acest stadiu al prezentării, trebuie să facem unele precizări care rezultă din datele culese în experimentare. În tabela 2 și figura 3 se arată

Tabela 2

Epruveta	Relaxare kg	Pierderi %	Durata pînă la rupere, în ore	Observații
1	115	4,60	428	Media celor 4 valori este 3,08%
2	8	0,32	332	
3	24	0,96	358	
4	162	6,45	403	
5	80	3,20	403	Nu se rupe

Epruveta	Relaxare	Pierderi %	Durata pînă la rupere, în ore	Observații
1	88	3,52	286	Media celor 4 valori este 3,26%.
2	124	4,95	285	
3	36	1,44	483	
4	78	3,12	316	
5	110	4,40	483	Nu se rupe

valorile relaxărilor înregistrate pe sîrmele 1—4 (temperatură și reactivi) și sîrma 5 (temperatură) cînd încărcarea a fost de 2500 kg. Sîrma 5 dă relaxarea fără coroziune sub tensiune la temperatura de 90°C. Or pe baza mediilor (coloana observații, 3,08% și 3,26%), comparate cu 3,20% și 4,40% (rîndul 5), se pare că coroziunea sub tensiune nu mai aduce nici o pierdere suplimentară de tensiune. Considerarea mediilor maschează, însă, situația reală a unora dintre sîrme care ajung să aibă relaxări ce merg chiar pînă la 6,45% (>3,08%) și 4,95% (>4,40%). Apare cu claritate că în unele sîrme, pe lîngă relaxarea de efort din temperatură, mai apare relaxarea suplimentară care nu poate fi pusă decît pe seama coroziunii din tensiune. Întrucît studiul se face pentru a cunoaște comportarea sîrmelor în opere realizate efectiv, se vede că eventualitatea unei relaxări din coroziune sub tensiune nu poate fi neglijată chiar pentru sîrme tratate după procedeul Dumas pentru eliminarea sau cel puțin reducerea relaxării eforturilor din încărcare exterioară.

În acest fel se poate trage concluzia că proprietatea stabilită în [1] privind recrudescența de relaxare a efortului în cazul coroziunii sub tensiune se menține și atunci cînd printr-un procedeu mecanic se elimină total sau parțial relaxarea de efort din epruvete; proprietatea este o urmare a generalității principiului entropiei.

Se menționează că în încercările descrise mai sus, prin care sîrmele SBP I au fost tratate după metoda Dumas nu s-au obținut nici un fel de modificări în rezistența de rupere și modulul de elasticitate în raport cu sîrmele netratate.

Natura ruperii este mult deosebită de ruperea de scurtă durată dar nu se deosebește deloc de ruperea sîrmelor care nu au fost tratate. Ruperea este fragilă cu puternice fisurări în lungul sîrmei, astfel că la detașarea celor două fragmente apar așchii din mantaua sîrmei care ajunge pînă la 10 mm lungime.

5. Aplicativ, cercetarea experimentală și teoretică de față, urmărește să dea constructorului informații asupra comportării armăturilor pretensionate ale betonului precomprimat, atunci cînd exploatarea construcției

implică coroziune sub tensiune. Ca și în [1] se conchide că o ameliorare a valorii pierderii de tensiune datorată relaxării armăturii din standarde este necesară; cantitativ însă, datele culese trebuie completate, ceea ce constituie o acțiune de durată, întrucît unul din parametrii cei mai importanți ai cercetării este timpul. Fiecare grup de epruvete implică o organizare care depășește cîte odată 50 zile (epruvete rupte în încercare după 36 de zile).

În tehnica fabricării betonului precomprimat se recomandă ca armăturile să fie întinse pentru un timp anumit la o valoare sporită față de cea de exploatare, înainte de a introduce forța de pretensionare. Dacă structura se află într-un mediu care poate conduce armătura la coroziune, proiectarea și execuția trebuie să țină seama de această eventualitate, chiar dacă s-au făcut pregătiri speciale ale sîrmelor din care este constituită armătura, în vederea luării în considerare a pierderii de tensiune din relaxare.

Primită la redacție la 26 august 1972

BIBLIOGRAFIE

1. S. CONSTANTINESCU-CĂTUNEȘTI, *O recrudescență a relaxării de efort la elemente longitudinale din oțel supuse la coroziune sub tensiune*, St. cerc. mec. apl., Acad. RSR, **30**, *5*, (1971).
2. * * * FIP, *Symposium „Spannstähle"*, Madrid 1968. General Bericht. Gruppe 3. Thema 4 (De Stryker).
3. F. DUMAS, *Propriétés et comportement des aciers de précontraintes soumis à des températures extrêmes*, Annales de l'Institut Technique du Bâtiments et des Travaux Publics. Février, 1970.
4. S. CONSTANTINESCU-CĂTUNEȘTI, *An explanation of fatigue strength and its correlation to the creep of concrete*, St. cerc. mec. apl. Acad. RSR, **14**, *1*, (1969).
5. F. K. ODQVIST, I. HULT, *Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe*, Berlin, 1962.

NOTĂ PRIVIND FLUTTERUL SUPERSONIC AL PANOURILOR PLANE, DREPTUNGHIULARE, ETEROGENE, ANIZOTROPE

de TR. BĂDOIU
IMFCA

Se scoate în evidență importanța luării în considerare în abordarea problemei flutterului supersonic al panourilor plane, a parametrilor de direcționalitate ai materialului și ai curentului de gaz. Parametrii menționați pot constitui noi grade de libertate în realizarea unor condiții de optimum din punctul de vedere al cerințelor de flutter.

Folosirea pe scară din ce în ce mai largă în domeniul construcțiilor aeronautice și aerospațiale a unor materiale ortotrope netradiționale, ca de exemplu, a materialelor armate cu fibre (a plasticelor armate cu fibre de cuartz, armătura ortogonală putînd fi orientată în mod convenabil în cursul fabricării structurei), a creat posibilitatea alegerii orientării armăturii astfel încît structura să aibă o comportare optimă.

În cazul analizei problemei de flutter a panourilor subțiri construite din astfel de materiale, studiul de optim rezidă în acest context în determinarea unghiului Φ de orientare a armăturii față de axele de referință geometrice ale structurii, (acest unghi este numit și unghi de orientare al ortotropicității), pentru care viteza critică de flutter capătă o valoare maximă. Aceasta, corelat cu faptul că orientarea diferită a panoului în timpul zborului face ca acesta să fie expus la scurgeri ale curentului de gaz de diferite direcții, justifică importanța abordării problemei flutterului panourilor plane dreptunghiulare ținînd seama atît de *caracteristica de direcționalitate a materialului** menționată mai sus (și caracterizată prin posibilitatea varierii unghiului de orientare al ortotropicității), cît și de existența curentului de gaz supersonic, coplanar, de *direcție arbitrară*.

Ținînd seama de actualitatea folosirii structurilor eterogene, este de la sine înțeles importanța luării în considerare în analiza flutterului supersonic a structurilor plane, dreptunghiulare și a caracteristicilor de eterogeneitate a structurii.

* Această terminologie este din ce în ce mai des întîlnită în literatura de specialitate (vezi, de exemplu, [1])

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 32, NR. 2, 1973, P. 475—479

Într-o lucrare anterioară* [2], ținînd seama de efectul de direcționalitate arbitrară a materialului fiecărui strat, de efectul curentului de gaz precum și de efectul de eterogeneitate a structurii panoului, au fost deduse ecuațiile rezolvente, permițînd obținerea vitezei λ^* și frecvenței critice de flutter Z_R^* (vezi în acest sens ecuațiile (19) obținute în cazul $\varepsilon_T \neq 0$ și ecuațiile (21) în cazul $\varepsilon_T \approx 0$).

Exemplul considerat în [2] a luat însă în considerare doar cazul curentului de gaz paralel axei $O\xi_1$. Fără a reveni la ecuațiile deduse, pe care le vom adopta în cuprinsul prezentei note drept ecuații de bază, vom scoate în evidență în condițiile datelor geometrice și fizico-mecanice aferente aplicației numerice prezentate în lucrarea [2], importanța luării în considerare în analiza problemei de flutter a panourilor plane atît a caracteristicilor de direcționalitate a materialului straturilor (unghiurilor Φ' și Φ''), cît și a caracteristicei de direcționalitate a curentului de gaz (unghiul Λ) (vezi fig. 1—4).

Chiar în cadrul exemplului considerat (ale cărui date sînt prezentate în [2]), pe baza figurilor 1—4 se pot trage o serie de concluzii privind importanța luării în considerare în problema de flutter de panou a parametrilor de direcționalitate menționați mai sus, aceștia putînd constitui tot atîtea grade de libertate, furnizînd astfel proiectantului noi posibilități de realizare din punctul de vedere al cerințelor de flutter, a unor condiții de optimum.

Primită la redacție la 26 iunie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. E. J. Mc Quillen, S. L. Huang, *Graphite-Epoxy Wing for BQM—34 E*, Supersonic Serial Target, Journal of Aircraft, **8**, 6, 480—486 (1971).
2. L. Librescu, Tr. Bădoiu, *Asupra flutterului structurilor plane, dreptunghiulare, anizotrope, eterogene*, St. cerc. mec. apl. **31**, 2 (1972).

* În cuprinsul prezentei note toate notațiile folosite corespund sensului definit corespunzător în cuprinsul lucrării [2].

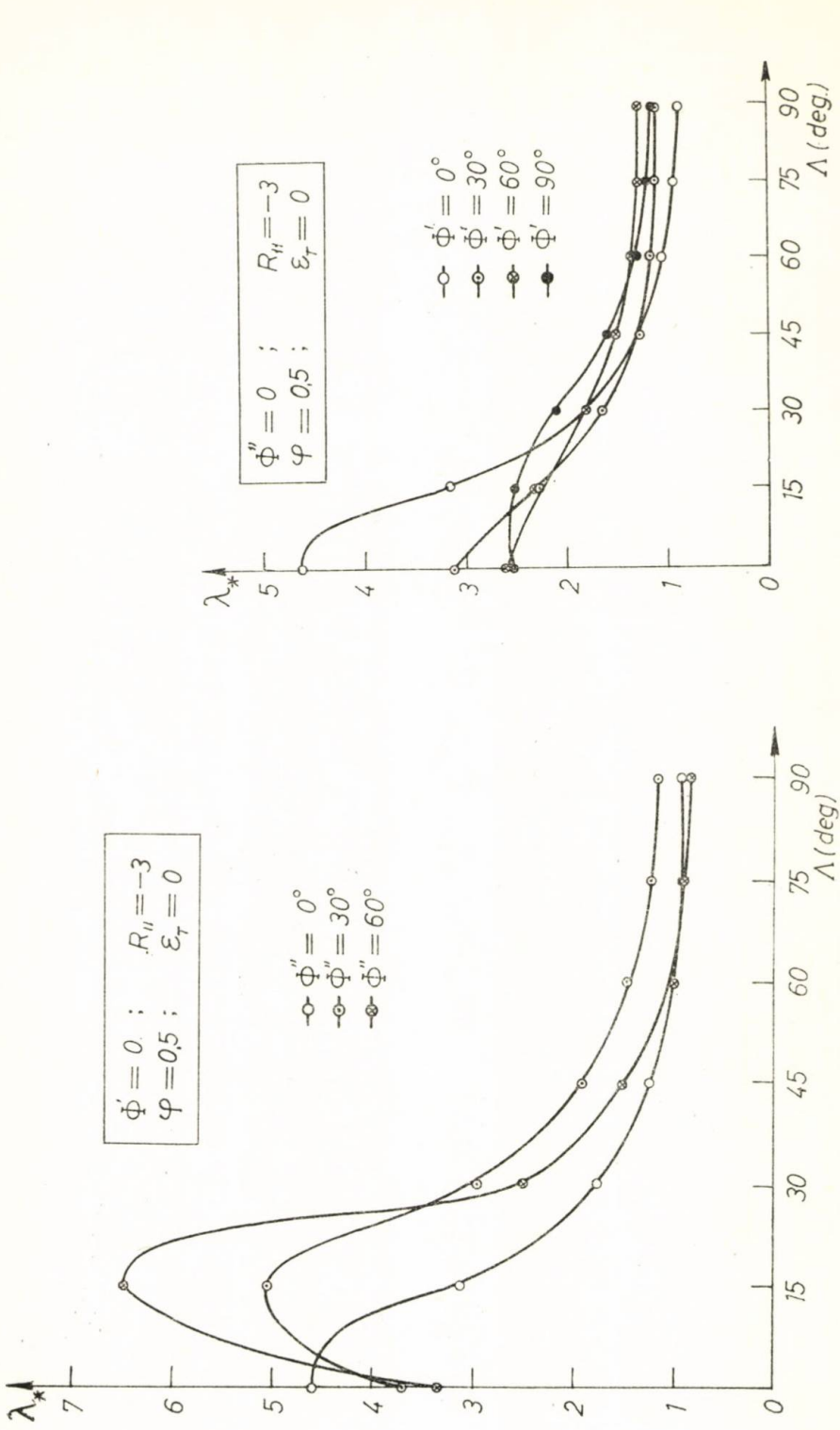

λ*
Φ' = 0 ; R_II = −3
φ = 0,5 ; ε_τ = 0
Φ'' = 0°
Φ'' = 30°
Φ'' = 60°
Λ (deg)
0
15
30
45
60
75
90
1
2
3
4
5
6
7

Fig. 1

λ*
Φ'' = 0 ; R_II = −3
φ = 0,5 ; ε_τ = 0
Φ' = 0°
Φ' = 30°
Φ' = 60°
Φ' = 90°
Λ (deg.)
0
15
30
45
60
75
90
1
2
3
4
5

Fig. 2

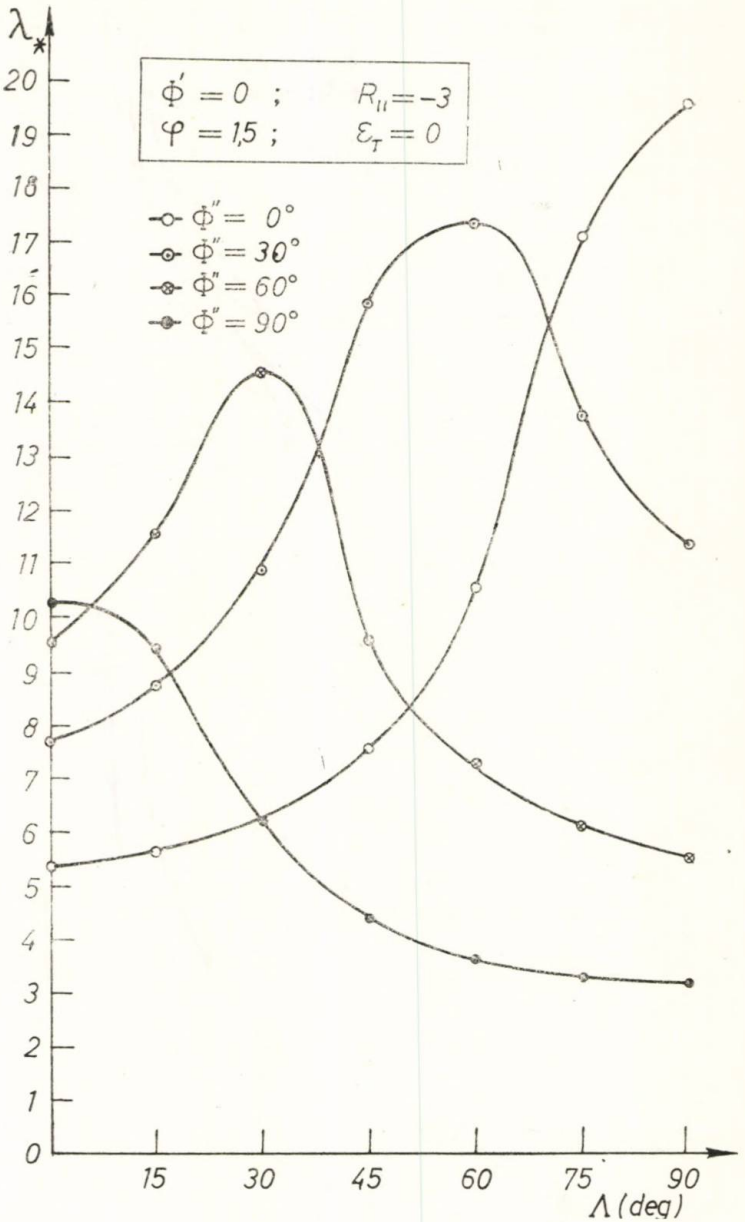

λ*
Φ' = 0 ;
φ = 1,5 ;
R_II = −3
ε_T = 0
Φ'' = 0°
Φ'' = 30°
Φ'' = 60°
Φ'' = 90°
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
15
30
45
60
75
90
Λ (deg)

Fig. 3

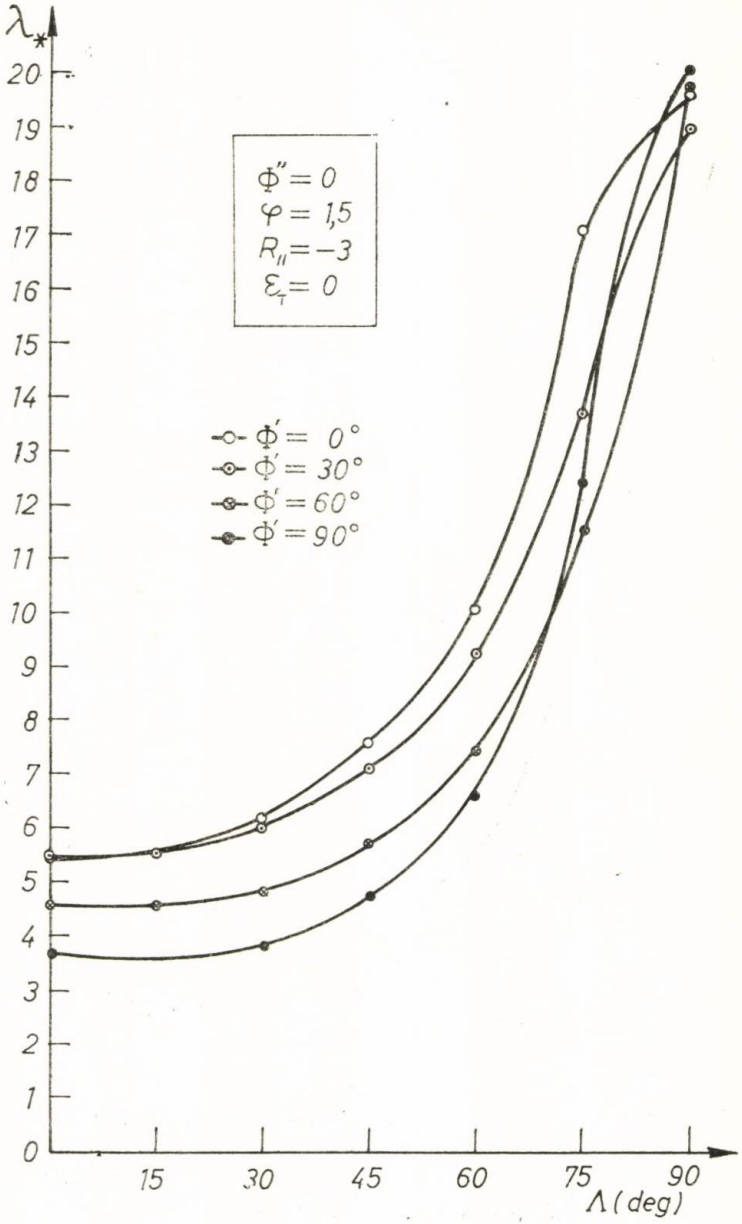

λ*
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
Φ″ = 0
φ = 1,5
R_II = −3
ε_τ = 0
Φ′ = 0°
Φ′ = 30°
Φ′ = 60°
Φ′ = 90°
15
30
45
60
75
90
Λ (deg)

Fig. 4

CONTRIBUŢII LA ISTORIA MECANICII FLUIDELOR ÎN ROMÂNIA PÎNĂ LA ÎNCEPUTUL SECOLULUI XX *)

de DAN GH. IONESCU

Institutul politehnic Bucureşti

Se prezintă realizările cu caracter tehnic din epoca antică, meşteşugurile care foloseau energia apei din timpul epocii feudale, precum şi începuturile şcolii române de mecanică a fluidelor.

În edificarea unei culturi socialiste, corespunzătoare spiritualităţii naţiunii noastre, unul dintre aspectele fundamentale îl reprezintă poziţia ştiinţifică faţă de valorificarea moştenirii noastre culturale. Iar o privire, oricît de sumară, asupra culturii noastre actuale, ne arată că aceasta a preluat creator tot ceea ce au realizat mai valoros înaintaşii noştri. Istoria culturii capătă astfel semnificaţii noi şi profunde, ea dovedeşte prezenţa activă a trecutului în cultura noastră actuală, originalitatea acesteia, locul important pe care cultura românească l-a ocupat şi îl ocupă în cadrul culturii mondiale.

În acest context, istoria mecanicii fluidelor se referă la un domeniu restrîns, dar important, al activităţii umane, şi în care contribuţia poporului nostru, semnificativă mai ales în ultimele decenii, merită fără îndoială a fi pusă în evidenţă. Scopul comunicării de faţă este de a prezenta o perioadă mai puţin cunoscută a evoluţiei mecanicii fluidelor în ţara noastră, anume din cele mai vechi timpuri şi pînă la începutul secolului al XX-lea. Este, de altfel, perioada în care nici nu putem vorbi despre o „mecanică a fluidelor" în înţelesul pe care i-l dăm astăzi: pînă la începutul epocii moderne ne putem referi numai la evoluţia folosinţelor hidraulice cu caracter meşteşugăresc, iar, — în epoca modernă —, pînă la mijlocul secolului al XIX-lea putem cita numai unele realizări hidrotehnice datorate mai ales unor ingineri străini. În 1867 se înfiinţează însă la Bucureşti „Şcoala de poduri, şosele şi mine", denumită în 1868 „Şcoala de po-

*) Comunicare prezentată la a XIV-a sesiune ştiinţifică a Institutului politehnic din Bucureşti (10—11 aprilie 1971), consacrată semicentenarului Partidului Comunist Român.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 32, NR. 2, 1973, P. 481—494

duri şi şosele", începe formarea sistematică a corpului tehnic superior român. Dezvoltarea ulterioară a mecanicii fluidelor în ţara noastră este remarcabilă şi, chiar de la începutul secolului al XX-lea, aportul matematicienilor şi inginerilor români în acest domeniu se situează la nivel mondial.

Referindu-ne deci la perioada dinainte de 1900, nu ne propunem să o prezentăm în mod exhaustiv, ci mai curînd să o ilustrăm prin date care, cu două excepţii, nu au mai fost relevate în lucrările privind istoria mecanicii fluidelor în ţara noastră*). Deşi disparate, credem că aceste date pot da totuşi o imagine concludentă asupra perioadei considerate. Mai subliniem că am folosit numai o mică parte din bogatul material documentar existent.

I

În ceea ce priveşte *epoca antică*, cercetările arheologice ne-au dezvăluit, mai ales în ultimii ani, pe întregul teritoriu al patriei noastre, urmele unor civilizaţii înaintate, în care folosinţele hidraulice aveau un rol important.

Începem prin menţionarea lucrărilor de *alimentări cu apă*, notînd că cetăţile dacice de la Costeşti şi Blidaru din munţii Orăştiei, probabil şi altele, aveau 1—2 cisterne de apă, construite din piatră şi fie căptuşite cu lemn, fie tencuite cu un mortar special impermeabil (*opus signinum*). Sarmisegetusa lui Decebal, din Grădiştea Muncelului, era alimentată de la o captare situată în afara zidurilor cetăţii şi de la care apa era adusă, prin două conducte de teracotă, la un bazin de decantare din lemn, de unde, printr-o altă conductă, se îndrepta spre cetate ([11] p. 22—24, [30]).

Grecii şi romanii au realizat, de asemenea, lucrări importante de alimentări cu apă. În Ulpia Traiana (care nu este construită chiar pe locul Sarmisegetusii lui Decebal), apa potabilă pentru cei 15 000 — 20 000 de locuitori era adusă printr-o importantă reţea de conducte, ([10] p. 11, 16—17). Apeducte întîlnim şi în aşezările greceşti şi romane din Dobrogea, de exemplu la Tropaeum Traiani, Tomis şi Callatis; la Noviodunum, apeductele aveau o lungime de 8—10 km ([34], p. 465, 476). Cele mai importante apeducte descoperite pînă în 1954 sînt însă cele de la Histria; ele datează probabil din secolele II—I î.e.n., poate chiar din perioada primelor aşezări greceşti, [7]. Primul apeduct de la Histria, îngropat la o adîncime medie de 2 m, este făcut din tuburi obişnuite de pămînt ars, legate între ele cu var gras; din ele se cunoşteau, pînă în 1954, numai 4 km, dar e probabil că mergea mult mai departe dincolo de satul Histria, spre nord sau spre vest. Al doilea apeduct este mult mai important atît ca tehnică de construcţie, cît şi ca debit. El este alcătuit din blocuri de piatră

*) Lucrări privind istoria mecanicii fluidelor în ţara noastră, înainte de 1900, au fost publicate de prof. Cristea Mateescu [21], [22], [23], iar date privind evoluţia maşinilor hidraulice sînt conţinute în cartea prof. Dorin Pavel [27] pp. 55—69. A se vedea şi [6], [14], [18], [30], [31], [33] pp. 69—77, [35]. Ulterior prezentării acestei comunicări, a apărut *Istoria matematicilor aplicate clasice din România*, de George St. Andonie, Edit. Academiei, Bucureşti 1971; în această carte este tratată pe larg în special perioada de după 1900.

de forma unui paralelilpiped drept, avînd o secţiune pătrată cu latura de 0,40 m şi o lungime de 0,60 m. În interiorul fiecărui bloc este săpată cu dalta o conductă circulară cu lungimea de 0,60 m şi diametrul de 0,20 m. La un capăt al blocului se află în exterior o buză circulară de 0,05 m, iar la celălalt capăt un intrînd de dimensiuni egale, astfel încît blocurile, puse cap la cap se îmbină perfect (fig. 1). Pentru asigurarea etanşeităţii,

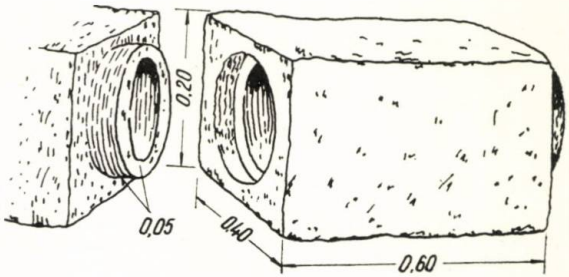


Fig. 1. — Fragmente ale celui de-al doilea apeduct de la Histria ([7], p. 358).

blocurile se legau cu apă de var şi cîlţi. Deoarece realizarea unor asemenea blocuri cere un volum mare de muncă, este probabil vorba de un apeduct scurt. În schimb, cel de-al treilea apeduct de la Histria avea o lungime de 25 km şi a putut fi urmărit pe toată întinderea lui, de la cetate şi pînă la izvoarele de sub dealul Fîntînele. El se află tot la o adîncime de 2 m, este construit din blocuri de piatră legate cu var şi nisip, iar secţiunea utilă are o formă dreptunghiulară, cu fundul puţin concav, de 0,30 m lăţime şi 0,35 m înălţime. Partea cea mai caracteristică a acestei construcţii o formează pereţii şi fundul cuvetei, care au trei rînduri de tencuială în *opus signinum*, ultimul fiind uns cu ulei de in fiert, ceea ce asigură o impermeabilitate perfectă. Depunerile masive arată că acest apeduct trebuie să fi fost în funcţiune cel puţin 100 de ani.

În legătură cu alimentările cu apă, trebuie amintite şi *cisternele*, cum sînt cele de la Ulpia Traiana, Tropaeum Traiani şi Histria ([10] p. 37, [34] p. 465).

Lucrări de *canalizare* importante se găseau în coloniile greceşti, apoi în municipiile şi castrele romane de pe teritoriul ţării noastre. La Tropaeum Traiani, strada principală (*via principalis*) era pavată cu lespezi mari de piatră. Prin mijlocul părţii carosabile, care avea o lăţime de 7 m, pe sub aceste lespezi trecea un canal adînc de 1,40 m şi lat de 0,85 m, construit din piatră şi cărămidă legate cu mortar; el servea pentru canalizare, dar adăpostea şi o conductă de olane pentru alimentarea cu apă ([34] p. 467).

În toate aşezările romane se află *băi încălzite* (*thermae*). Cele din Ulpia Traiana şi Histria, probabil şi altele, erau încălzite prin circulaţia aerului cald pe sub podeaua de cărămidă şi prin cărămizile tubulare cu care erau căptuşiţi pereţii (sistem numit *hypocaustum* şi utilizat şi la alte edificii) ([13], [10] p. 36—37). În secolul al III-lea era o normă generală ca alături de fiecare castru să se construiască o baie încălzită; în Oltenia au fost descoperite terme la castrele de la Bivolari, Bumbeşti, Copăceni-

Argeș, Drobeta, Rădăcinești, Romula, Săpata de Jos, Slăveni și Sucidava ([32] p. 258—265).

În sfîrșit, trebuie să reamintim o importantă lucrare hidrotehnică realizată de romani, e adevărat nu pe teritoriul țării noastre, dar legată de una dintre realizările cele mai importante ale regimului nostru. Este vorba de canalul săpat pe malul jugoslav al Dunării, în vederea îmbunătățirii navigației la Porțile de Fier. Canalul a început a fi săpat probabil în jurul anului 103, în perioada construcției podului lui Traian, iar urmele sale au rămas pînă astăzi; el se întindea pe o distanță de 3,2 km din amonte de Cataracte și pînă în dreptul comunei Sib (situată imediat în amonte de actuala hidrocentrală), și avea o secțiune trapezoidală cu o lățime de 65 m la radier ([15] p. 59—60).

II

În *epoca feudală* au luat o mare extindere folosințele hidromecanice legate de dezvoltarea diferitelor meșteșuguri: morile, ferăstraele, scărmănătoarele, piuele, foalele furnalelor etc. erau acționate de obicei hidraulic; unele erau primitive, pe cînd altele dovedeau multă ingeniozitate.

Roțile hidraulice din Țările Române sînt mai ales de tipurile întîlnite, în aceeași perioadă, și în celelalte părți ale Europei. Altele sînt însă de o construcție cu totul originală. Astfel este *roata cu făcaie*, întîlnită numai la noi și în Jugoslavia; precursoare a turbinelor cu acțiune, ea are axul vertical, linguri de forma unei jumătăți de cupă Pelton și utilizează de obicei căderi mici, de 1—3 m, ([21], [27] p. 3—4, [28] p. 66—67). În secția de mașini hidraulice de la Deutsches Museum din München, este expus sub nr. 1 un exemplar original (probabil din Transilvania) al unei asemenea roți, cu toate anexele, astfel că instalația poate fi pusă în funcțiune; ea este denumită „alte rumänische Mühle" (moară veche românească), iar roata cu făcaie este considerată ca cel mai vechi tip de turbină (fig. 2).

Roțile de apă erau foarte numeroase în Țările Române; chiar relativ recent, în 1937, prof. Dorin Pavel evalua numărul lor la peste 8 000 ([28] p. 9). Pe de altă parte, ele sînt menționate în cele mai vechi documente, de obicei în legătură cu meșteșugurile pe care le deserveau. Astfel, în Maramureș sînt atestate documentar moara de la Crișănești la 1375 și o moară pe Șieu la 1419, ultima fiind probabil anterioară anului 1385 ([29] p. 124). În Transilvania, într-un document din prima jumătate a secolului al XV-lea, sînt pomenite două mori la Cluj pe Someș ([26] p. 107), iar la 1342 se pomenește de construcția unor piue lîngă Oradea ([26] p. 26—27). Cu prilejul unei hotărnicii, tot din 1342, între satele Cisnădie și Șelimbăr, se amintește de „șanțul morii de tăbăcit" ([26] p. 31). În Moldova, dacă ne referim numai la documentele publicate de Mihai Costăchescu [9] și numai la perioada 1400—1450, găsim citate circa 30 de mori dăruite de domnitori diferitelor persoane. Un act de la 1448, publicat mai recent, amintește de steampul de pisat aur de la Baia; asemenea steampuri erau și ele acționate hidraulic [25]. Iar în Muntenia, Paul de Alep, călător în Țările Române pe la mijlocul veacului al XVII-lea, menționează pe Argeș, lîngă București, „o moară frumoasă și mare,... și de felul căreia noi n-am mai văzut încă", ([1] p. 209). Tot Paul de Alep

citează roţile de apă care puneau în funcţiune foalele furnalelor de la Baia de Aramă ([1] p. 183). De altfel, acţionarea hidraulică a foalelor de la furnale constituia un procedeu pomenit încă din 1392 într-un act al lui Mircea cel Bătrîn, [25], şi care era folosit şi în metalurgia fierului [24].

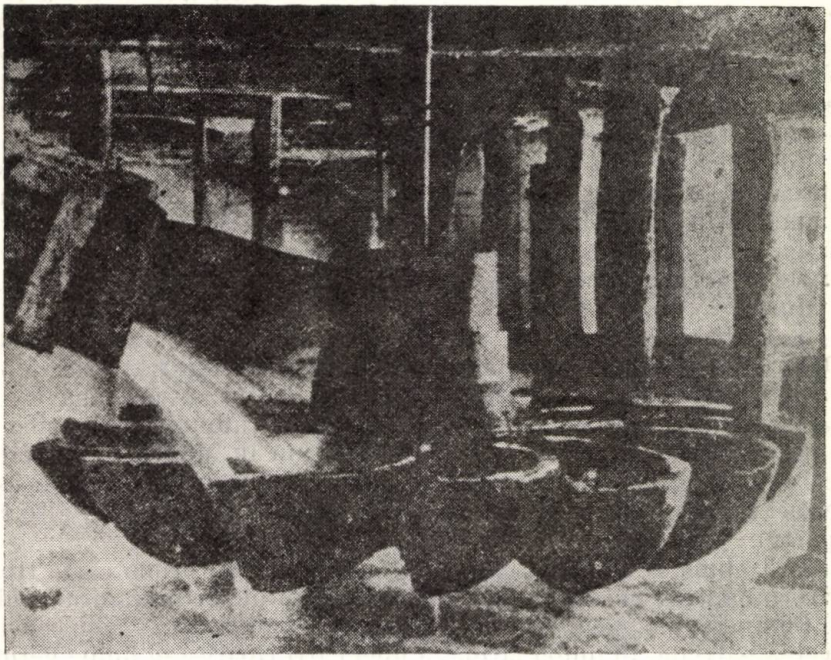


Fig. 2. — Roata cu făcaie de la Deutsches Museum din München ([27], p. 4).

Pentru crearea căderilor necesare obţinerii energiei hidraulice, dar şi pentru alte folosinţe, cum ar fi piscicultura, au fost create numeroase *lacuri artificiale* (*iazuri* sau *heleşteie*). În „Descrierea Moldovei", Dimitrie Cantemir aminteşte de „numeroasele lacuri, pe care natura sau îndemînarea omului le-au scos la iveală". Iar descriind unul dintre aceste lacuri, arată că „lungimea şi lăţimea i le sporeşte o iezătură pe care voievodul Vasile Lupu Albanezul a poruncit să se facă ca să se oprească apele şi să ridice mori folositoare" ([8] p. 45—46). De altfel, bogăţia Moldovei în lacuri artificiale este relevată şi de documente mai vechi, cum este „Descrierea anonimă" din 1528 [36]. Iată şi o altă folosinţă a lacurilor artificiale, legată de tehnica culegerii aurului din nisipul rîurilor: Paul de Alep relatează că toată regiunea dintre Rîmnicu-Vîlcea şi mănăstirea Cozia era „prevăzută cu zăgazuri mari... La deschiderea zăgazului se înlătură gunoiul şi se alege praf de aur de pe fund" ([1] p. 168—169).

Lucrările de *alimentări cu apă* apar destul de tîrziu în epoca feudală, în Ţările Române, iar ca lucrări de *canalizare* nu găsim decît proiectul „canalului lui Ipsilanti" (sfîrşitul secolului al XVIII-lea), indicat pe o hartă, între Dîmboviţa şi Argeş, şi avînd scopul de a atenua inundaţiile Dîmboviţei în Bucureşti [14], [35]. (Datorită vicisitudinilor istoriei, alimentările cu apă şi canalizările greco-romane, ca cele amintite mai sus,

fuseseră scoase din uz). Vasile Lupu, pe care l-am mai văzut avînd preocupări hidrotehnice, inițiază spre mijlocul secolului al XVII-lea alimentarea cu apă a Iașilor, construind cu acest prilej primul podeț-apeduct din țara noastră*), iar sub Constantin Brâncoveanu (1688—1714) se face alimentarea cu apă a orașului Focșani, prin scocuri, „de la două ceasuri depărtare". În București, spre sfîrșitul secolului al XVIII-lea, o parte din străzi erau prevăzute cu cișmele, care erau alimentate de la izvoarele din Valea Crevediei [14]; fragmente din conductele respective au fost găsite cu prilejul amenajării lacurilor din jurul Capitalei, în deceniul 1930—1940, (comunicare a prof. Dorin Pavel).

Problema *navigației interioare*, în special pe Dunăre, a fost studiată îndeaproape: [8] p. 41, [15], [18], [23], [30], [33]. Amintim numai o sursă mai puțin cunoscută, anume descrierea salinelor din Transilvania, făcută la 1528 de Hans Dernschwam [12]; pentru transportul sării, la Turda se construiau luntre mari și mijlocii, care navigau apoi pe Arieș și pe Mureș.

În sfîrșit, este interesant de relevat că Dimitrie Cantemir relatează în „Descrierea Moldovei" despre, probabil, prima încercare de determinare a *debitului solid* din rîurile noastre: „Prutul... are apa cea mai ușoară și mai sănătoasă, cu toate că este cam tulbure din pricina nisipului pe care îl duce cu ea... Pe cînd ședeam în Moldova, am făcut o încercare și am găsit că o cantitate de o sută de dramuri este mai ușoară cu treizeci de dramuri decît aceeași cantitate de apă luată din alte rîuri" ([8] p. 42).

Mai trebuie să amintim că în 1773 apare la Cluj prima carte tipărită pe teritoriul patriei noastre și care cuprinde capitole de mecanica fluidelor. Este „Compendium elementorum matheseos universae..." și constituie traducerea parțială, în limba latină, a unei cărți tipărite în limba germană, la Halle, în 1710—1711 și avînd ca autor pe Christian Wolff. Ediția latină de la Cluj cuprinde elemente de hidrostatică (principiul vaselor comunicante și principiul lui Arhimede) și elemente de hidraulică practică (șurubul lui Arhimede, roata hidraulică, sifonul, pompa cu piston etc.) ([2] p. 91—92).

III

Odată cu *epoca modernă*, în Țările Române apare necesitatea executării unor lucrări tehnice de amploare. În lipsa unor cadre tehnice superioare autohtone, se apelează la început la ingineri străini. Dar această situație nu avea să dureze mult. Căci concomitent se întărește convingerea în necesitatea și posibilitatea unui învățămînt tehnic superior în limba română. Școlile lui Gheorghe Asachi de la Iași (1813) și Gheorghe Lazăr de la București (1818) constituie începutul. Regulamentul Organic, aplicat la 1831 în Muntenia și la 1832 în Moldova, are o influență pozitivă asupra dezvoltării învățămîntului. În 1834, Epitropia școlilor din Moldova trimite șase tineri pentru studii la Viena; dintre aceștia, Alexandru Costi-

*) Acest podeț-apeduct al lui Vasile Lupu nu poate data din 1675, cum se afirmă în [6], deoarece Vasile Lupu nu mai domnea din 1653.

nescu trebuia să studieze „ştiinţele teoretico-practice de inginerie civilă şi militară, mecanică şi hidraulică". Alexandru Costinescu avea să devină primul inginer-arhitect român diplomat al Politehnicii din Viena, profesor la Academia Mihăileană înfiinţată în 1840 la Iaşi, iar mai tîrziu primul director al „Şcolii naţionale de ponţi şi şosele, mine şi arhitectură", înfiinţată în 1864 la Bucureşti, ([2] p. 150—153). Începînd din 1851, funcţionează la Bucureşti o „şcoală de aplicaţie", în realitate o şcoală de conductori ([19] p. 156—165). Este aceasta, pentru învăţămîntul tehnic românesc, o perioadă de căutări, de înfruntări ale elementelor progresiste cu cele retrograde, o perioadă care reflectă transformările sociale legate de începuturile capitalismului în Ţările Române.

Din istoria mecanicii fluidelor în secolul al XIX-lea, care este mai bine cunoscută, ne vom referi doar la două momente semnificative, care însă n-au fost nici ele relevate pînă acum în lucrările privind istoria mecanicii fluidelor.

Data de 30 octombrie 1867 este considerată ca marcînd în ţara noastră începutul învăţămîntului tehnic superior, prin înfiinţarea „Şcolii de poduri, şosele şi mine", care a funcţionat de atunci neîntrerupt, sub diferite forme : de exemplu, din 1868 s-a numit „Şcoala de poduri şi şosele". La această Şcoală, Elie Angelescu ţine în anul şcolar 1871/1872, în faţa anului III, *primul curs de hidraulică* din ţara noastră ; deschiderea cursului se face la 8 noiembrie 1871.

Elie Angelescu (1836—1882), inginer diplomat al Şcolii centrale de arte şi manufacturi din Paris, a fost profesor la Şcoala de poduri şi şosele din Bucureşti (1867—1873), primul profesor de matematică şi mecanică raţională al Universităţii din Bucureşti (1864—1866) şi profesor la Şcoala de agricultură şi silvicultură de la Herăstrău (1876—1882). Patru manuscrise aflate la Biblioteca Academiei R.S.R. conţin cursurile sale de algebră, geometrie în spaţiu, noţiuni de calcul infinitezimal, mecanică teoretică, rezistenţa materialelor, hidraulică, mecanica fluidelor, topografie, agrimensură, geniu rural, drenări şi irigaţii, mecanică agricolă, maşini motrice şi altele ([2] p. 189—190).

„Cursul de hidraulică" din 1871/72, [3], cuprinzînd 60 de pagini, constituie o prezentare sistematică, riguroasă şi foarte cuprinzătoare pentru epoca respectivă (fig. 3 şi 4). Iată conţinutul său, cu denumirile originale, care se observă că nu s-au schimbat prea mult de atunci *) :

Noţiuni de hidrostatică. Definiţii [fluide perfecte, lichide, gaze, vîscozitatea], presiunea unui fluid, principiul egalităţii de presiuni [al independenţei de direcţie a valorii presiunii], diferenţa de presiuni după diferenţa de nivel [expresia presiunii într-un lichid greu], presiunea pe pereţi planul, presiunea pe pereţi curbi, vase comunicante, principiul lui Arhimede, echilibrul corpurilor afundate şi plutitori.

Hidraulică. Mişcare permanentă, teorema lui Daniel Bernoulli, [cu interpretările geometrică şi energetică], scurgerea lichidelor pe orificii în pereţi subţiri, teorema lui Torricelli, contracţiunea vinei, scurgerea prin deversoare, piezometru, schimbarea răpede [bruscă] de secţiune, pierdere

*) Ortografia este cea actuală. Parantezele drepte cuprind explicaţiile noastre privind termenii care nu se mai folosesc în prezent, sau alte precizări.

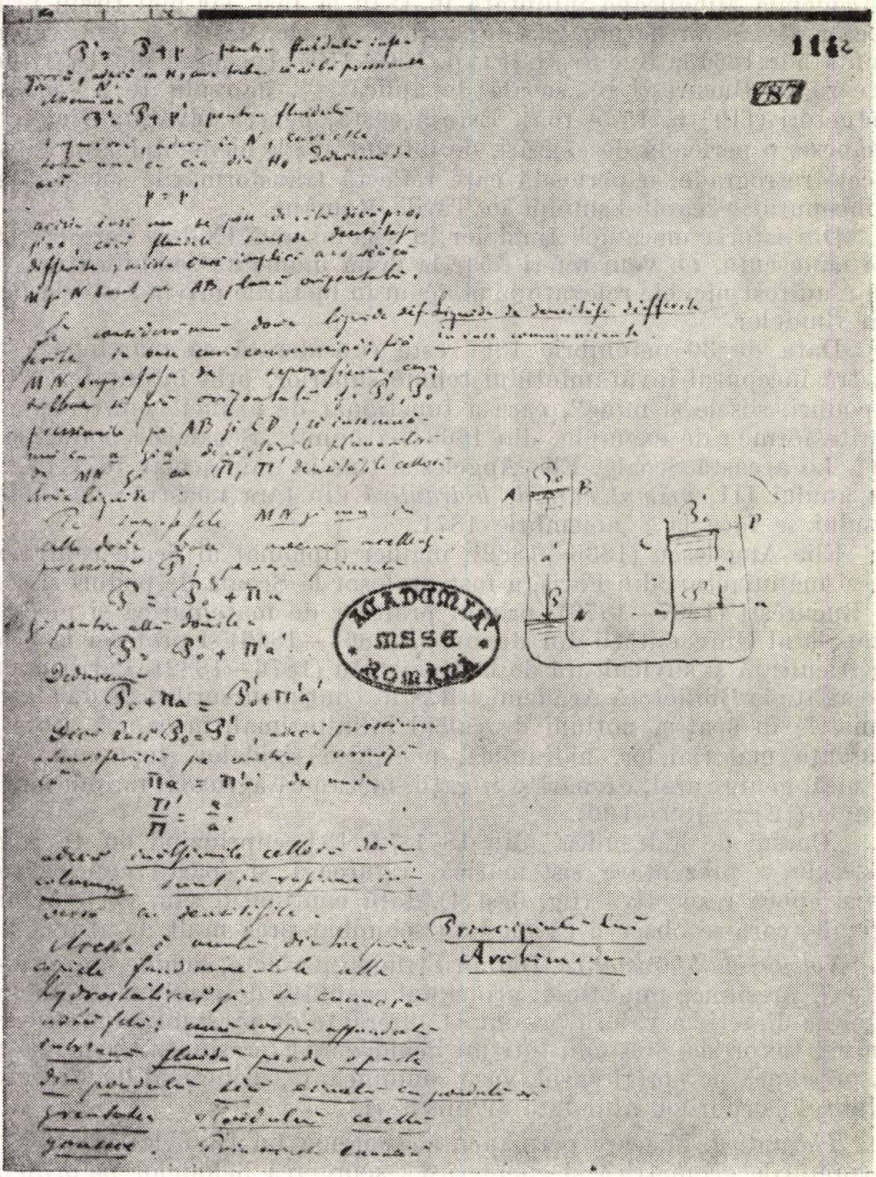


Fig. 3. — Pagină din manuscrisul cursului de hidraulică al lui Elie Angelescu ([3], p. 114 r).

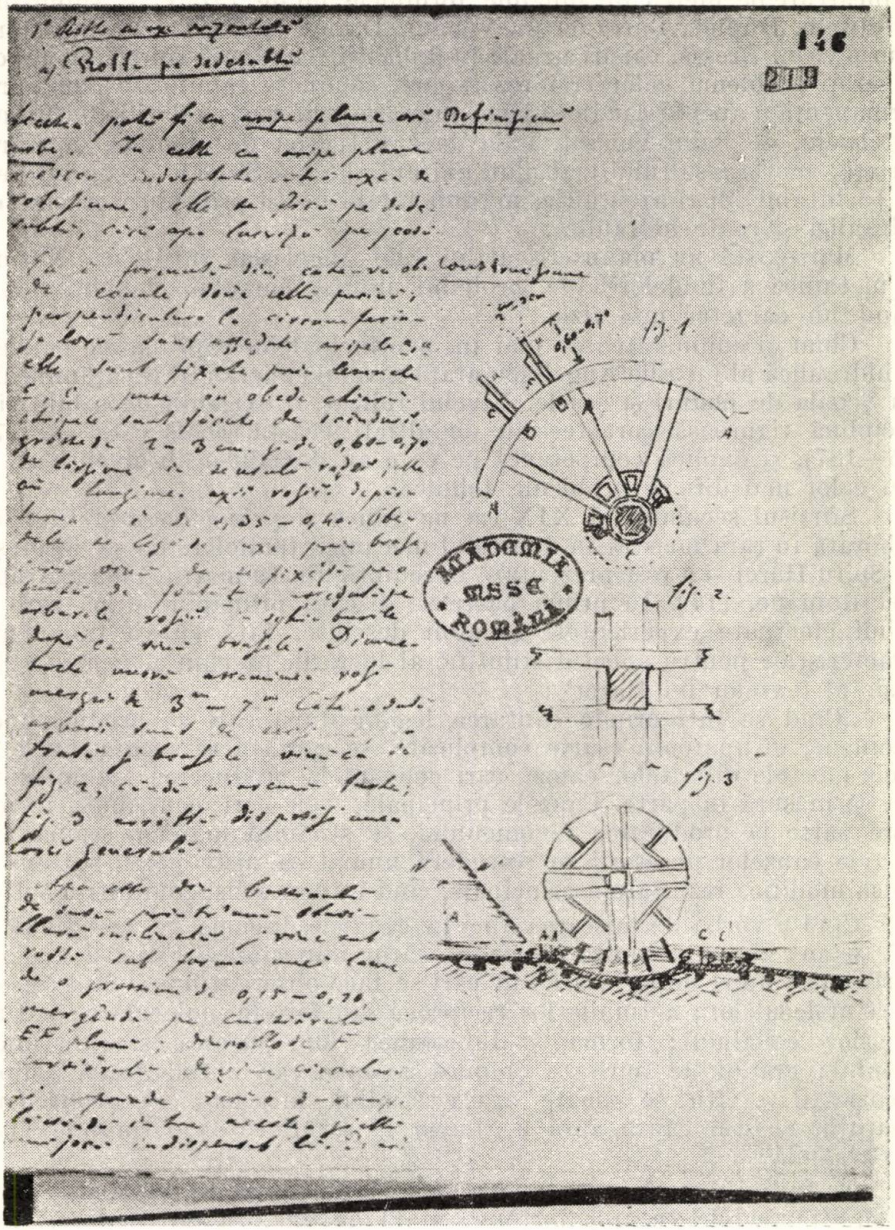


Fig. 4. — Pagină din manuscrisul cursului de hidraulică al lui Elie Angelescu ([3] p. 146r).

de încărcare [pierderi de sarcină], diafragme, adause [ajutaje] cilindrice, adaus divergent, studiul mișcării fluidelor în olane [conducte], pierderea de încărcare pe metru de lungime, formulele lui de Prony, d'Aubuisson, Eytelwein, Dupuit, Barré de St.-Venant, Darcy, tablele lui Prony, Mary, Fourneyron, Bresse, cazuri uzuale în aplicații [conducta simplă, conducte în serie, problema celor trei rezervoare, conducte ramificate], mișcarea permanentă a apei în canale și rîuri, mișcare uniformă, relațiile lui Prony, Eytelwein, de Saint-Venant, linia de apă [curba de remuu], mișcarea variată, teoria resaltului [saltului hidraulic] după Bidone, măsura depensei [debitului] în rîuri și gîrle, măsura iuțelii medii prin plutitori, motori hidraulici și roate hidraulice.

Mai există un manuscris al lui Elie Angelescu, intitulat „Noțiuni de mecanică a fluidelor" [4], probabil ulterior cursului de hidraulică și avînd un caracter mai fizic.

Chiar și enumerarea de mai sus a principalelor capitole ale cursului de hidraulică al lui Elie Angelescu arată nivelul superior al învățămîntului din Școala de poduri și șosele. Nivelul ridicat, o exigență deosebită și o disciplină riguroasă caracterizau de altfel această școală ([19] p. 172, 185—187), și explică competența pe care au dovedit-o absolvenții ei, în fața celor mai dificile probleme tehnice.

Sfîrșitul secolului al XIX-lea ne aduce și *prima lucrare științifică* elaborată în țara noastră în domeniul mecanicii fluidelor. Ea se datorește lui Spiru Haret și a fost prezentată în ședința din 19 martie 1882 a Academiei Române, [17]. În prima parte se discută principiile după care ar trebui efectuate experiențele în albii deschise. Iată cîteva fragmente, caracteristice pentru spiritul științific al lucrării, precum și pentru stilul clasic al textelor lui Haret*):

„Cînd se întreprinde căutarea legilor după cari se produc unele fenomene, în aparență foarte complicate, se caută a se separa unele de altele efectele diferitelor cauze, cari concură la producerea fenomenului, și a se măsura în parte. Cauzele principale, cele cari contribuie în mai mare parte la producerea fenomenului, se studiază mai cu seamă; iar efectele cauzelor accesorii se consideră numai ca niște perturbațiuni ce vin să modifice rezultatele principale, cînd într-un sens, cînd într-altul...

Cînd e vorba de mișcarea apei în canalele descoperite, trebuie să se țină seama de mai multe cauze, a căror importanță relativă variază foarte mult după împrejurările în cari se face observațiunea. Sînt: greutatea moleculelor; acțiunile lor reciproce sau forțele moleculare; natura pereților canalului; forma și direcțiunea lor; puterea și direcțiunea vîntului; gradul de puritate chimică a apei, care influențează asupra vîscozității... Nu se poate ataca studiul mișcării, ca consecință a tuturor acestor cauze, fără a ajunge la rezultate de o complicațiune inextricabilă...

Ar trebui dar să caute cineva să experimenteze în condițiuni alese astfel, ca efectele tuturor forțelor, afară de una, să fie anulate, și să repete aceste experiențe pentru fiecare din ele. Din nenorocire, această separațiune este materialmente imposibilă...

*) *cf.* Nota de la p. 487

Cu toate acestea, dacă ar fi posibil a se alege condițiunile în așa chip ca efectele unora din forțele citate, fără a fi cu totul anulate, să fie cel puțin reduse în cea mai mare parte, este evident că fenomenul va purta cu deosebire caracterul forțelor al căror efect a rămas în toată energia lui, și că, prin urmare, va fi posibil a se determina expresiunea acestor din urmă forțe...

Imputarea cea mai gravă ce se poate face celor mai multe din experiențele citate mai sus [e vorba de cele ale lui Prony, Dubuat, Chézy, Eytelwein, Darcy, Bazin etc.], este că nu sînt făcute după acest plan, în genere urmat de științele de observațiune... Influența pereților, care e așa de considerabilă, se va simți cu atît mai tare, cu cît secțiunea canalului va fi mai mică. Or experimentatorii citați se pare... că... au preferat secțiunile mici; afară de cîteva experiențe..., făcute pe Rin și pe Weser, celelalte s-au făcut mai toate în rigole de lemn...

Este dar necesar, atît din punctul de vedere al practicii, cît și al teoriei, a se întreprinde pe o scară întinsă experiențe în canale de o secțiune cît se va putea mai mare... Va trebui să facem experiențe chiar în rîuri, de preferință în rîurile mari".

Spiru Haret este și inventatorul uneia dintre primele moriști hidraulice moderne, concepută în 1882, [16], dar care nu a putut fi brevetată, deoarece, cu cîteva zile înainte, un american brevetase un aparat similar: poate întîmplare, poate indiscreția voită a constructorului parizian al aparatului (fig. 5). Iată descrierea lui Haret, [17]:

„Primul desen reprezintă un *indicator* (compteur) *electric*, avînd niște ace, cari se mișcă pe niște cadrane gradate; indicatorul este în comunicațiune cu o baterie electrică. Curentul trimis de dînsa poate fi întrerupt sau restabilit prin o dispozițiune analoagă cu cea din receptoarele Morse. Același curent trece și prin o bobină fixată la un *compteur* de secunde; cînd se începe observațiunea, această bobină dă drumul mecanismului comptorului de secunde, așa că se poate nota cu o preciziune foarte mare momentul începerii observațiunii...

Al doilea aparat este un fel de *morișcă Woltmann*, care la fiecare învîrtire stabilește și întrerupe curentul cîte o dată; așa că se poate citi pe cadranele indicatorului electric, numărul de învîrtiri făcut de morișcă în timpul τ. Din acest număr se va deduce iuțeala V a curentului".

Prin îmbinarea considerațiilor teoretice cu preocupările pentru o experimentare cît mai precisă, lucrarea lui Spiru Haret este caracteristică noilor concepții ce începuseră a se impune către sfîrșitul veacului al XIX-lea. Într-adevăr, la începutul secolului al XX-lea ia naștere, ca sinteză a hidromecanicii teoretice și a hidraulicii aplicate, o nouă știință — mecanica fluidelor de astăzi.

Inginerii și matematicienii români, care, într-un răstimp de numai 30 de ani, atinseseră un înalt nivel științific și tehnic, își dovediră și în continuare capacitatea, prin lucrări ce aveau să-i situeze în primele rînduri ale științei și tehnicii mondiale. Dar realizările lor din prima jumătate a secolului al XX-lea aveau să fie mai curînd rodul entuziasmului și al

abnegației lor, decît ale interesului cercurilor conducătoare. Doar după Eliberare și numai în cadrul marilor planuri de transformare a naturii și societății, inițiate și conduse de Partidul Comunist Român, au putut

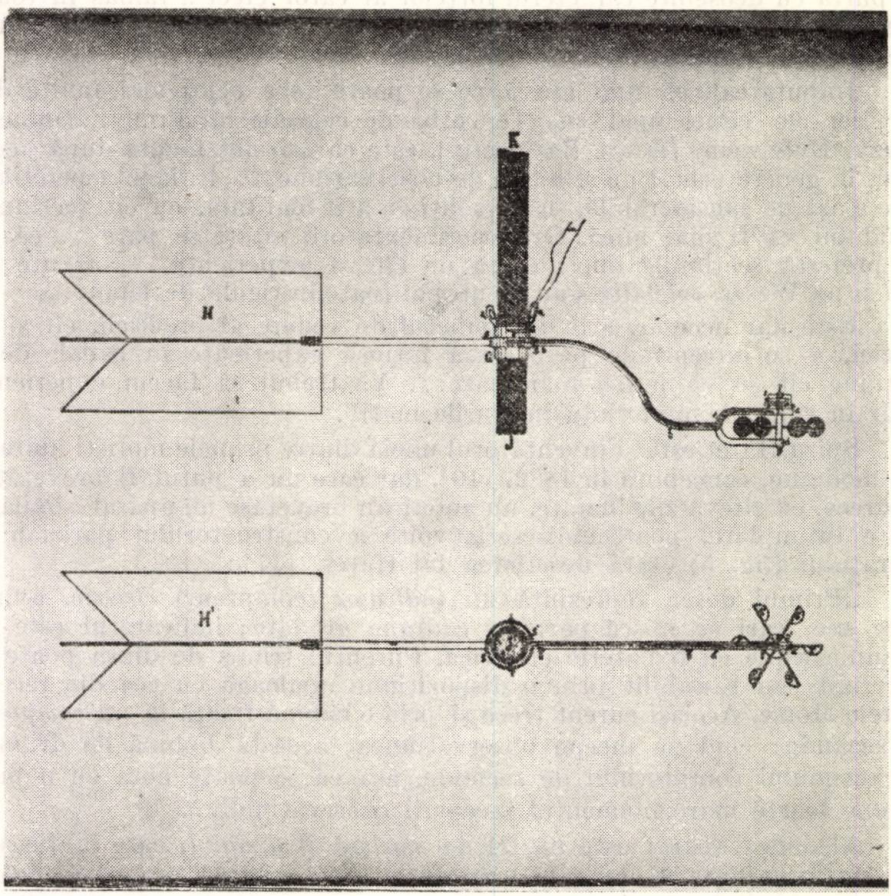


Fig. 5. — Morișca hidraulică inventată de Spiru Haret ([16], p. 183).

inginerii și matematicienii români să dea întreaga măsură a capacității lor, să-și desfășoare plenar întregul lor potențial creator, să vadă înfăptuite visurile lor cele mai îndrăznețe.

Primită la redacție la 5 aprilie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. [Alep, Paul de], *Călătoriile patriarchului Macarie de Antiochia în Țările Române. 1653—1658*, (Tesă...de Emilia Cioran), Stabilimentul grafic I. V. Socecŭ, Bucuresci 1900.
2. Andonie, George Șt., *Istoria matematicii în România*, vol. I, București Edit. Științifică, 1965.

3. ANGELESCU, EL. *Curs de Hidraulică la Şcoala de Poduri şi Şosele, profesat de El. Angelescu, 1871-72, Anul III*, Bibl. Academiei R.S.R., Mss. rom. 3366, p. 106 r-166v.
4. ANGELESCU, EL., *Noţiuni de Mecanica Fluidelor*, Bibl. Academiei R.S.R., Mss. rom. 3366, p. 49 r—57 v.
5. ANGELESCU, EL. *Maşinile motrice*, Bibl. Academiei R.S.R., Mss. rom. 3369, p. 3 r—37 r.
6. BLITZ, EMANUEL, VASILE ZBEGAN şi MARIN SANDU, *Lucrări de alimentări cu apă şi canalizări în perioada 1880—1920*. Inst. de construcţii Bucureşti, Bul. Ştiinţ., **11**, *1*, 91—104, (1968).
7. CANARACHE, V., *Apeductele Histriei*, În *Histria, monografie arheologică*, vol. I, 357—362, Edit. Academiei, 1954.
8. CANTEMIR, DIMITRIE, *Descrierea Moldovei*, (traducere de Petre Pandrea), Bibl. p. toţi, Edit. de Stat p. lit. şi artă, 1956.
9. COSTĂCHESCU, MIHAI, *Documentele moldoveneşti înainte de Ştefan cel Mare*, 2 vol., Viaţa Românească, Iaşi 1931 (vol. I), 1932 (vol. II).
10. DAICOVICIU, C., *Sarmisegetusa (Ulpia Traiana) în lumina săpăturilor*, Cartea Românească, Cluj 1938.
11. DAICOVICIU, C. şi H. DAICOVICIU, *Sarmisegetusa. Cetăţile şi aşezările dacice din munţii Orăştiei*, ed. II, Bucureşti, Edit. Meridiane, 1962.
12. DERNSCHWAM „DE HRADECZIN", HANS, *Raport privind exploatarea salinelor din Transilvania (1528)*, În *Călători străini despre Ţările Române* (edit. Maria Holban), vol. I, p. 256—295, Bucureşti, Edit. Ştiinţifică, 1968.
13. FLORESCU, GR., *Termele*, În *Histria, monografie arheologică*, vol. I, p. 131—154. Edit. Academiei, 1954.
14. GERMANI, D., *Alimentări cu apă şi canalizări în România*, Bul. Soc. Politecnice, **45** (1931) 1351—1395.
15. GONDA, BÉLA v., *Az Al-Dunai Vaskapu és az ottani többi zuhatag Szabályozása*, Budapest 1892.
16. HARET, SPIRU, *Morişcă cu indicaţiuni electrice, indicator electric şi sistemul de suspensiune al morişcei — pentru a măsura iuţeala unui curent lichid într-un punct oarecare (1882)*, În *Operele lui Spiru C. Haret*, vol. X, p. 169—194, Cartea Românească, Bucureşti 1937).
17. HARET, SPIRU, *Consideraţiuni relative la studiulŭ esperimentalŭ alŭ mişcării apeĭ în canale descoperite şi la constituţiunea intimă a fluidelorŭ*, Analele Academiei Române, seria II, **V**, *II*, 343—351 (1883).
18. IONESCU, ION, *Regimul Dunării. Studii şi lucrări făcute în România pentru cunoaşterea acestui fluviu*, Bul. Soc. Politecnice, partea tecnică, **24** (1908) 62—79, 99—126.
19. IONESCU, ION, *Istoricul învăţământului inginerii în România până la înfiinţarea şcoalelor politecnice*, În *Aniversarea a 75 ani de învăţământ technic în România, 50 ani de la reorganizarea Şcoalei naţionale de poduri şi şosele, 10 ani de la înfiinţarea Şcoalei politechnice*, p. 105—235. Cartea Românească, Bucureşti 1932.
20. IVANOV, IGOR, *Învăţământul mecanicii în România în perioada 1821—1918*, Inst. de construcţii Bucureşti, Bul. Stiinţ., *16*, 13—30 (1966).
21 MATEESCU, CRISTEA, *Amenajarea căderilor de apă*, Bul. Soc. Politecnice, **45**, 1340—1350 (1931).
22. MATEESCU, CRISTEA, *Orientări în hidrodinamica subterană*, Inst. de construcţii Bucureşti, Bul. Stiinţ., *13*, 127—136 (1964).
23. MATEESCU, CRISTEA, *Din istoricul dezvoltării hidrotehnicii cu privire specială la epoca dinainte de 1920. (Hidrologia, hidroenergetica, căi navigabile şi porturi, îmbunătăţiri funciare, amenajări complexe)*, Inst. de Construcţii Bucureşti, Bul. Stiinţ., *11*, *1*, 115—127 (1968).
24. NEGRESCU, TRAIAN TR., *Istoricul dezvoltării şi starea actuală a metalurgiei în România*, Bul. Soc. Politecnice, **45**, 2210—2238 (1931).
25. OLTEANU, ŞT., *Cercetări cu privire la producţia minieră din Moldova şi Ţara Românească (secolele X—XVII)* Studii, **19**, 941—965 (1966).
26. PASCU, ŞTEFAN, *Meşteşugurile din Transilvania până în secolul al XVI-lea*, Edit. Academiei 1954.
27. PAVEL, DORIN, *Instalaţiuni şi maşini hidraulice*, vol. II, Bucureşti, 1937.
28. PAVEL, DORIN, *Folosinţele hidroelectrice şi hidromecanice în România*, Bucureşti 1938.
29. POPA, RADU, *Ţara Maramureşului în veacul al XIV-lea*, Edit. Academiei, 1970.
30. POPESCU, GH., *Lucrări de navigaţiune fluvială şi maritimă*, Bul. Soc. Politecnice, **45**, 1318 — + 1327 (1931).
31. TROFIN, PETRE şi ALEX. MĂNESCU, *Elie Radu, mare inginer constructor şi valoros profesor de lucrări edilitare*, Inst. de construcţii Bucureşti, Bul. Stiinţ. **11**, *1*, 105—114 (1968).

32. Tudor, D., *Oltenia romană*, ed. II, București Edit. Științifică, 1958.
33. Vasilesco, Grégoire C., *Problème de la canalisation du secteur des cataractes du Bas-Danube. I. Evolution récente des transports et la capacité de trafic de la voie navigable*, București 1928.
34. Vulpe, Radu și Ion Barnea, *Romanii de la Dunărea de jos*, București Edit. Academiei, 1968.
35. Vuzitas, Anastasie G., *Regimul hidraulic al Dâmboviței în legătură cu canalizările orașului București*, În *Asanarea lacurilor Colentinei*, p. 113—134, București 1936.
36. * * *, *Descrierea anonimă a Moldovei (1528)*, În *Călători străini despre Țările Române* (edit. Maria Holban), vol. I, p. 189—206, București Edit. Științifică, 1968.

A 6-a CONFERINŢĂ INTERNAŢIONALĂ DE METALIZARE PRIN PULVERIZARE

de VASILE MARCU

Expunerea de faţă constituie o dare de seamă succintă a celei de-a 6-a Conferinţe internaţionale de metalizare prin pulverizare care a avut loc la Paris între 14—19 septembrie 1970 cu participarea a 266 de delegaţi din 18 ţări.
Expunerea începe cu cîteva generalităţi organizatorice şi statistice asupra celor 6 conferinţe, continuînd apoi cu o serie de capitole care cuprind lista cu titlurile celor 54 de comunicări acceptate de comitetul celei de-a 6-a conferinţe şi cu rezumatele a 21 de comunicări pe care le-am considerat mai importante pentru ţara noastră.

1. GENERALITĂŢI

Obiectivul lucrării de faţă este de a prezenta cititorilor acestei reviste o dare de seamă a unui participant la ultima conferinţă internaţională de metalizare, ţinută la Paris între 14—19 septembrie 1970*).

Coloanele revistei STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ au publicat în trecut lucrări ale colectivului de metalizare de la fostul Institut de mecanică aplicată al Academiei Republicii Socialiste România şi date asupra conferinţelor internaţionale organizate în acest domeniu.

Astfel, în tomul 26, nr. 5 din anul 1967 s-a publicat o dare de seamă asupra celei de-a 5-a Conferinţă internaţională de metalizare, ţinută la Varşovia în luna septembrie 1966.

Dările de seamă asupra ultimilor două conferinţe internaţionale de metalizare vor prezenta un interes documentar cert pentru delegaţii care vor fi probabil trimişi şi de ţara noastră la viitoarea conferinţă, cea de-a 7-a, programată pentru luna septembrie 1973 la Londra.

*) Aşa cum s-a admis în publicaţiile franceze de către Comitetul de organizare, rugăm a se admite şi în darea de seamă de faţă ca termenul de „metalizare" să se refere numai la „metalizarea prin pulverizare".

Consider interesant să prezint mai jos un tabel cu date asupra conferinţelor de metalizare internaţionale care au avut loc între anii 1956 şi 1970 :

Date asupra conferinţelor	Numărul de ordine al conferinţei						
	1	2	3	4	5	6	Simpozion
Anul cînd s-a ţinut	1956	1958	1962	1963	1966	1970	1960
Ţara unde a avut loc	R.D.G.	Angl.	Span.	R.D.G.	R. P. Polon.	Franţa	Belgia
Localitatea	Halle	Birmingh.	Madrid	Halle	Varşovia	Paris	Liège
No. de participanţi	330	133	101	496	131	266	105
No. de comunicări	20	26	23	25	32	54	13
Instituţia organizatoare	Inst. sudură R.D.G.	Asoc. întrep. metalizat.	Inst. sudură Spania	Inst. sudură R.D.G.	Inst. mecan. precizie	Inst. sudură Franţa	Institutul internaţional de sudură

Numărul temelor pe categorii

Tematica comunicărilor	Numărul de ordine al conferinţei						
	1	2	3	4	5	6	Simpozion
Recondiţionări		3		1			
Cercetări fundamentale	9	10	7	6	10	12	3
Protecţia anticorosivă prin strate metalice	3	6	6	4	5	3	4
Protecţia anticorosivă prin materiale plastice		1		2	1		
Metalizare prin jet de plasmă				3	4	9	1
Aplicaţii diverse		2	4	4	5	10	
Strate dure şi refractare					3		
Utilaj, material de aport	2	3	4	2	1	4	
Aspecte economice					1	2	
Protecţia muncii. Instructaj		1			1		3
Perfecţionări, inovaţii						3	
Aplicaţii ornamentale						1	
Pregătirea suprafeţelor						4	
Metode de control						6	
Standarde, diverse	6	6	2	3	1		4

În ce privește numărul de participanți, din diferite țări, la cea de-a 6-a conferință de metalizare, ordinea descrescîndă a fost următoarea: Franța 120, Anglia 30, Japonia 17, Belgia 16, S.U.A. 15, Elveția 15, Germania (R.F.G. + R.D.G.) 13, Olanda 9, Spania 7, Italia 6, Suedia 5, R. S. Cehoslovacă 3, R. P. Ungară 3, India 2, Finlanda 2, Canada 1, R. P. Polonă 1, R.S. România 1.

2. LISTA COMUNICĂRILOR PREZENTATE

Regulamentul conferinței prevedea ca textele comunicărilor să fie întocmite în limbile franceză sau engleză, în care urmau să aibă loc și discuțiile. Comunicările au fost repartizate la opt grupe, după specificul domeniului, dîndu-se la opt raportori sarcina de a examina textele și a întocmi cîte un rezumat al fiecărei comunicări, avizînd asupra ei.

Autorii comunicărilor stăteau la dispoziția auditorilor în ședințele respective cînd raportorii prezentau rezumatele, pentru eventuale lămuriri sau completări.

Prin acest procedeu s-a putut elimina expunerea în extenso a fiecărei comunicări de către autorul ei, fapt care ar fi necesitat o durată mult mai mare a conferinței, fiind vorba de 54 de comunicări.

Dăm mai jos titlurile acestora din cele opt grupe care erau marcate cu litere mari de la A la H inclusiv.

Grupa A

Rezistența la coroziune și uzură a stratelor metalizate

1. Rezistența la uzură a stratelor de carbură de wolfram depuse prin jet de plasmă.
2. Rezultatele economice ale metalizării anticorozive pe construcțiile metalice.
3. Observații asupra metalizării oxiacetilenice și a metalizării prin arc electric cu aluminiu.
4. Protejarea oțelului prin metalizare cu zinc pulverizat și apoi vopsit.
5. Rezistența la uzură și tensiunile interne la metalizarea cu flacără și la acea cu arc electric.

Grupa B

Cercetări fundamentale asupra procedeelor de metalizare

1. Măsurarea temperaturilor la jetul de plasmă.
2. Cordonul suplu ca material de aport, un nou procedeu de alimentare a metalizatoarelor cu materiale netrefilabile.
3. Strate metalice obținute prin explozie.
4. Studiul condițiilor termice de proiectare prin flacără a materialelor plastice.

5. Fenomene care apar la proiectarea prin jet de plasmă a carburei de wolfram.
6. Studiul flacării dintr-un jet de plasmă.
7. O nouă metodă pentru determinarea granulometrică a pulberilor de proiecţie.
8. Influenţa generatorilor de curent asupra metalizării prin arc electric.
9. Compararea gazelor de proiecţie cu flacără de plasmă.

Grupa C

Aplicaţii ale electrometalizării

1. Instalaţia automată de metalizare cu arc electric de la Uzinele metalurgice din Friedek-Mistek (R. S. Cehoslovacia).
2. Metalizarea electrică cu aluminiu produce straturi de calitate mai bună, la preţuri mai joase.
3. Metalizarea electrică cu aluminiu pe construcţii de oţel.
4. Strate de aluminiu proiectate cu pistolul manual uşor, cu arc electric, pentru protecţia anti-corozivă pe oţel.
5. Metalizarea electrică a pseudo-aliajelor.

Grupa D

Proprietăţi diverse

1. Influenţa proprietăţilor de difuziune termică asupra temperaturei la inter-faţă şi asupra aderenţii, în metalizarea la cald.
2. Producţia şi proprietăţile stratelor omogene din materiale speciale, avînd o mare afinitate pentru oxigen.
3. Proprietăţile electrice ale stratelor de titanat de bariu, proiectat prin flacără.
4. Rezistenţa de aderenţă a stratelor de acoperire de alumină proiectată pe oţel.
5. Relaţii între proprietăţile stratelor şi unghiul de proiectare.
6. Reacţii în stratele de pulberi metalice proiectate.
7. Proprietăţile materialelor auto-aderente.

Grupa E

Aplicaţiile metalizării prin flacără

1. Metalizarea construcţiilor ornamentale.
2. Cîteva aplicaţii ale metalizării în întreprinderile hidro-electrice din Spania. Metode şi tehnologii noi pentru utilizarea aliajelor antifricţiune proiectate.

3. Rezolvarea a două probleme importante în energia nucleară prin metalizarea cu flacără.
4. Caracteristici ale unui cilindru de aluminiu cu înveliș transferat prin aplicarea practică a metalizării.
5. O aplicație a metalizării prin proiectare, după procedeul Sulf-Inuz.
6. Proiectarea cu flacără a siliciului pentru prelucrări de ceramică din nitruri de siliciu.
7. Aplicații ale proiectării cu flacără în construcția mecanică.

Grupa F

Pregătirea suprafețelor

1. Mecanismul eroziunii prin acțiunea granulelor de oțel sau nisip.
2. Îndepărtarea unui strat dur prin acțiunea granulelor metalice.
3. Evaluarea teoretică a calității suprafețelor pregătite cu abraziv.
4. Influența pregătirei suprafețelor și a grosimii stratului asupra aderenții stratului de aluminiu și de zinc proiectate cu flacără pe oțel moale.
5. Influența pregătirei suprafețelor asupra stratelor proiectate la cald.

Grupa G

Aplicații ale jetului de plasmă

1. Aplicații ale metalizării prin plasmă aplicate la protecția celulelor și motoarelor aeronautice.
2. Examinarea diverselor cazuri de recondiționări prin metalizarea cu plasmă.
3. Determinarea empirică a condițiilor de metalizare prin plasmă cu arc electric a unui anumit număr de materiale și calitatea stratelor acoperitoare.
4. Învelișuri de ceramică proiectate prin plasmă.
5. Evoluția și aplicația tehnologică a metalizatoarelor puternice cu plasmă, stabilizate prin lichid.
6. Decorațiuni ale sticlei cu ajutorul unor aerosoli de metale topite.
7. Aplicații în industria aeronautică a stratelor protectoare obținute prin proiecția la cald.
8. Influența asupra oboselii a tratamentului de suprafață și a stratelor de plasmă asupra suporților de oțel cu înaltă rezistență și de aluminiu.

Grupa H

Metode practice a controlului calitativ

1. Controlul stratelor din materie plastică pe metal obținute din pulbere uscată.
2. Metode de încercări și de control al eprubetelor din strate mixte. Metalizarea și vopsirea în diferite medii.
3. Încercări de abraziune a depunerilor metalizate în vederea stabilirii unei clasificări a acestor depuneri.
4. Anduranța la cicluri termice a stratelor de oxid proiectate cu aparatul oxiacetilenic.
5. Rezistența la uzură a stratelor din aliaje autofondante.
6. Rezultate de încercări asupra stratelor polyamide utilizate ca materiale antifricțiune.
7. Controlul calitativ în tehnica metalizării prin plasmă.

3. COMUNICĂRILE ALESE PENTRU A FI REZUMATE

Fiecare participant înscris la Conferința a 6-a de metalizare, primise de la Comitetul de organizare toate textele celor 54 de comunicări în extenso cu cîteva luni înainte de data începerii conferinței.

Participanții cunoșteau deci textele în timpul prezentării rezumatelor de către cei 8 raportori și a discuțiilor care au urmat, dar întocmirea unei dări de seamă, în genul celei de față, constituia o grea problemă din cauza numărului mare de comunicări.

Din această cauză am fost obligat să aleg numai 21 din cele 54 de comunicări, spre a fi rezumate, căci altfel aș fi depășit plafonul de 25 de pagini admis de comitetul revistei.

Am ales deci comunicările de mai jos pe care le-am apreciat ca mai interesante pentru țara noastră.

Din grupa A

A 4. Protejarea oțelului prin metalizare cu zinc pulverizat și apoi vopsit, de R. E. Mansford (Anglia)

Stratele de zinc pulverizat dau o bună protecție catodică pe oțel contra coroziunei, însă au o durată limitată sub acțiunea unor condiții atmosferice grele, dacă nu sînt vopsite.

Trebuie să se țină seama că în protecția cu strate mixte de zinc pulverizat și vopsele au loc reacțiuni favorabile între zinc și vopsele, ca de exemplu o mărire a aderenții stratului mixt pe metalul de bază. S-a găsit, în urma unor cercetări, că stratele metalizate produse prin pulberi, ca material de aport, au o rugozitate mai mare decît cele obținute prin sîrmă.

În luna decembrie 1967 s-au organizat cercetări de rezistență la coroziune cu plăci protejate prin strate mixte, formate din zinc sau aluminiu pulverizate și apoi vopsite, în Anglia, în două regiuni și anume o regiune în apropierea mării și o alta într-un mediu coroziv industrial.

După o expunere, timp de doi ani, la primele eprubete supuse coroziunei marine, stratele de zinc s-au comportat mai bine ca cele de aluminiu. Plăcile metalice protejate numai cu vopsele, expuse în mediul industrial au fost serios corodate, pe cînd cele protejate cu strate metalizate și apoi vopsite s-au comportat mult mai bine.

Rezultate deosebit de favorabile s-au obținut atunci cînd s-au utilizat vopsele speciale care formează un strat superior inert, cum sînt, de exemplu, vopselele pe bază de poliuretan sau copolimeri de vinil aplicate peste strate de zinc pulverizat.

A6. Comparație între metalizarea cu flacără și acea prin arc electric, de A. N. Saskov, I. A. Antonov, M. E. Morozov și V. A. Vahalin U.R.S.S.)

În U.R.S.S. se utilizează de circa cinci ori mai multe metalizatoare cu arc electric decît cu flacără acetilenică. În cursul anilor 1968 și 1969 s-au făcut cercetări comparative între metalizările cu zinc și cele cu aluminiu, efectuate cu ambele tipuri de metalizatoare, cu variația diferiților parametri ai metalizării.

S-au pregătit 1200 de eprubete care apoi au fost încercate, pregătirea suprafețelor fiind făcută în prealabil prin acțiunea granulelor de oțel. Aderența stratelor depuse cu metalizatoarele electrice s-a dovedit superioară celei obținute cu aparatele oxiacetilenice.

S-au efectuat probe de rezistență la coroziune pe eprubete de oțel moale expuse la apă obișnuită și la apă sărată, metalizate cu aluminiu, și zinc, prin ambele procedee de metalizare, electric și cu flacără, constatîndu-se că rezultatele sînt comparabile.

Randamentul găsit în cazul metalizării cu aluminiu este de 75—80 % și 90—95 % la metalizarea cu zinc. În cazul electrometalizării s-a găsit că randamentul variază cu tensiunea curentului utilizat, însă nu cu diametrul sîrmei întrebuințate ca material de aport.

Valorile practice ale randamentului au fost în cazul electrometalizării ușor scăzute din punct de vedere economic, însă inconvenientul este compensat prin faptul că aderența stratelor este mai bună ca la metalizarea cu flacără.

Colectivul sovietic mai sus indicat a efectuat și probe de rezistență la uzură, constatîndu-se că cea mai bună rezistență a unui strat metalizat cu sîrmă de oțel se obține cînd aceasta are un procent de 1,40 % carbon, diferența între tipul de metalizator fiind neglijabilă. Rezultate foarte bune s-au obținut cu sîrmă din oțel special cu 13 % crom.

Din grupa B

B1 Măsurarea temperaturilor la jetul de plasmă, de K. N. Müller (R.F.G.)

Proprietăţile plasmei şi în special gradul de disociere şi de ionizare, de radiaţie şi de conductibilitate, care depinde de coliziunea electronilor, sînt caracterizate de temperatura plasmei, iar practic de temperatura electronilor şi de densitatea plasmei.

Măsurile de temperatură au fost efectuate în cazul utilizării de argon. Instalaţia experimentală a permis să se calculeze parametrii electrici ai arcului plasmei, precum şi temperatura apei de răcire.

Cu aceste elemente s-au calculat puterea electrică, randamentul şi entalpia plasmei, precum şi temperatura medie şi viteza jetului de plasmă la ieşirea din diuza aparatului.

Din grupa C

C2. Metalizarea electrică cu aluminiu produce strate cu calităţi mai bune, la preţuri mai joase, de V. Navara (R. S. Cehoslovacă)

În R. S. Cehoslovacă se utilizează, între altele, un pistol de metalizare electrică tip RED 1, avînd o greutate de numai 1,4 kg. pentru un debit important de 15 kg/h de aluminiu pulverizat. S-a constatat că acest metalizator electric, care poate întrebuinţa şi alte metale, nu numai aluminiu, permite a se obţine strate din metale pulverizate mai bune decît cu metalizatoare funcţionînd cu flacără şi cu un cost mai redus cu 60% faţă de acestea din urmă. Acest rezultat se obţine cînd metalizatorul funcţionează cu debit mai mare.

Metalizatorul RED 1 a fost utilizat la expoziţia mondială din 1970, de la Osaka, unde s-au efectuat metalizări de bună calitate în ce priveşte aspectul, aderenţa, rezistenţa mecanică cît şi protecţia contra coroziunei. În R. S. Cehoslovacă se preferă aluminiul ca metal de aport în lucrările de metalizare anticorozivă.

La aceste lucrări cu metalizatorul RED 1 s-a constatat următoarele elemente ale preţului de cost:

metalul de aport 60—75%; manopera 10 — 25 % şi energia electrică 5 %.

C3. Metalizarea electrică cu aluminiu pe construcţii din oţel, de V. Vezely (R. S. Cehoslovacă)

Această comunicare a fost una din cele mai interesante deoarece cuprindea indicaţii preţioase din experienţa autorului în aplicaţiile metalizării, la Institutul de cercetări asupra protecţiei materialelor din Praga. V. Vezely a avut şi sarcina de raportor al grupei B, motiv pentru care ne vom opri mai mult asupra comunicării sale.

Din rezultatele numeroaselor probe efectuate cu eprubete de oțel metalizate cu aluminiu s-a ajuns la următoarele concluzii în ce privește rezistența la coroziune :

— Stratele depuse din aluminiu prin metalizare electrică au o rezistență mai mare, cu circa 50 % decît cele depuse de metalizatoarele cu flacără.

— Cea mai bună rezistență este dată de un strat de aluminiu avînd puritatea de 99,5 %.

— Aluminiul din stratele metalizate rezistă mai bine la coroziunea provocată de apa de mare decît de apa distilată. În cazul zincului se constată un fenomen invers.

— Stratele din aluminiu sînt mai durabile decît cele din zinc.

— Aderența stratelor obținute din aluminiu pulverizat pe cale electrică este superioară celei obținute prin metoda cu flacără.

Se știe că în numeroase țări cu industrie dezvoltată se utilizează strate mixte de protecție anticorozivă, formate din aluminiu sau zinc pulverizat, acoperite apoi cu vopsele organice.

Constatările făcute în practica utilizării acestor strate mixte sînt următoarele :

— Stratele mixte prea groase nu permit sudarea tablelor acoperite cu astfel de strate.

— O grosime a unui strat de vopsea de 60 microni are o eficiență tot așa de bună ca straturile mai groase.

— Vopsirea trebuie efectuată imediat după metalizare.

O chestiune interesantă este aceea a porozității stratelor depuse prin metalizare. În cazul metalizării cu aluminiu diametrele particulelor sînt între 3 și 300 de microni. Este mai avantajos ca stratul să cuprindă particule cît mai fine, pentru ca porozitatea stratului să fie cît mai redusă. Finețea pulverizării și deci reducerea porozității depind, de asemenea, de viteza particulelor și de concentrarea jetului acestora, precum și de distanța de pulverizare.

O problemă importantă, rezolvată în R. S. Cehoslovacă, este automatizarea electrometalizării, prin realizarea unei instalații cu mai multe capete de metalizare, fiecare organizat ca un metalizator independent.

Electrometalizarea automată poate asigura un debit important de metal pulverizat, pentru lucrări de mari proporții, ca, de exemplu, metalizarea de uzine, de poduri metalice, de rezervoare etc.

În Anglia există instalații de metalizare automată avînd pînă la 24 de capete de metalizare (nota autorului acestei dări de seamă).

C5. Metalizarea electrică a pseudo-aliajelor, de S. Kumanovo (R. P. Bulgaria)

Comunicarea expune rezultatele obținute în Bulgaria după cercetările efectuate cu pseudo-aliaje formate din oțeluri și bronzuri de diferite compoziții*). Autorul a utilizat un dispozitiv cinematografic pentru a studia

*) Tehnologia pseudo-aliajelor este indicată la p. 283 din volumul METALIZAREA PRIN PULVERIZARE de Vasile Marcu, publicat de Edit. Academiei în 1963 (nota autorului acestei dări de seamă).

evoluția topirii elementelor sale din pseudo-aliaje și formarea particulelor. Printre concluziile sale, autorul comunicării arată că intervalele de variație al compoziției pseudo-aliajelor este limitat de stabilitatea arcului electric și de condițiile topirii, pentru ambii electrozi ai aparatului, electrodul alimentat la o viteză mai mare rămînînd mai rece, iar cel alimentat la o viteză mai joasă mai cald.

Este prima lucrare asupra pseudo-aliajelor prezentată la una din cele șase conferințe de metalizare.

Din grupa D

D5. Relații între proprietățile stratelor și unghiul de proiecție de Atsushi Hasui și Shigeru Kitahara (Japonia)

Autorii prezintă în comunicarea lor rezultatele cercetărilor asupra structurei, porozității, rezistența mecanică a stratului și randamentului pulverizării în cazul metalizării cu flacără, cu molibden și aluminiu, precum și în cazul metalizării cu jet de plasmă, variind unghiul de atac sau proiecție. Diversele valori ale acestui unghi, între axul fasciculului de particule și suprafața de metalizare au fost de 90, 75, 60 și 45 grade, în cazul jetului de plasmă și în plus un al patrulea unghi, în cazul metalizării cu flacără.

La unghiurile mici s-a constatat o creștere a porozității, precum și o scădere a aderenței și a randamentului.

Cea mai importantă influență a unghiului de proiecție se constată asupra rugozității stratului de particule metalice depuse.

D6. Reacțiuni în stratele de pulberi metalice proiectate, de Dr. O. Knotek și M. T. Steine (Elveția)

Autorii au studiat aliajele de nichel pulverizate, avînd diferite procente de carbon, bor, siliciu și crom, găsind că cromul este concentrat sub formă de eutectic, probabil ca borat de crom.

La solidificarea acestor aliaje s-au constatat puternice reacțiuni și s-au cercetat mijloacele de dezoxidare a elementelor bor și siliciu. Unele oțeluri care conțin Ti, W, Mo, Al, Mg și V formează strate poroase.

Rezistența la oxidare a unui strat a fost cercetată, după efectuarea metalizării în atmosferă inertă, determinîndu-se creșterea greutății și apoi gradul de oxidare. Rezultatele au arătat o înaltă rezistență la oxidare.

S-au mai determinat apoi, între altele, intervalele de temperatură în care se constată difuziunea cromului și a siliciului.

D7. Proprietățile materialelor auto-aderente, de F. J. Hermanek

Autorul definește materialele „auto-aderente" pe acelea care dau aderență nu numai mecanică, după pulverizare, pe suprafața de metalizat ci și aderență prin difuziune sau sudare. Astfel de materiale sînt următoarele metale : molibden, tantal și niobiu, precum și aliajele metalice care dau o reacțiune exotermică, ca, de exemplu nichel-crom și nichel-titan.

Diferitele forme de aderență au fost determinate pe eprubete, prin încercări la care se stabilea efortul care echilibra aderența.

Pentru materialele exotermice s-au efectuat și eprubete metalografice, determinîndu-se atît duritatea cît și aderența lor.

Din grupa E

E2. Cîteva aplicații ale metalizării în întreprinderile hidroelecirice din Spania. Metode și tehnologii noi pentru utilizarea aliajelor antifricțiune proiectate, de E. Sanchis (Spania)

Autorul trece în revistă avantajele metalizării în domeniul construcțiilor de mașini, dînd o deosebită atenție faptului că suprafețele metalizate, avînd o rugozitate pronunțată, reține lubrifianții și deci se pot realiza cuzineți prin metalizare.

În Spania s-a profitat de faptul că unele materiale antifricțiune, fiind trefilabile, pot fi depuse prin metalizare pe cuzineți în loc de a fi turnate ca în procedeul clasic. Astfel cîteva întreprinderi hidroelectrice utilizează cuzineți de mari dimensiuni. Avînd suprafața de frecare metalizată cu materiale antifricțiune, realizînd importante avantaje tehnice și economice.

Aparatul de metalizare este echipat cu două sîrme, una avînd 90% staniu, 6,5% antimoniu și 3,5% cupru, iar cealaltă 84% plumb, 10% staniu, 5% antimoniu și 0,35% cupru. Tehnologia realizării unui astfel de strat antifricțiune este următoarea:

— pregătirea suprafeței cuzinetului prin filetare, cu pasul de 0,75 mm,

— sablarea cu corindon,

— depunerea prin metalizare a unui prim strat pregătitor de molibden cu o grosime de 20—30 microni, care mărește sensibil aderența,

— metalizarea cu materiale de aport antifricțiune, ajungînd la o grosime, care după prelucrare să aibă circa trei mm. grosime definitivă.

Tehnologia de mai sus a fost aplicată la nouă hidrocentrale din Spania, dînd completă satisfacție,

E3. Rezolvarea a două probleme importante în energia nucleară prin metalizarea cu flacără, de A. Faussat (Franța)

La un centru de cercetări nucleare din Franța s-au făcut două aplicații ale metalizării cu flacără care au rezolvat următoarele două probleme importante:

a) Crearea unei bariere termice între aliajele de uraniu și de magneziu, prin depunerea unui strat de aluminiu.

b) Crearea unei legături metalurgice între aliajele de uraniu și de magneziu, prin depunerea de aluminiu, urmată de un tratament termic de difuziune.

Elementul combustibil al reactorului nuclear este constituit printr-un tub de uraniu avînd lungimea de 600 mm și diametrul tubului de 77 mm interior și 95 mm exterior. Pentru a se ameliora randamentul

acestui element s-a găsit util să se protejeze tubul printr-un manşon de magneziu, creindu-se o barieră termică între uraniu şi manşonul intern.

După numeroase încercări s-a găsit că cea mai bună soluţie este metalizarea cu un strat ceramic de alumină sau zirconiu pe peretele intern al tubului de uraniu.

A doua problemă a fost impusă pentru a se evita deslipirea manşonului ceea ce ar fi provocat o încălzire excesivă a uraniului, cu consecinţe foarte grave. S-a efectuat ca soluţie o metalizare cu un strat de aluminiu pe uraniu, ţinîndu-se seama că aluminiul difuzează uşor în uraniu. După efectuarea metalizărilor manşonul a fost instalat pe tubul de uraniu, extremităţile au fost sudate, iar jocul dintre uraniu şi manşon suprimat prin presiune hidraulică.

Probele de control făcute au dovedit că soluţia adoptată a dat deplină satisfacţie, ea constituind o interesantă aplicaţie a metalizării la utilajul unui reactor nuclear.

E5. O aplicaţie a metalizării după procedeul Sulf-Inuz, de V. Marcu (România)

Sînt de mult cunoscute calităţile de antiaderenţă şi antigripare a suprafeţelor de oţel şi fontă sulfizate, aflate în mişcare relativă şi contact cu frecare. Aceste calităţi există nu numai la oţelul şi fonta în stare compactă, ci şi la piesele cu suprafeţe poroase, după cum au stabilit unii cercetători sovietici.

Colectivul de metalizare de la Institutul de mecanică aplicată al Academiei a constatat prin numreoase experienţe la banc că şi straturile de oţel metalizat şi sulfizat au şi ele calităţi antigripante.

Această constatare a permis să se realizeze la I.M.A. lagăre metalizate şi sulfizate, interesante chiar în cazul frecării uscate.

Această operaţie s-a efectuat printr-o instalaţie care a permis metalizarea unor axe cu adaos simultan de oţel pulverizat şi pulbere de sulf.

Extinderea procedeului Sulf-Inuz şi la suprafeţele metalizate deschide perspective interesante în tehnologia lagărelor, precum şi posibilitatea de a efectua sulfizări prin metalizare în condiţii mult mai economice decît mijloacele clasice.

Din grupa F

F2. Îndepărtarea unui strat dur prin acţiunea granulelor metalice de Shokichi Hirose (Japonia)

Această operaţie este similară sablării, însă în loc de nisip se întrebuinţează granule din oţel proiectate de o turbină, operaţie care ridică însă unele chestiuni. Îndepărtarea ţunderului şi a murdăriei de pe suprafeţele pieselor, care trebuie pregătite pentru metalizare, se face în funcţie de proprietăţile metalelor de acoperit şi de neregularităţile amprentelor provocate de granule. Suprafaţa curăţată depinde şi de numărul granulelor abrazive trimise de turbină şi de suprafaţa curăţată de o singură granulă.

Raportul dintre suprafața curățată și totală a piesei este numită de autor „coverage" și este considerat ca probabilitatea unei părți din suprafața piesei de a fi atacată de mai multe ori și o altă parte nici odată. Se presupune că posibilitățile de atac a granulelor urmează legea de distribuție a lui Poisson.

Autorul comunicării calculează, în funcție de anumiți parametri admiși în experiențele sale, suprafața totală curățată care depinde de debitul granulelor proiectate, precum și procentul de metal al piesei antrenat de granule. Printre exemplele autorului figurează un calcul al rezultatelor pregătirei suprafeței de metalizat a capetelor de șine dintr-un tunel supus la o puternică coroziune. Ca urmare a calculelor sale, autorul recomandă următoarele patru metode de protecție a acelor capete de șine :

a) Curățire cu un polizor, urmată de o vopsea cu un mare procent de zinc, aplicată cu un tampon îmbibat cu ulei și adaos de inhibitori.

b) Acțiune cu granule metalice și apoi aplicarea unei vopsele pe bază de poliuretani.

c) Acțiune cu granule și metalizare cu zinc.

d) Acțiune cu granule, metalizare cu zinc și aplicarea apoi a unei vopsele tip epoxy.

Rezultatele obținute au arătat că durabilitatea șinelor protejate printr-unul din procedeele de mai sus este dublă față de cazul cînd șinele nu sînt protejate contra coroziunei.

F4. Influența pregătirei suprafețelor și a grosimii stratului de aluminiu sau zinc, proiectat pe oțel moale, asupra aderenții, de R. I. Apps (S.U.A.)

În cursul metalizărilor efectuate pentru întocmirea comunicării, pregătirea suprafețelor a fost făcută prin granule metalice, în circuit închis într-o cabină ermetică, prevăzută cu un filtru pentru absorbirea prafului. S-au întrebuințat trei categorii de abrazive dintre care ultima fusese deja utilizată de mai multe ori și deci muchiile granulelor erau tocite. S-au măsurat toți parametrii atacului cu granule și anume : unghiurile dintre fețele granulelor, presiunea aerului de proiecție viteza granulelor și distanța dintre origina jetului de granule și suprafața pieselor curățate.

Granulele cu unghiul de 50° produc crestături scurte și neorientate, cele cu unghiul de 30° crestături lungi și exfolieri, iar granulele sferice o ridicare a durității piesei atacate. S-a stabilit că o viteză a granulelor de 6,4—7,6 m/s este satisfăcătoare și s-au făcut următoarele constatări :

a) aderența aluminiului și a zincului pe oțel depinde de grosimea stratului, pînă la o valoare de 0,15 mm și devine constantă după aceasta,

b) aderența aluminiului pe oțel este mai mică decît acea a zincului.

Parametrii cei mai importanți ai acționării cu granule sînt starea de uzură a granulelor, apoi unghiul de atac și durata dintre curățirea suprafeței piesei de metalizat și efectuarea metalizării.

Din grupa G

G1. Aplicații ale metalizării prin plasmă la protecția organelor celulelor și motoarelor aeronautice, de M. P. Malik (R.F.G.).

Avioanele actuale, construite în majoritatea cazurilor din aliaje de aluminiu și magneziu, pun serioase probleme, atît la construcție, cît și la reparații, în special susceptibilitatea lor la coroziune.

Autorul comunicării arată că printre aceste probleme, un interes deosebit prezintă metalizarea cu plasmă și aderența stratului depus care depinde de materialul de aport. O altă problemă este protejarea metalului de bază contra coroziunei care se obține făcînd impermeabil stratul depus prin jetul de plasmă pe cale chimică. Comunicarea cuprinde numeroase date numerice asupra aliajelor de aluminiu și magneziu, precum și a oțelurilor de înaltă rezistență, metalizate cu plasmă, oțeluri utilizate pentru elementele trenului de aterisaj, a flapsurilor, bolțurilor etc. care rezistă la eforturi de circa 150 kg/mm^2.

Un alt capitol tratează despre pregătirea suprafețelor și metalizarea cu plasmă a pieselor de titan, autorul comunicării dovedind că nu este întemeiată afirmația unor cercetători asupra influenței nefavorabile a oxigenului și azotului din plasmă, după prelucrarea titanului.

G2. Examinarea diverselor cazuri de recondiționare prin metalizare cu plasmă, de G. Deplauce (Belgia)

Comunicarea constituie un catalog al aplicațiilor metalizării cu plasmă, expunînd numeroase posibilități ale acestei metode și avantajele ei, ca, de exemplu,

— protecția pentru a rezista la temperaturi a convertizoarelor, cazanelor și rachetelor.

— protecția suprafețelor creuzetelor utilizate la separarea uraniului și a plutoniului precum și a diverse utilaje ale fizicii atomice.

G7. Aplicații în industria aeronautică a stratelor obținute prin proiecția la cald, de M. A. Levinstein și R. K. Betts (S.U.A.)

În această comunicare sînt expuse numeroase aplicații ale metalizării cu plasmă și prin detonație în industria aeronautică, în construcția și reparația avioanelor și turbinelor cu gaze. Autorii apreciază că valoarea aproximativă a acestor lucrări se urcă la circa 20 de milioane dolari anual, dublîndu-se la fiecare cinci ani.

Două aspecte importante sînt aplicate în ce privește uzura turbinelor cu gaze și anume uzura prin efectul temperaturilor înalte și uzura la coroziune și la eroziune.

Construcția turbinelor și compresoarelor impun realizarea de piese care să reziste la temperaturi pînă la 870°C și care să dureze în serviciu pînă la 30.000 ore de funcționare.

În afară de rezistența la temperaturi înalte, metalele și aliajele care intră în construcția turbinelor și compresoarelor trebuie să mai reziste și la oboseală, precum și la fenomenul de eroziune al paletelor de turbine.

Un ultim capitol al comunicării tratează despre controlul suprafețelor la materialele întrebuințate în construcția avioanelor și reactoarelor.

Din grupa H

H5. Rezistența la uzură a straturilor din aliaje auto-fondante, de E. Kretzschmar (R.D.G.)

Autorul comunicării studiază uzura metalelor proiectate, în domeniul aliajelor retopite după proiecție, în următoarele cazuri de abraziune, cauzate de :

— particule minerale la uzură uscată,
— particule metalice,
— frecare metal pe metal cu lubrificație,
— proiecție de particule dure.

În primul caz s-a constatat că sarcina este factorul primordial și că aliajul Ni—Cr—B este cel care dă cele mai bune rezultate, duritatea particulelor minerale avînd importanța decizivă.

Abraziunea prin particule metalice este bine suportată de aliajele cuprinzînd Cr, C, B și Fe.

În domeniul frecării cu lubrificație uzura este influențată de alegerea lubrifianților, de sarcină, viteză și temperatură. Cele mai bune rezultate au fost date de aliajele conținînd Ni, Cr, B și Si.

În ultimul caz de încercări la abraziune și anume acela provocat de particule dure, s-a constatat utilitatea aliajelor auto-fuzibile, pe care numai prețul ridicat le limitează adoptarea.

Autorul comunicării a studiat și diferite cazuri complexe de uzură, în care coroziunea și ridicarea temperaturii au un efect determinant ca, de exemplu, uzura unui șurub transportor, a cilindrilor de laminoare sau a camelor.

H7. Controlul calitativ în tehnica metalizării prin plasmă, de F. I. Atkins și C. M. Sharp (S.U.A.)

În această comunicare, foarte utilă din punct de vedere practic, autorii expun tehnologia operativă a mealizării cu plasmă, densitatea arcului, alegerea gazelor, diametrul diuzei etc. Aparatele utilizate pentru metalizarea prin jet de plasmă nu au încă forme definitive ca cele clasice cu flacără sau electrice, din care cauză autorii au căutat să determine importanța și rolul diferiților factori constructivi.

Meritul comunicării rezidă și în numărul mare de experiențe efectuate pentru a se ajunge la valori optime de aderență, corozitate, grosime constantă a straturilor și evitarea fisurilor. Pentru obținerea unor astfel de rezultate autorii au studiat temperaturile de topire a particulelor depuse, mărimea, viteza și traectoriile acestor particule. De asemenea

au studiat gazele susceptibile a fi utilizate la metalizarea cu plasmă, viteza şi debitul lor, stabilind cazuri de compromis, căci mărirea vitezei curentului gazos împiedică o bună topire a particulelor şi deci o aderenţă satisfăcătoare.

Autorii comunicării au mai studiat granulometria şi forma particulelor, stabilind legătura dintre granulometrie şi porozitatea stratelor.

Un ultim capitol al comunicării se ocupă de studiul randamentului, găsind la unele experienţe valori deosebit de mari, pînă la circa 90%.

CONSIDERAŢII FINALE

A 6-a Conferinţă de metalizare internaţională, ţinută la Paris între 14—19 septembrie 1970, s-a bucurat de un succes deplin, datorit unei organizaţii ireproşabile la care au colaborat numeroase întreprinderi, instituţii de Stat şi specialişti cu deosebită reputaţie.

Această organizare a antrenat mari cheltuieli care nu au fost integral acoperite de încasările provenite de la participanţii la conferinţă. Deficitul a fost semnalat de Comitetul de organizare al celei de-a 7-a Conferinţe internaţională de metalizare care va avea loc în luna septembrie 1973 la Londra, ca o justificare a obligaţiei ce va avea de a mări contribuţia bănească a viitorilor participanţi.

În Anglia a mai avut loc a doua conferinţă internaţională de metalizare şi anume în anul 1958. Şi în Republica Democrată Germană s-a ţinut două conferinţe de acest gen şi anume prima în 1956 şi a 4-a în 1963.

Această situaţie denotă că se acordă o atenţie deosebită în ţările cu o industrie metalurgică avansată, metalizării ale cărei aplicaţii sînt din ce în ce mai ample şi diverse. Un exemplu grăitor este acela al Japoniei, care la primele patru conferinţe nu a trimis nici un delegat pentru ca la a 6-a Conferinţă de metalizare de la Paris să constatăm prezenţa a 17 delegaţi.

În ţara noastră metalizarea a început a fi aplicată de peste 30 de ani şi din 1950 s-au intensificat aplicaţiile mai ales la uzinele hidroelectrice care s-au construit.

Semnalăm această situaţie în speranţa că la viitoarele conferinţe de metalizare prin pulverizare se vor trimite delegaţi şi din România aşa cum s-a făcut în 1966 la cea de-a 5-a Conferinţă de la Varşovia.

Primită la redacţie la 4 aprilie 1972

RECENZII

HUBERT RÜSCH, Stahlbeton — Spannbeton, Band 1, Werkstoffeigenschaften und Bemessungsverfahren (Beton armat — Beton precomprimat, Volumul 1, Proprietăţile materialelor şi metode de dimensionare), Werner — Verlag, Düsseldorf, 1972, 358 pag., 247 fig.

Manualul de beton armat şi beton precomprimat al cunoscutului profesor Hubert Rüsch de la Şcoala Politehnică din München este prima lucrare apărută în R.F.G. care urmăreşte, cu o deosebită claritate şi competenţă, familiarizarea studenţilor şi inginerilor proiectanţi cu noile norme DIN 1045 „Beton- und Stahlbetonbemessung und Ausführung" (Beton şi beton armat — Dimensionare şi execuţie), intrate în vigoare în ian. 1972 şi bazate pe principiile calculului la stări limită; pentru betonul precomprimat se folosesc în continuare prevederile normelor DIN 4227 „Spannbeton, Richtlinien für Bemessung und Ausführung" (Beton precomprimat, Instrucţiuni pentru dimensionare şi execuţie), modificate deocamdată numai în măsura în care erau în contradicţie cu noile norme DIN 1045.

Volumul 1, conceput ca un tratat clasic de beton armat şi beton precomprimat, este împărţit în patru părţi. Volumul 2 „Anwendung mit Bewehrungsbeispielen" (Aplicaţii cu exemple de armare) se află sub tipar.

Partea I cuprinde o scurtă trecere în revistă a dezvoltării betonului armat şi precomprimat, fundamentarea conlucrării materialelor componente, indicarea principalelor norme DIN, cum şi o scurtă bibliografie a tratatelor, revistelor şi publicaţiilor de specialitate (în special în limba germană).

Partea II prezintă pe scurt la început materialele componente ale betonului (ciment, agregate, apă, aditivi) şi tehnologia de confecţionare, punere în operă şi tratare ulterioară a betonului. O atenţie deosebită se acordă apoi rezistenţelor betonului la solicitări de scurtă şi lungă durată şi la solicitări repetate, deformaţiilor sale dependente sau independente de solicitare şi principalelor sale proprietăţi fizico-chimice; se prezintă de asemenea fundamentarea probabilistă a definirii rezistenţelor de calcul şi se descrie fenomenul de aderenţă între beton şi armătură. Se prezintă în continuare caracteristicile oţelurilor folosite pentru armarea elementelor de beton armat şi beton precomprimat.

Partea III se ocupă de dimensionarea elementelor de beton armat şi beton simplu. La început se descriu principalele tipuri de elemente de construcţii şi se dau indicaţii pentru alegerea mărcilor de beton pentru elementele de beton, beton armat şi beton precomprimat.

După ce se descrie scopul pe care trebuie să-l urmărească o dimensionare corectă, se tratează pe larg principiile metodei la stări limită („teoria siguranţei"), cu toate implicaţiile sale pentru calculul betonului armat, ţinîndu-se seama, pe baze statistice, de diferitele grupări de încărcări, pentru stabilirea coeficienţilor de supraîncărcare.

Trecînd la problema dimensionării elementelor de beton armat, autorul prezintă comparativ metodele de calcul pe baza rezistențelor admisibile și a stărilor limită pentru cazu elementelor de beton armat supuse la încovoiere simplă sau compusă (cu întindere sau compresiune), apoi pentru cele supuse la întindere și compresiune. Formulele de calcul sînt însoțite de multe diagrame și tabele. Alte capitole se ocupă de dimensionarea plăcilor cu nervuri, a secțiunilor cu formă oarecare a zonei comprimate supuse la încovoiere dreaptă sau oblică, simplă sau compusă, cum și de verificarea la flambaj.

Se prezintă de asemenea calculul la forțe tăietoare și la torsiune (după teoria elastică), limitarea săgeților, limitarea fisurării, cum și calculul elementelor de beton simplu.

Partea IV cuprinde problema elementelor de beton precomprimat, cu o largă descriere a definiției și avantajelor betonului precomprimat, a materialelor folosite, a dimensionării acestor elemente, inclusiv verificarea formării fisurilor și a aderenței. Se precizează modul de efectuare corectă a precomprimării și tehnologia respectivă. În final se dau metodele pentru alegerea economică a dimensiunilor elementelor.

Lucrarea este însoțită de numeroase exemple de calcul și trimiteri bibliografice pentru lămurirea sau întregirea unor aspecte și fenomene. De asemenea, autorul prezintă multe contribuții originale proprii sau ale colectivului catedrei pe care l-a condus timp îndelungat la München, care îmbogățesc în mod substanțial conținutul cărții, scoțînd cu pregnanță în evidență personalitatea sa marcantă de cercetător, profesor și practician.

Constantin Avram

D. F. MALLOWS and W. J. PICKERING, Stress analysis problems in S. I. units. Gen. Editor N. Hiller, Oxford, New York, Toronto, 1972, 264 p. + fig.

Cartea reprezintă o culegere de probleme de rezistența materialelor, redactate cu multă grijă, numai în sistemul internațional de unități (S.I.).Fiecare capitol al cărții cuprinde o parte teoretică de prezentare a noțiunilor și formulelor de calcul folosite, un număr de probleme rezolvate, pentru care soluțiile se expun în detaliu și un număr de probleme de examen de la universitatea din Londra, pentru care se indică numai răspunsurile.

Cartea este împărțită în 10 capitole și cuprinde un număr total de 329 probleme, din care 74 cu soluții complete.

Pe capitole, conținutul cărții se prezintă astfel:

Capitolul 1, Statica, cuprinde probleme privind calculul reacțiunilor unor sisteme plane și calculul eforturilor în barele grinzilor cu zăbrele, pe cale analitică și grafică.

Se remarcă faptul că exemplele de grinzi cu zăbrele analizate, atît ca alcătuire cît și ca tipuri de încărcări, corespund unor situații întîlnite frecvent în practica inginerească.

Capitolul 2, Tensiuni și deformații, se ocupă cu determinarea eforturilor unitare și a deplasărilor pentru elemente supuse la întindere sau compresiune simplă. O mare atenție se acordă sistemelor static nedeterminate la forțe axiale, exemplificate prin elemente inginerești din domeniul organelor de mașini.

Capitolul 3, Stări de tensiune bidimensionale, se referă la variația tensiunilor în jurul unui punct în plan. În cadrul problemelor se insistă atît pe rezolvările analitice cît și pe cele grafice, bazate pe cercul lui Mohr.

Capitolul 4, Tensiuni în grinzi, analizează aspectele principale care intervin la dimensionarea grinzilor încovoiate şi anume: determinarea eforturilor; calculul tensiunilor σ şi τ; alegerea unor secţiuni economice. În cadrul problemelor se exemplifică cu claritate modul de calcul al eforturilor pe console şi grinzi simplu rezemate, al momentelor de inerţie şi al tensiunilor σ şi τ pentru diferite tipuri de secţiuni. De asemenea se prezintă modul de calcul al tensiunii normale în cazul compresiunii excentrice. Problemele alese sînt ilustrative deoarece conduc la o înţelegere aprofundată, din partea cititorului atent, atît a aspectelor teoretice cît şi a celor practice, legate de determinarea şi alegerea economică a formelor şi dimensiunilor elementelor de rezistenţă.

Capitolul 5, Torsiunea, cuprinde probleme privind calculul arborilor circulari, cu secţiune plină sau inelară şi calculul elementelor de cuplare ale pieselor supuse la torsiune. Se arată, de asemenea, modul de calcul al tensiunilor în cazul arborilor torsionaţi şi încovoiaţi.

Ca probleme deosebite se remarcă cele în care intervin arbori a căror secţiune se prezintă în straturi din materiale diferite şi cele în care intervin cuplaje, frecvent întîlnite în cadrul organelor de maşini.

Capitolul 6, Analiza deformaţiilor, se referă la variaţia deformaţiilor în jurul unui punct în plan. Problemele se rezolvă analitic sau grafic prin utilizarea cercului lui Mohr. În cadrul unora dintre probleme se stabilesc relaţiile dintre constantele elastice, E, G, μ şi K unde prin K se înţelege modulul de elasticitate volumică.

Capitolul 7, Deformaţiile grinzilor, se ocupă cu metodele de calcul ale deformaţiilor barelor încovoiate. Se prezintă metoda integrării directe a ecuaţiei diferenţiale a fibrei medii, metoda parametrilor în origine sub denumirea de metoda Macaulay şi metoda ariei de momente care reprezintă o formă mai puţin perfecţionată a metodei grinzii conjugate. Toate aceste metode se aplică numai pe grinzi cu o singură deschidere, console sau grinzi simplu rezemate.

Metoda parametrilor în origine se aplică, de asemenea, la calculul eforturilor grinzilor dublu încastrate sau încastrate la un capăt şi simplu rezemate la celălalt. Unele probleme simple, static nedeterminate se rezolvă pe baza suprapunerii deplasărilor produse de acţiunea independentă a sarcinilor exterioare şi a forţelor corespunzătoare legăturilor static nedeterminate.

Capitolul 8, Metodele energiei de deformaţie, reprezintă exemplificări ale formulelor lui Castigliano pentru calculul unor deplasări pe sisteme static determinate şi pentru calculul unor sisteme simple, o singură dată static nedeterminate, cum ar fi un cadru dublu articulat sau o grindă cu zăbrele. Din problemele rezolvate se observă că nu se folosesc sistematizările cunoscute de la efectuarea integralelor expresiei deplasării punctuale a lui Maxwell-Mohr. Utilizarea acestora ar conduce la identificarea completă a primei formule a lui Castigliano cu formula Maxwell-Mohr şi deci la o exemplificare sensibilă a calculelor numerice.

Capitolul 9, Analiza elementară a tensiunilor în domeniul plastic, prezintă modul de evaluare al eforturilor capabile la grinzile încovoiate şi la cele torsionate pe baza curbei caracteristice a lui Prandtl.

În unele probleme se analizează sporul de capacitate portantă pus în evidenţă de calculul plastic în cazul unor sisteme static nedeterminate la forţe axiale, la încovoiere sau la torsiune. Exemplele tratate sînt simple şi urmăresc în principal înţelegerea fenomenelor legate de calculul în domeniul plastic.

Capitolul 10, Analiza tensiunilor şi elemente inginereşti, cuprinde probleme privind calculul arcurilor elicoidale cu pasul mic şi mare; calculul arcurilor din foi; determinarea tensiunilor în tuburile cu pereţi groşi; flambajul barelor cu secţiune simplă; aplicarea teoriilor de rezistenţă; calculul grinzilor compuse din elemente din materiale diferite şi calculul grinzilor din beton armat. Problemele alese, atît cele rezolvate cît şi cele propuse pentru rezolvare, se referă la cazuri concrete de elemente inginereşti şi urmăresc, pe lîngă dezvoltarea unor deprin-

deri specifice de calcul, informarea corespunzătoare a cititorului cu domeniul lor de aplicare.

Din cele relatate mai sus rezultă că lucrarea "Stress analysis problems in S. I. units" are un conţinut bogat şi contribuie la generalizarea introducerii sistemului internaţional de unităţi în rezistenţa materialelor. Părţile teoretice de la fiecare capitol, precise şi clare, soluţiile corecte şi simple date problemelor rezolvate ca şi varietatea mare de probleme propuse, unele dintre ele reprezentînd piese sau organe de maşini cu largă utilizare practică, fac din această lucrare o carte deosebit de utilă atît pentru înţelegerea de către studenţi a noţiunilor şi formulelor teoretice cît şi pentru formarea unor deprinderi de calcul avansate, fără de care nu poate fi concepută dimensionarea judicioasă a elementelor inginereşti.

N. Posea

H. NEUBER, Technische Mechanik. Methodische Einführung (Mecanică Tehnică, Introducere metodică), partea doua, Elastostatik und Festigkeitslehre (Elastostatică şi rezistenţa materialelor), Berlin—Heidelberg—New York, Springer Verlag 1971, XII + 332 p., 264 fig.

Al doilea volum al manualului de Mecanică tehnică, elaborat de prof. H. Neuber, autorul cunoscutei lucrări „Kerbspannungslehre" (studiul tensiunilor din concentratori), cuprinde o tratare modernă a staticii corpurilor elastic deformabile, inclusiv a bazelor rezistenţei materialelor. Volumul constituie o continuare al celui de statică şi va fi urmat de un al treilea, de dinamică.

În scopul tratării materiei într-o formă concisă şi la nivelul cerinţelor actuale ale tehnicii, autorul a folosit în expunere calculul tensorial; de asemenea partea de rezistenţa materialelor (cap. 11—22) a fost precedată de o parte generală de teoria elasticităţii (cap. 3—10) şi de un capitol de încercarea materialelor (cap. 2). Această împărţire a materiei diferă deci de diviziunea clasică a rezistenţei materialelor, inaugurată cu peste 50 de ani în urmă de profesorul Timoshenko.

Capitolul 2 — după cel introductiv — cuprinde noţiuni despre încercarea materialelor la: tracţiune, compresiune şi oboseală şi se încheie cu conturarea obiectului electrostaticii şi celui de rezistenţa materialelor.

Capitolul 3 este consacrat problemei stării de tensiune dintr-un corp solicitat; accentul este pus pe determinarea componentelor tensorului tensiunilor cu rotirea axelor de coordonate şi pe calculul analitic şi grafic al tensiunilor principale.

În *capitolul 4* despre starea de deformaţie, se determină în principal: tensorul deformaţiilor specifice; legătura dintre deformaţiile specifice liniare şi cele unghiulare; condiţiile de compatibilitate.

Capitolele 5—10 tratează următoarele probleme de teoria elasticităţii: 5) Principiul lucrului mecanic virtual; 6) Elasticitatea liniară izotropă (legea lui Hooke); 7) Termoelasticitate; 8) Lucrul mecanic de deformaţie; 9) Consecinţe ale principiului lucrului mecanic virtual (teoremele lui Castigliano şi teorema lucrului minim de deformaţie); 10) Rigiditate, deformabilitate, lucrul mecanic virtual şi principiul suprapunerii efectelor în elastostatica liniară.

Tratarea în prima parte a volumului a unor probleme esențiale din teoria elasticității i-au permis autorului să expună capitolele următoare de rezistența materialelor, într-un stil concis și la nivel superior.

În *capitolul 11*, ipotezele de rezistență, se remarcă îndeosebi două diagrame a stărilor de tensiune limită în care sînt concentrate într-o formă sugestivă principalele trei ipoteze de rezistență.

Capitolul 12 cuprinde calculul la întindere, respectiv la compresiune a barelor drepte de secțiune constantă și variabilă.

Capitolul 13 este consacrat calculului eforturilor în sistemele de bare plane și spațiale, static determinate și static nedeterminate. Se remarcă faptul că rezolvarea aplicațiilor este făcută după scheme de calcul adecvate utilizării lor la calculatoarele numerice.

Capitolul 14 se ocupă de determinarea tensiunilor din inelul circular cu pereți subțiri, încărcat cu forțe radiale uniform distribuite. Ca aplicație este tratat : inelul în mișcare de rotație și cel folosit ca element de strîngere.

În *capitolul 15*, vase de rotație cu pereți subțiri, se remarcă faptul că relațiile de calcul pentru tensiunile din pereții vaselor de revoluție încărcate simetric cît și din cele ale vaselor care lucrează ca elemente de rezistență se deduc — prin particularizare — din ecuațiile diferențiale de echilibru ale elementului de vas încărcat nesimetric.

Capitolul 16, forfecarea, cuprinde determinarea eforturilor și a repartiției tensiunilor din elementele îmbinărilor nituite, ale celor cu buloane și ale celor sudate.

În cel de al *17-lea capitol*, încovoierea, sînt tratate : încovoierea pură a barelor drepte și curbe; încovoierea cu forță axială și deformația la încovoiere a barelor drepte și curbe. Dintre aplicații se remarcă cea despre calculul tensiunilor în coroana și spițele unui volant.

Capitolul 18 se ocupă de torsiunea barelor de secțiune circulară, a barelor cu pereți subțiri de secțiune simplu, dublu și multiplu conexă. În încheiere se tratează răsucirea împiedicată.

În *capitolul 19* este expus calculul tensiunilor tangențiale din secțiunile normale și longitudinale ale barelor de secțiune simplu și multiplu conexă, produse de forțe aplicate perpendicular pe axa barei.

Ultimele trei capitole tratează despre : 20) solicitări compuse; 21) Energia potențială, stabilitatea și flambajul barelor drepte; 22) Luarea în considerare a abaterilor de la legea liniară a elasticității.

Prin conținutul ei, tratarea clară și riguros științifică a problemelor abordate, lucrarea se afirmă ca un manual cu înalte calități didactice. Numeroasele aplicații actuale și instructive precum și execuția grafică deosebită, întregesc valoarea și utilitatea lucrării. Astfel ea constituie un manual excelent atît pentru studenții institutelor politehnice, cît și pentru ingineri care doresc să cunoască — într-o formulare modernă — esențialul despre elastostatică și bazele rezistenței materialelor.

I. Hajdu

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 32, nr.3 1973

SUMAR

STUDII

Pag.

GH. DRĂGĂNOIU, Cu privire la optimizarea în paşi a zborului în urcare al unui avion cu reacţie 519

T. OROVEANU, Asupra transferului de căldură în timpul circulaţiei unui lichid prin gaura de sondă 529

D. IONESCU, Profilul vitezei în regiunea de perete a stratului-limită turbulent. . . . 541

ŞT. ZAREA, Cercetări experimentale asupra unor ventilatoare axiale tipizate . . . 553

VIRGIL BOGDAN, Tensiuni şi deformaţii într-un disc în mişcare de rotaţie 567

ION ROŞCA, Studiul tensiunilor termice într-un cilindru solicitat de un cîmp de temperaturi axial-simetric 603

M. RADEŞ, Metode de rezonanţă pentru studiul dinamic al structurilor deformabile 607

IOVĂNESCU RADU, Un mod de rezolvare optim al sistemului global de ecuaţii algebrice liniare din metoda elementului diferenţial finit 635

VICTOR GIONCU, Cercetări experimentale privind stabilitatea cupolelor pe contur pătrat 641

A. PAVEL, Studii şi cercetări teoretice-experimentale privind securitatea tehnică a capacului semisferic al unui recipient cilindric de mare presiune. I 653

A. OPREAN, FL. IONESCU, Analiza unor parametri funcţionali ai motoarelor hidrostatice rotative în regim dinamic prin modelare pe calculator. 669

T. MLADINESCU, Consideraţii asupra ungerii angrenajelor. 685

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE

ŞTEFAN ZAREA, Lucrările Conferinţei de maşini hidraulice şi pneumatice de la Budapesta, 1972 703

ŞTEFAN ZAREA, Simpozionul asupra maşinilor hidraulice reversibile, Roma, 1972 . . 709

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM 1948

St. cerc. mec. apl., tom. 32, nr. 3, 1973, p 517—714

CU PRIVIRE LA OPTIMIZAREA ÎN PAȘI A ZBORULUI ÎN URCARE AL UNUI AVION CU REACȚIE

de GH. DRĂGĂNOIU

Institutul politehnic București

În prima parte a lucrării este prezentat principiul metodei și felul în care se poate aplica la optimizarea zborului în urcare al unui avion cu reacție echipat cu un motor turboreactor.
Optimizarea traiectoriei se face pe baza principiului optimalității al programării dinamice, funcția eficiență fiind timpul total de trecere din punctul inițial în punctul final.

Problema generală a optimizării unei traiectorii constă în extremalizarea unei funcționale

$$R(u_1,u_2,\ldots,\ u_r) = \int_{t_0}^{t_1} f_0\ (x_1,\ldots,x_n;\ u_1,\ldots,u_r,\ t)\ \mathrm{d}t, \tag{1}$$

denumită indice de performanță sau funcție eficiență, în timpul trecerii sistemului de corpuri a cărui mișcare este descrisă de un sistem de ecuații diferențiale :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= f_1\ (x_1, x_2,\ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r, t),\\
\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= f_2\ (x_1, x_2,\ldots, x_n;\ u_1,\ldots, u_r,\ t),\\
\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} &= f_n\ (x_1,\ x_2,\ldots, x_n; u_1,\ldots,u_r,\ t),
\end{aligned} \tag{2}$$

dintr-o poziție inițială $x_1(t_0)\ldots x_n\ (t_0)$, într-o altă poziție $x_1(t_1)\ldots x_n(t_1)$, sub acțiunea comenzilor $u_1(t)\ldots u_r(t)$, $x_1\ldots x_n$ fiind variabilele de stare

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 32, NR. 3, 1973, P. 519–528

ale sistemului, iar t timpul. O metodă de rezolvare a acestei probleme este metoda clasică a calculului variațional.

În această lucrare vom utiliza o altă metodă, bazată pe principiul optimalității pentru cazul particular al avionului cu reacție în zborul de urcare.

Principiul optimalității a fost enunțat în felul următor [1]:

O strategie optimă are proprietatea că, ori care ar fi starea inițială și decizia inițială, deciziile rămase trebuie să constituie o strategie optimă în raport cu starea care rezultă din prima decizie.

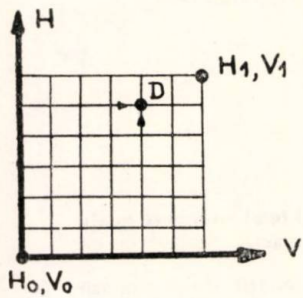


Fig. 1

În planul fazelor (fig. 1) va trebui să determinăm traiectoria de trecere din punctul inițial (H_0, V_0) în punctul final (H_1, V_1) astfel încît timpul total să fie minim.

Sistemul de ecuații diferențiale este:

$$\frac{G}{g}\frac{dV}{dt} = T\cos(\alpha+\varphi) - \rho/_2\, SV^2C_x - G\sin\gamma,$$

$$\frac{G}{g}V\frac{d\gamma}{dt} = \rho/2\, SV^2C_z - G\cos\gamma + T\sin(\alpha+\varphi), \tag{3}$$

$$\frac{dH}{dt} = V\sin\gamma,$$

în care H reprezintă înălțimea; V — viteza; t — timpul; G — greutatea; g — accelerația gravitațională; T — tracțiunea; α — incidența; ρ — densitatea; φ — unghiul făcut de tracțiune cu axa de portanță nulă a avionului; S — suprafața; C_x — coeficientul de rezistență la înaintare; γ — unghiul făcut de viteză cu orizontala; C_z — coeficientul de portanță.

Vom încerca să construim traiectoria optimă din segmente de dreaptă corespunzătoare unor intervale în care viteza este constantă și înălțimea variază, intervale în care viteza variază și înălțimea este constantă. Dacă intervalele sînt suficient de mici, vom obține o serie de puncte situate în imediata apropiere a traiectoriei ideale teoretice.

Împărțind domeniile în care viteza și înălțimea iau valori într-o serie de intervale (fig. 1), vom observa că într-un punct oarecare D putem ajunge sau cu viteza constantă, sau cu înălțimea constantă, în ipoteza că H și V variază monoton.

În momentul în care vom opta pentru una din aceste două evoluții, vom obține o porțiune de traiectorie optimă.

În consecință, vom porni din punctul final și vom calcula funcția eficiență, care la noi este timpul la trecerea în punctul final din punctul B sau din punctul C. Prin comparare o vom alege pe cea care ne dă timp mai mic. Astfel, următorul punct de pe traiectorie va fi punctul B sau punctul C. În conformitate cu principiul optimalității expus mai sus, decizia de trecere în punctul B de exemplu, nu depinde de prima decizie, deci vom putea repeta același raționament, determinînd următorul punct de pe traiectorie prin compararea timpului necesar de trecere din O în B și din D în B. Vom repeta pentru fiecare punct același proce-

deu pînă cînd ajungem în punctul inițial, construind traiectoria optimă din o serie de traiectorii optime, recursiv.

Trebuie să facem observația că în punctul H_1, V_1 nu trebuie să obținem o mișcare staționară. Dacă dorim acest lucru, considerațiile expuse rămîn valabile pentru un punct din vecinătatea punctului final de mișcare staționară, urmînd ca din acest punct să trecem în punctul final conform legilor maneabilității elementare.

Același lucru îl putem spune și despre punctul inițial.

Vom obține astfel din sistemul (3) două sisteme, unul corespunzător vitezei constante, celălalt corespunzător înălțimii constante. În plus, facem ipoteza cunoscută $\alpha + \varphi = 0$,

$$V = \text{const.},$$

$$0 = T - \rho/2 \; SV^2C_x - G \sin \gamma, \tag{3a}$$

$$\frac{G}{g} V \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \rho/2 \; SV^2C_z - G \cos \gamma,$$

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = V \sin \gamma,$$

$$H = \text{const}, \; \gamma = 0,$$

$$\frac{G}{g} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = T - \rho/2 \; SV^2C_x, \tag{3b}$$

$$0 = \rho/2 \; SV^2C_z - G.$$

Legătura dintre coeficienții C_x și C_z este dată de polara avionului, pe care o vom aproxima prin $C_x = A + BC_z^2$.

Pentru un interval oarecare în care $V = \text{const}$, sistemul (3a) se va putea scrie, trecînd la diferențe finite:

$$V = \text{const},$$

$$0 = T - \rho/2 \; SV^2C_x - G \sin (\gamma_0 + \Delta\gamma/2),$$

$$\frac{G}{g} V \frac{\Delta\gamma}{\Delta t} = \rho/2 \; SV^2C_z - G \cos (\gamma_0 + \Delta\gamma/2), \tag{3a}_1$$

$$\frac{\Delta H}{\Delta t} = V \sin (\gamma_0 + \Delta\gamma/2).$$

Am presupus că pe intervalul finit ΔH unghiul de urcare are o valoare medie $\gamma_0 + \Delta\gamma/2$, γ_0 fiind valoarea unghiului de urcare de la începutul intervalului.

Dacă această valoare medie este suficient de aproape de unghiul maxim de urcare, lucru valabil pentru majoritatea intervalelor, vom presupune că în sistemul $(3a)_1$: $\gamma = \gamma_{max}$; $\dfrac{\Delta\gamma}{\Delta t} \approx 0$.

Se obţine

$$V = \text{const.},$$

$$0 = T - \rho/2 \; SV^2 \; (C_z)_1 - G \sin \gamma_{max}, \qquad (3a)_2$$

$$0 = \rho/2 \; SV^2 \; (C_z)_1 - G \cos \gamma_{max} ; \; \frac{\Delta H}{\Delta t} = V \sin \gamma_{max},$$

$(C_x)_1$ şi $(C_z)_1$ fiind valorile coeficienţilor aerodinamici corespunzători lui γ_{max}. Pentru a determina aceste valori vom face variaţia unghiului în raport de C_x/C_z. Prin eliminarea vitezei din $(3a)_2$, în ipoteza că γ variază în raport cu unghiul de incidenţă, rezultă $T - G \cos \gamma \; \dfrac{C_x}{C_z} - \sin \gamma = 0$.

Din această ecuaţie se obţine

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{T/G \sqrt{1 - (T/G)^2 + (C_x/C_z)^2} - C_x/C_z}{1 - (T/G)^2} \qquad (4)$$

Efectuînd $\dfrac{\mathrm{d}(\operatorname{tg} \gamma)}{\mathrm{d}\left(\dfrac{C_x}{C_z}\right)} = 0$, se obţine că

$$\operatorname{tg} \gamma_{max} = \frac{(T/G \sqrt{1 - (T/G)^2 + 4AB} - 2\sqrt{AB}}{1 - (T/G)^2}$$

pentru $\left(\dfrac{C_x}{C_z}\right)_{min.} = 2\sqrt{AB}$.

Astfel, timpul necesar unei evoluţii la $V = \text{const}$, va fi

$$\frac{\Delta H}{V \sin . \gamma_{max.}} = \Delta \; t_{(v=\text{const})} . \qquad (5)$$

Sistemul (3b) se va scrie în diferenţe finite :

$$H = \text{const.},$$

$$\frac{G}{g} \frac{\Delta V}{\Delta t} = T - \rho/2 \; SV^2 C_x, \qquad (3b)_1$$

$$G = \rho/2 \; SV^2 C_z.$$

Astfel, timpul necesar unei evoluții cu $H = \text{const.}$ va fi

$$\Delta t_{(H=\text{const})} = \frac{\Delta V}{g(T/G - D/G)}, \tag{6}$$

unde am notat rezistența la înaintare

$$D = \rho/2 \; SV^2C_x$$

Anexa 1

```
C  PROGRAM PENTRU OPTIMIZAREA RAPIDĂ A UNEI TRAIECTORII
       IMPLICIT REAL* 8(A-H, O-R, T-Z) INTEGER (I-N, S)
   90  FORMAT (2F 9. 1, 2F 8. 5)
   92  FORMAT (F5. 2, F8. 5, 13, F8. 3, F8. 5)
   93  FORMAT (F11. 8. 2F 5.1, F7. 4)
   94  FORMAT (I4, F12. 5, F9, 1, F8. 5, F8. 3, 2F14. 9)
   95  FORMAT (4F13, 10, F8. 5, 2F15. 10, F14. 9)
       DIMENSION H(123), Z(123), IX(123) IY(123), U (123), A (122), V(122)
       DIMENSION PARA (123), PARB(123), PARC(123)
       DIMENSION FH(122), FV(122), F(122), DH(122), B(123), UN (123), T(123)
       DIMENSION CHZ(122), CDH(122), DTH(122), CDV(122), CZV(122), DTV(122)
C  CALCULUL PAȘILOR
       READ (1, 90) H(1), H(123), Z(123), Z(1)
       READ (1, 92), AG, G, CDO, S, T(123), CPO
       READ (1, 93) B(123), R, U (123), P
       PASH = 180.3278
       DZ = (Z(1)-Z(123)/61
C  OPTIMIZAREA TIMPULUI
       DO 11 I=1, 122
       IX(1) = 1
       IX(1)=0
       IX(1+1)=I+1
       IF(I-1) 13, 13, 4
C  CALCULUL ÎNĂLȚIMII ȘI VITEZEI
    4  H(1)=0.5*(123-IX(I)+IY(I))*PASH
       Z(I)=Z(123)+0,5*(123-IX(I)-IY(I))*DZ
   13  B(I) B(123)*(1-H(I)*AG*(P-1)/(R*U(123)*P))**(1/(P-1))
       U(I)=U(123)-H(I)*AG*(P-1)/(R*P)
       A(I)=DSQRT(P*R*U(I))
       V(I)=Z(I)*A(1)
C  CALCULUL TRACȚIUNII, REZISTENȚEI LA ÎNAINTARE ȘI DT LA H=CT
   16  CZH(I)=G/(0.5*B(I)*S*V(I)**2)
       IF(Z(I)-1) 1, 1, 3
    1  AN=CDO
       BN=CPC
       GO TO 5
    3  AN=2*CDO
       BN=CPO+2*CPO*(Z(I)-1)
       T(I)=T(123)*(B(I)/B(123)**(2./3.)
       DH(I)=-0.5*B(I)*S*V(I)**2*CDH(I)
       DTH(I)=DZ*A(I)/(AG*(T(I)/G-DH(I)/G))
C  CALCULUL UNGHIULUI DE URCARE LA V=CT
       PARA(I)=(T(I)/G)*DSQRT(1-(T(I)/G)**2+4*AN*BN)
       PARB(I)=2*DSQRT(AN*BN)
       PARC(I)=1-(T(I)/G)**2
       UN(I)=DATAN ((PARA(I)-PARB(I))/PARC(1))
```

```
C  CALCULUL TIMPULUI DE URCARE LA V=CT
      CZV(I)=G*DCOS(UN(I)/(0.5*B(I)*S*V(I)**2)
      CDV(I)=AN+BN*CZV(I)**2
      DTV(I)=PA SH/(V(I)*(DSIN(UN (I))
      F(1)=0
      FH(1)=0
      FV(1)=0
      FH(1+1)=DTH(I)+F(I)
      FV(I+1)=DTV(I)+F(I)
   14 IF(123-IX(1)-IY(I))10, 10, 2
    2 IF(123-IX(I)+IY(I))9, 9, 22
   22 IF(CZH(I)-0.7) 21, 10, 10
   21 IF(FH(1+1)-FV(I+1) 9, 9, 10
    9 IY(I+1)=IY(I)+1
      F(I+1)=FH(1+1)
      GC TO LL
   10 IY(I+1)=IY(I)-1
      F(I+1)=FV(I+1)
   11 CONTINUE
      DO 12 I=1, 122
      WRITE (3, 94) IY (I), F(I), H(I), V(I), UN(I), T(I), PARA (I), PARB (L)
      WRITE (3,95) CZH(I), CDH(I), CZV(I), CDV(I), Z(I), FH(I), FV(I), PARC (I)
   12 CONTINUE
   17 STOP
      END
```

DESCRIEREA PROGRAMULUI DE CALCUL

Bazîndu-ne pe considerentele expuse mai sus vom putea trece la alcătuirea programului, a cărui schemă logică este indicată în figura 2. De la început vom face observaţia că acest program nu are ca punct central rezolvarea sistemului de ecuaţii diferenţiale, ci va cuprinde esenţa metodei de optimizare în paşi propuse.

Prima parte a programului cuprinde iniţializarea datelor. Astfel, dentru programul construit după această schemă logică s-a luat: înălţimea finală $H(1) = 11000$ m.; înălţimea iniţială $H(123) = 0$ m; viteza finală va fi viteza corespunzătoare numărului Mach $Z(1) = 0{,}66$ în punctul final (la înălţimea de 11.000 m.); viteza iniţială s-a luat o viteză apropiată de viteza limită, corespunzătoare unui număr Mach Z (123) = 0,2 la nivelul mării; greutatea avionului $G = 5.100$ kgf; acceleraţia gravitaţională $g = 9{,}81$ m/s²; densitatea la nivelul mării $B(123) = 0{,}125 \frac{\text{kgfs}^2}{\text{m}^4}$; constanta universală a gazelor $R = 287 \cdot \frac{\text{k}\,\partial}{\text{k}}$ exponentul politropic al aerului P = 1,405: temperatura aerului la nivelul mării (123) = 288°k; coeficientul de rezistenţă la portanţă nulă $CDO = 0{,}02$; coeficientul de variaţie al coeficientului de rezistenţă în raport cu coeficientul de portanţă $CPO = 0{,}06$ (în regim subsonic); suprafaţa portantă $S = 18$ m².

După ce s-au introdus toate datele inițiale, se trece la următoarea zonă de program în care se face calculul pașilor.

Pentru simplificare s-a împărțit intervalul de variație al vitezei în 41 de intervale și cel al înălțimii în 61.

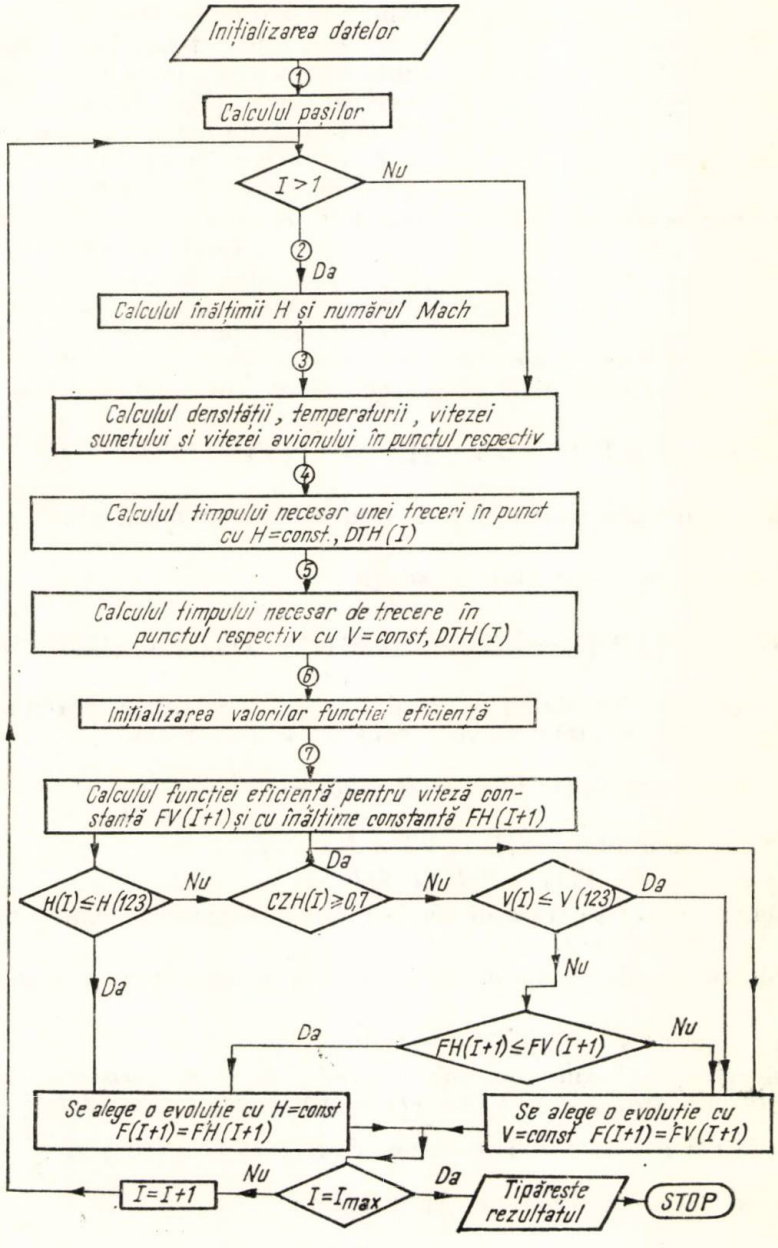


Fig. 2

Datorită faptului că viteza şi înălţimea variază monoton vom putea defini cu un singur indice un punct oarecare, indicele corespunzînd pasului respectiv. În sistemul de coordonate $Ox\ y$ din figura 3 se observă că o trecere din punctul A în B (cu înălţimea constantă) sau din C (cu viteză constantă) produce o creştere a abscisei punctului cu cantitatea CC', care este constantă pentru toate punctele. Monotonia creşterii vitezei şi a înălţimii se va traduce astfel prin faptul că abscisa $IX(I)$ în sistemul Oxy va creşte monoton cu I, indicele pasului. Dacă N este numărul de intervale în care s-a împărţit domeniul de variaţie ale vitezei şi înălţimii, numărul total de paşi va fi $2\ N$. Astfel, pornind de la $I = 1$, indicele ultimului pas va fi $I_{max}=122$, iar punctul iniţial va corespunde lui $I = 123$.

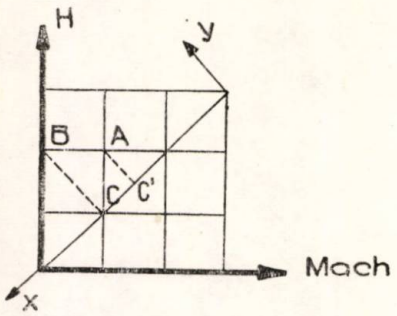


Fig. 3

Înălţimea corespunzătoare punctului I va fi $H(I) = 0{,}5 \times (123 - IX(I) + IY(I)) \times PASH$. Numărul Mach corespunzător va fi

$$Z(I) = Z(123) + 0{,}5 \times (123 - IX(Y) - IY(I)) \times DZ.$$

În continuare, pentru $I > 1$ vom calcula numărul Mach şi înălţimea.

Urmează apoi calculul densităţii:

$$B(I) = B(123)\ [1 - H(I) \times AG \times (P - 1)/(Rx\ U\ (123) \times P)],$$

în care $B(I)$ este densitatea la pasul I; AG — acceleraţia gravitaţională; P — exponentul politropic; R — constanta universală.

Temperatura $U(I)$: $U(I) = U\ (123) - \dfrac{H(I) \times AG \times (P-1)}{R \times P}$,

Viteza sunetului: $A(I) = \sqrt{P \times R \times U(I)}$,

Viteza va fi: $V(I) = Z(I) \times A(I)$.

Pentru $I = 1$ se trece direct la calculul densităţii, pentru că înălţimea a fost iniţializată.

Pentru calculul timpului de trecere în pasul I cu $H = \text{const.}$, $CZH\ (I) = \dfrac{G}{0{,}5 \times B(I) \times S \times V(I)^2}$.

În ipoteza sborului subsonic, coeficientul de rezistenţă la înaintare corespunzător va fi $CDH\ (I) = AN + BN \times [CZH(I)]^2$, în care $AN = CDO$ şi $BN = CPO$. Tracţiunea va fi $T(I) = T\,(123) \times \left[\dfrac{B(I)}{B(123)}\right]^{2/3}$.

Putem calcula apoi rezistenţa la înaintare:

$$DH(I) = 0{,}5 \times B(I)\ XSXV(I)^2\ X\ CDH(I).$$

Intervalul de timp necesar trecerii la $H = CT$ va fi, conform formulei (5),

$$DIH(I) = DZ \times A(I)/[AG \times T(I)/G - DH(I)/G].$$

În conformitate cu formula (4) se calculează unghiul de urcare maxim $UN(I)$ și apoi, conform formulei (6), intervalul de timp necesar trecerii cu $V = \text{const}$, $DTV(I)$.

Funcția de eficiență, $F(I)$, este rezultatul unei comparări.

Pentru $I = 1$ funcția $F(I) = 0$.

Funcția de eficiență corespunzătoare $H = \text{const}$:

$$FH(I + 1) = DTH(I) + F(I).$$

Funcția eficiență corespunzătoare $V = \text{const}$:

$$FV\ (I + 1) = DTV\ (I) + F(I).$$

Înainte de a le compara, cu ajutorul a trei blocuri de decizie verificăm dacă se atinge viteza sau înălțimea corespunzătoare sau dacă nu cumva se depășește valoarea maximă admisă pentru coeficientul de portanță în timpul evoluției la $H = \text{const}$. Dacă se realizează una dintre condițiile expuse mai sus, nu mai putem face compararea și alegem evoluția corespunzătoare. Dacă nu se realizează nici una, se face compararea, alegem evoluția corespunzătoare (vezi fig. 2) și se află astfel funcția eficiență $F(I + 1)$. Dacă indicele numărului de pași a atins valoarea maximă, înseamnă că putem tipări rezultatele și opri programul. Dacă nu, ciclul se reia pentru noua valoare, $I + 1$.

S-a obținut astfel traiectoria optimă (vezi fig. 4).

INTERPRETAREA REZULTATELOR OBȚINUTE

În figura 4 se observă că traiectoria în trepte obținută se poate aproxima printr-o traiectorie optimă continuă.

Din punct de vedere practic acest lucru nu constituie o necesitate. Realizarea concordanței între o curbă teoretică și o traiectorie reală în toate punctele este imposibilă. În consecință, va fi suficient să se indice pilotului necesitatea de a trece printr-o serie de puncte apropiate de traiectoria optimă, la anumite intervale, ceea ce poate face foarte ușor avînd rezultatele numerice și traiectoria. Traiectoria obținută se observă că este compusă din două porțiuni distincte, o porțiune de zbor în urcare, în care variază atît înălțimea, cît și viteza și apoi un palier la $H = 11000$ m pînă la atingerea vitezei dorite. În partea inferioară se observă un mic palier la atingerea unei viteze suficiente pentru începerea unui zbor de urcare.

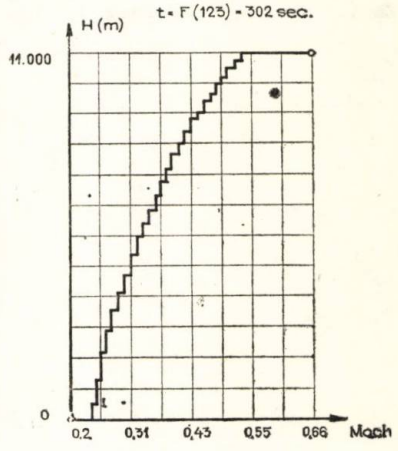


Fig. 4

O altă problemă care s-ar pune ar fi în ce măsură micșorarea pașilor ar conduce la rezultate mai apropiate de optim. O rezolvare a acestei probleme s-ar putea da pornind de la un număr de pași, efectuînd cal-

culul pentru numărul de paşi ales şi comparînd funcţia eficientă cu cea obţinută pentru un număr mai mare de paşi. În momentul în care diferenţa ar fi mai mică decît un anumit procent, am putea opri îndesirea reţelei.

În acest context, legătura dintre principiul optimalităţii şi formalismul clasic variaţional se poate urmări în [2].

În încheiere, vom trece în revistă avantajele unei asemenea metode :

a) este foarte rapidă,

b) nu impune condiţii de analiticitate funcţiilor care descriu mişcarea avionului,

c) poate folosi cu succes rezultatele experimentale, care sînt discrete, fără a introduce erori,

d) rezolvă problema maneabilităţii generale, care presupune trecerea de la un punct la altul, ambele fiind puncte de mişcare staţionară, în timp minim, dînd traiectoria de trecere în timp minim între două puncte vecine punctelor care reprezintă mişcări staţionare. Trecerea de la cele două puncte la punctele de mişcare staţionară se poate studia după regulile maneabilităţii elementare, fiind puncte apropiate,

e) vine în sprijinul înlocuirii conceptului de stabilitate al unei mişcări nestaţionare în raport cu o traiectorie optimă prestabilită, cu conceptul de conducere optimală, exprimat prin posibilitatea angajării aparatului din orice punct, rezultat al unei perturbaţii mari, pe o traiectorie optimă de atingere a punctului final.

Primită la redacţie la 22 noiembrie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. R. Bellman, S. E. Dreyfus, *Programarea dinamică aplicată.*
2. C. Penescu, Vl. Ionescu, El. Rosinger, *Programarea matematică cu aplicaţii în energetică.*

ASUPRA TRANSFERULUI DE CĂLDURĂ ÎN TIMPUL CIRCULAȚIEI UNUI LICHID PRIN GAURA DE SONDĂ

de T. OROVEANU
Institutul de petrol Ploiești

În lucrare se tratează problema determinării variației temperaturii unui lichid cald, injectat într-o sondă, datorită pierderilor de căldură în formația înconjurătoare. În studiile precedente, această problemă a fost tratată cu ajutorul unor ipoteze simplificatoare, impuse de dificultățile care apar cînd se urmărește rezolvarea exactă. În lucrare se încearcă o tratare riguroasă care conduce însă la necesitatea rezolvării pe cale numerică. Se propune și un procedeu aproximativ care poate fi aplicat cu mai multă ușurință.

1. *Introducere.* În mai multe lucrări publicate anterior am studiat diferite probleme referitoare la transferul de căldură în gaura de sondă atunci cînd prin aceasta circulă un lichid cu o temperatură superioară sau inferioară aceleia a straturilor adiacente. Astfel, în [3] am considerat un procedeu de coborîre a temperaturii la talpa sondei, prin circulație de lichid, introdus prin tubing și evacuat prin spațiul inelar sau invers. Pentru a ajunge la o formulă care să exprime variația în timp a temperaturii la talpa sondei, am adoptat o metodă aproximativă utilizată anterior de H.J. Ramey, Jr. [9]. Această metodă, bazată pe utilizarea valorilor medii într-o secțiune normală pe direcția de mișcare a lichidului precum și pe considerații elementare de bilanț energetic, a fost propusă în [9] pentru a se obține temperatura la talpa sondei atunci cînd în strat se injectează un lichid încălzit. Trecerea de la acest caz mai simplu la problema studiată în [3] se face fără dificultăți, rezultatele obținute fiind ușor utilizabile.

Ulterior, am considerat chiar problema care a făcut obiectul cercetărilor lui H.J. Ramey Jr. și am extins metoda aproximativă preconizată de acesta la un caz mai complicat și anume acela în care densitatea mediului poros, căldura lui specifică și conductivitatea lui termică depind de temperatură [4]. În sfîrșit, într-o altă lucrare [5], am reluat problema răcirii găurii de sondă prin circulație de lichid, în ambele variante posibile

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 32, NR. 3, 1973, P. 529–540

şi am căutat să punem în evidenţă influenţa pe care o are variaţia în funcţie de temperatură a parametrilor termici ai mediului poros.

În cadrul unor cercetări întreprinse mai recent, am căutat să reluăm problema determinării pierderilor de căldură de la suprafaţă pînă la talpa sondei, în cazul în care în zăcămînt se injectează un lichid încălzit. Acest procedeu de reducere a viscozităţii petrolului fiind unul dintre cele mai recomandabile în special atunci cînd valoarea mare a viscozităţii stînjeneşte exploatarea normală a zăcămîntului, ni s-a părut util să studiem problema amintită pe baze teoretice mai riguroase. Astfel, într-o primă lucrare [6], am considerat ecuaţiile diferenţiale ale mişcării cu transfer de căldură, în cazul regimului laminar şi, cu ajutorul unor ipoteze simplificatoare, am găsit o primă soluţie aproximativă. Precizarea unor ipoteze şi eliminarea unor supoziţii au făcut obiectul unei alte lucrări [7], în cadrul căreia am ajuns la o soluţie pe care o putem considera mai exactă decît aceea dată în [6]. O discuţie amănunţită a acestei soluţii şi prezentarea unei forme simplificate, mai uşor de utilizat în calcule, fără ca aproximaţiile introduse să conducă la erori importante, constituie obiectul unei lucrări recente [8].

Obţinerea unei soluţii exacte a problemei pe calea urmată în ultimele trei lucrări citate rămîne însă dificilă, dacă nu se recurge la o metodă numerică de integrare. În ceea ce priveşte soluţiile aproximative la care am ajuns în cele trei lucrări citate mai înainte, caracteristica lor comună este aceea că au fost obţinute în ipoteza că transportul convectiv al căldurii se efectuează cu viteza medie a lichidului. De asemenea, în scopul evitării unor dificultăţi suplimentare, una dintre condiţiile la limită a fost simplificată pentru a nu mai depinde de timp. Aşadar, cu toate ameliorările succesive, ultimul rezultat, prezentat în [8], rămîne afectat de aceste două aproximaţii.

Putem astfel să ne punem problema de a reveni la o metodă de genul celei propuse de H.J. Ramey Jr. şi dezvoltată în lucrările noastre menţionate. Într-adevăr, dacă în acest fel se utilizează valorile medii din secţiunea transversală nu numai pentru viteză ci şi pentru temperatură, în schimb condiţia la limită amintită mai sus rămîne dependentă de timp, ceea ce ni se pare a avea o importanţă destul de mare în rezolvarea cît mai corectă a problemei.

Pe această linie se înscrie cercetarea efectuată de I.M. Astrahan şi V.I. Maron [1], în care se adoptă un punct de vedere similar cu acela al lui H.J. Ramey Jr., aducîndu-se însă o ameliorare, în sensul că la alcătuirea bilanţului energetic se ţine seama de caracterul nestaţionar al fenomenului. Problema tratată în lucrare este însă diferită, luîndu-se în consideraţie circulaţia unui lichid, introdus prin tubing şi evacuat prin spaţiul inelar, ceea ce corespunde cu situaţia întîlnită în timpul procesului de foraj.

În cele ce urmează, vom relua problema determinării variaţiei temperaturii, între suprafaţă şi talpa sondei, a unui lichid încălzit ce se injectează în strat. În acest scop, vom recurge la o metodă asemănătoare cu aceea utilizată în [9], dar cu ameliorările care apar în tratarea problemelor de acest gen propusă în [1]. Precizăm de la început că nu este vorba de o simplă reluare a metodei din această ultimă lucrare ci, după cum se

va putea constata, de un procedeu care se situează mai degrabă pe linia unei perfecționări a metodei lui H.J. Ramey, Jr.

2. *Ecuațiile problemei.* Vom presupune deci că într-o sondă se injectează prin țevile interioare (tubing) un lichid încălzit, a cărui viteză medie este v_1. Dacă notăm cu T_1 temperatura medie a lichidului într-o secțiune transversală a tubingului și cu T_2 temperatura medie în secțiunea transversală a spațiului inelar, ambele la aceeași adîncime z, bilanțul energetic este reprezentat prin ecuația

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} = \frac{2k_1}{\rho_l C_l r_1} (T_2 - T_1). \tag{1}$$

În afară de mărimile menționate mai sus, în această ecuație ρ_l și C_l reprezintă masa specifică, respectiv căldura specifică a lichidului, k_1 coeficientul global de transmisie a căldurii de la lichidul din tubing la cel din spațiul inelar și r_1 raza interioară a tubingului. În ceea ce privește axa Oz, aceasta coincide cu aceea a sondei, fiind deci verticală, cu sensul pozitiv de sus în jos. Față de ecuația utilizată în [9], deosebirea constă în faptul că am introdus și variația temperaturii cu timpul t, așa cum au procedat și autorii lucrării [1].

Coeficientul k_1 include în expresia sa transmisia căldurii de la lichidul din tubing la peretele acestuia, prin metalul din care sînt construite țevile și de la peretele exterior al tubingului la lichidul din spațiul inelar. Expresia acestui coeficient poate fi găsită în literatura de specialitate.

Lichidul din spațiul inelar este presupus imobil; dacă neglijăm transferul de căldură în direcția axială, putem scrie relația

$$r_1 k_1 (T_1 - T_2) = r_2 k_2 (T_2 - T'_2), \tag{2}$$

în care r_2 este raza interioară a burlanelor, k_2 coeficientul global de transmisie a căldurii de la lichidul din spațiul inelar la suprafața exterioară a burlanelor și T'_2 temperatura acestei suprafețe. În expresia coeficientului k_2 trebuie inclusă transmisia căldurii de la lichidul din spațiul inelar la peretele interior al burlanelor și prin metalul din care sînt construite burlanele.

În formația care înconjoară gaura de sondă, despre care putem admite că se întinde pînă la infinit în direcția radială, variația temperaturii, datorită transferului de căldură de la gaura de sondă, este soluția ecuației

$$\frac{\partial T_m}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T_m}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_m}{\partial r} \right), \tag{3}$$

în care T_m reprezintă temperatura formației și

$$a = \frac{\lambda_m}{\rho_m C_m}, \tag{4}$$

unde λ_m este conductivitatea termică a formației, ρ_m masa ei specifică și C_m căldura ei specifică. Aceste mărimi sînt presupuse constante, ceea ce constituie o aproximație pe care am încercat să o eliminăm în lucrarea amintită mai înainte [5].

Observăm de asemenea că relația (2) ne permite să eliminăm temperatura T_2. Obținem astfel

$$T_2 = \frac{T_1 + \varkappa T_2'}{1 + \varkappa}, \tag{5}$$

unde am introdus notația

$$\varkappa = \frac{r_2 k_2}{r_1 k_1}, \tag{6}$$

iar ecuația (1) devine

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} = \frac{2k_1}{\rho_l C_l r_1} \frac{\varkappa}{1 + \varkappa} (T_2' - T_1). \tag{7}$$

Pentru a stabili condiția inițială pe care trebuie să o satisfacă temperaturile T_1 și T_m, vom presupune că în momentul inițial există echilibru termic între lichid și formația care înconjoară gaura de sondă. Temperatura acesteia din urmă variază după legea cunoscută

$$T_i(z) = \alpha z + \beta, \tag{8}$$

în care α și β sînt constante; rezultă deci condiția

$$t = 0 \quad , \quad T_1 = T_m = T_i(z). \tag{9}$$

Axa Oz avînd origina la suprafață, condițiile la limită corespunzătoare sînt

$$z = 0, \; T_1 = T_{10}, \; T_m = T_i(0), \tag{10}$$

în care T_{10} reprezintă temperatura la intrarea în tubing a lichidului, constantă sau eventual funcție de timp.

Dacă presupunem un contact perfect între suprafața exterioară a burlanelor și formația înconjurătoare, condiția la limită corespunzătoare este

$$r = r_2' \quad ; \quad T_m = T_2', \tag{11}$$

r_2' fiind raza exterioară a burlanelor.

O a doua condiție la $r = r_2'$ rezultă dacă scriem egalitatea fluxurilor de căldură pe suprafața de contact dintre burlane și formație

$$r_2 k_2 (T_2 - T_2') = - r_2' \lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial r}. \tag{12}$$

După utilizarea relației (5), rezultă

$$\frac{r_2 k_2}{1+\varkappa}(T_1 - T_2') = -r_2' \lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial r} \tag{13}$$

și prin urmare obținem condiția

$$r = r_2' \quad , \quad \frac{T_1 - T_2'}{1+\varkappa} = -\frac{r_2'}{r_2 k_2} \lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial r}. \tag{14}$$

În sfîrșit, mai observăm că temperatura T_m trebuie să satisfacă și condiția

$$r \to \infty \, , \quad T_m = T_i(z). \tag{15}$$

Dacă introducem variabilele adimensionale

$$\bar{t} = \frac{v_1 t}{r_2'} \quad , \quad \bar{z} = \frac{z}{r_2'} \quad , \quad \bar{r} = \frac{r}{r_2'} \tag{16}$$

precum și funcțiile

$$\overline{T}_1 = \frac{T_1 - T_i(0)}{T_i(0)} \quad , \quad \overline{T}_m = \frac{T_m - T_i(0)}{T_i(0)}, \tag{17}$$

ecuațiile (3) și (7) devin

$$\frac{\partial \overline{T}_m}{\partial \bar{t}} = \mu\left(\frac{\partial^2 \overline{T}_m}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\partial^2 \overline{T}_m}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \overline{T}_m}{\partial \bar{r}}\right), \tag{18}$$

respectiv

$$\frac{\partial \overline{T}_1}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \overline{T}_1}{\partial \bar{z}} = \nu_1 \frac{\varkappa}{1+\varkappa}(\overline{T}_2' - \overline{T}_1), \tag{19}$$

unde am pus

$$\mu = \frac{\pi r_1^2 a}{Q} \quad , \quad \nu_1 = \frac{2\pi k_1 r_1 r_2'}{\rho_l C_l Q,} \quad , \quad \overline{T}_2' = \frac{T_2' - T_i(0)}{T_i(0)}, \tag{20}$$

Q fiind debitul de lichid injectat.

De asemenea, deoarece $\overline{T}_i(0) = \beta$, condiția inițială ia forma

$$\bar{t} = 0 \quad , \quad \overline{T}_1 = \overline{T}_m = \gamma \bar{z}, \tag{21}$$

cu

$$\gamma = \frac{\alpha r_2'}{\beta}, \tag{22}$$

în timp ce condiţiile la limită se scriu

$$\bar{z} = 0, \quad \overline{T}_1 = \overline{T}_{10}, \quad \overline{T}_m = 0, \tag{23}$$

respectiv

$$\bar{r} = 1, \quad \overline{T}_m = \overline{T}'_2, \quad \overline{T}_1 - \overline{T}'_2 = -\frac{\lambda_m}{\delta}\frac{\partial \overline{T}_m}{\partial \bar{r}} \tag{24}$$

şi

$$\bar{r} \to \infty, \quad \overline{T}_m = \gamma \bar{z}, \tag{25}$$

cu

$$\delta = \frac{r_2 k_2}{1 + \varkappa}. \tag{26}$$

Pentru simplificarea calculelor, apare convenabil să introducem, ca în [1], funcţiile

$$\theta_1 = \overline{T}_1 - \gamma \bar{z}, \quad \theta_m = \overline{T}_m - \gamma \bar{z}, \tag{27}$$

precum şi pe aceea care corespunde lui $\overline{T}'_2$. În acest mod, ajungem la ecuaţiile

$$\frac{\partial \theta_m}{\partial \bar{t}} = \mu \left(\frac{\partial^2 \theta_m}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \theta_m}{\partial \bar{r}} \right), \tag{28}$$

respectiv

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{z}} - \gamma = \nu_1 \frac{\varkappa}{1 + \varkappa} (\theta'_2 - \theta_2), \tag{29}$$

în timp ce condiţia iniţială (21) ia forma

$$\bar{t} = 0, \quad \theta_1 = \theta_m = 0, \tag{30}$$

iar condiţiile la limită devin

$$\bar{z} = 0, \quad \theta_1 = \overline{T}_{10}, \quad \theta_m = -\gamma \bar{z} \tag{31}$$

şi

$$\bar{r} = 1, \quad \theta_m = \theta'_2, \quad \theta_1 - \theta'_2 = -\frac{\lambda_m}{\delta}\frac{\partial \theta_m}{\partial \bar{r}}, \tag{32}$$

respectiv

$$\bar{r} \to \infty, \quad \theta_m = 0. \tag{33}$$

3. *Rezolvarea aproximativă.* Pentru a găsi soluţia problemei astfel formulate, apare indicat să aplicăm transformarea lui Laplace în raport cu variabila $\bar{t}$. În prealabil, vom introduce însă o simplificare, bazată pe observaţia că în formaţia care înconjoară gaura de sondă transferul de căldură în direcţia radială este mult mai important decît acela care se produce în direcţia verticală. Ca urmare, ecuaţia (28) devine

$$\frac{\partial \theta_m}{\partial \bar{t}} = \mu \left(\frac{\partial^2 \theta_m}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \theta_m}{\partial \bar{r}} \right) \tag{34}$$

şi dacă introducem transformata Laplace

$$\bar{\theta}_m = \int_0^\infty \theta_m \, e^{-s\bar{t}} \, d\bar{t}, \tag{35}$$

obţinem

$$\frac{d^2 \bar{\theta}_m}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{\theta}_m}{d\bar{r}} - \frac{s}{\mu} \bar{\theta}_m = 0, \tag{36}$$

ţinînd seama, bineînţeles, de condiţia (30). Soluţia acestei ecuaţii trebuie să satisfacă, la rîndul ei, condiţiile

$$\bar{r} = 1, \ \bar{\theta}_m = \bar{\theta}_2'; \ \bar{r} \to \infty, \ \bar{\theta}_m = 0, \tag{37}$$

unde

$$\bar{\theta}_2' = \int_0^\infty \theta_2' \, e^{-s\bar{t}} \, d\bar{t}. \tag{38}$$

Soluţia generală a ecuaţiei (36) se exprimă cu ajutorul funcţiilor Bessel modificate de ordinul zero, de prima şi de a doua specie, $I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\mu}}\,\bar{r}\right)$, respectiv $K_0\left(\sqrt{\frac{s}{\mu}}\,\bar{r}\right)$. Deoarece dintre acestea numai $K_0\left(\sqrt{\frac{s}{\mu}}\,\bar{r}\right)$ se anulează la infinit, aşa cum cere a doua condiţie (37), rezultă

$$\bar{\theta}_m = \bar{\theta}_2' \frac{K_0\left(\sqrt{\frac{s}{\mu}}\,\bar{r}\right)}{K_0\left(\sqrt{\frac{s}{\mu}}\right)}, \tag{39}$$

expresie care satisface şi prima condiţie (37); observăm că $\bar{\theta}_2' = \bar{\theta}_2'(s, \bar{z})$.

De asemenea, ecuaţia (29) are imaginea

$$\frac{d\bar{\theta}_1}{d\bar{z}} + \left(s + \nu_1 \frac{\varkappa}{1+\varkappa}\right)\bar{\theta}_1 = \nu_1 \frac{\varkappa}{1+\varkappa}\bar{\theta}'_2 + \frac{\gamma}{s}, \tag{40}$$

unde

$$\bar{\theta}_1 = \int_0^\infty \theta_1 e^{-s\bar{t}}\, d\bar{t}, \tag{41}$$

iar condiţia pe care trebuie să o satisfacă $\bar{\theta}_1$ se deduce din (31) şi este

$$\bar{\theta}_1 = \frac{\overline{T}_{10}}{s} \tag{42}$$

dacă presupunem, pentru simplificare, că $\overline{T}_{10}$ este o constantă.

Urmînd aceeaşi cale, aplicăm şi condiţiei (32) transformarea lui Laplace, găsind

$$\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}'_2 = -\frac{\lambda_m}{\delta}\frac{d\bar{\theta}_m}{d\bar{r}} \tag{43}$$

şi dacă observăm că pentru $\bar{r} = 1$ avem

$$\frac{d\bar{\theta}_m}{d\bar{r}} = -\bar{\theta}'_2 \sqrt{\frac{s}{\mu}} \frac{K_1\left(\sqrt{\frac{s}{\mu}}\right)}{K_0\left(\sqrt{\frac{s}{\mu}}\right)}, \tag{44}$$

unde $K_1\left(\sqrt{\frac{s}{\mu}}\right)$ este funcţia lui Bessel modificată de specia a doua şi de ordinul unu, obţinem în cele din urmă

$$\bar{\theta}'_2 = \frac{\bar{\theta}_1}{1 + \omega\sqrt{s} f(s, \mu)}. \tag{45}$$

notaţiile

$$\omega = \frac{\lambda_m}{\delta\sqrt{\mu}}, \quad f(s, \mu) = \frac{K_1\left(\sqrt{\frac{s}{\mu}}\right)}{K_0\left(\sqrt{\frac{s}{\mu}}\right)}, \tag{46}$$

fiind introduse pentru simplificarea scrierii.

După ce înlocuim expresia găsită a funcţiei $\bar{\theta}_2'$ în ecuaţia (40), aceasta din urmă devine

$$\frac{d\bar{\theta}_1}{dz} + \left[s + \nu_1 \frac{\varkappa}{1+\varkappa} \frac{\omega\sqrt{s}f(s,\mu)}{1+\omega\sqrt{s}f(s,\mu)} \right] \bar{\theta}_1 = \frac{\gamma}{s} \tag{47}$$

şi are soluţia

$$\bar{\theta}_1 = \left[\bar{T}_{10} - \frac{\gamma}{s + \nu_1 \frac{\varkappa}{1+\varkappa} \frac{\omega\sqrt{s}f(s,\mu)}{1+\omega\sqrt{s}f(s,\mu)}} \right] \frac{e^{-\left[s+\nu_1 \frac{\varkappa}{1+\varkappa} \frac{\omega\sqrt{s}f(s,\mu)}{1+\omega\sqrt{s}f(s,\mu)}\right]z}}{s} +$$

$$+ \frac{\gamma}{s\left[s + \nu_1 \frac{\varkappa}{1+\varkappa} \frac{\omega\sqrt{s}f(s,\mu)}{1+\omega\sqrt{s}f(s,\mu)} \right]}. \tag{48}$$

Găsirea originalului rezolvă problema propusă dar, din cauza structurii relativ complicate a funcţiei imagine (48), calculul este destul de dificil.

O simplificare, dealtfel neesenţială, se obţine dacă în loc de (7) considerăm ecuaţia

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} = \frac{2k}{\rho_l C_l r_1} (T_2' - T_1), \tag{49}$$

în care k este coeficientul global de transmisie de căldură între lichidul din tubing şi suprafaţa exterioară a burlanelor; precizăm că această ecuaţie reprezintă o generalizare a aceleia utilizată în [9].

Prin calcule similare cu cele precedente, ajungem la ecuaţia

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{z}} - \gamma = \nu (\theta_2' - \theta_1), \tag{50}$$

cu

$$\nu = \frac{2\pi k r_1 r_2'}{\rho_l C_l Q}, \tag{51}$$

celelalte notaţii avînd semnificaţiile cunoscute.

Dacă procedăm ca şi mai înainte, obţinem ecuaţia imagine

$$\frac{d\bar{\theta}_1}{d\bar{z}} + (s+\nu)\bar{\theta}_1 = \nu\bar{\theta}_2' + \frac{\gamma}{s} \tag{52}$$

şi după introducerea expresiei (45) a funcţiei $\bar{\theta}_2'$, găsim soluţia

$$\bar{\theta}_1 = \left[\bar{T}_{10} - \frac{\gamma}{s + \nu \dfrac{\omega\sqrt{s}\,f(s,\mu)}{1+\omega\sqrt{s}\,f(s,\mu)}}\right]\frac{e}{s}^{-\left[s+\nu\frac{\omega\sqrt{s}\,f(s,\mu)}{1+\omega\sqrt{s}\,f(s,\mu)}\right]\bar{z}} +$$

$$+ \frac{\gamma}{s\left[s + \nu \dfrac{\omega\sqrt{s}\,f(s,\mu)}{1+\omega\sqrt{s}\,f(s,\mu)}\right]}. \tag{53}$$

Este evident că soluţiile (48) şi (53) sînt echivalente, problema găsirii originalului fiind aceeaşi în ambele cazuri. O metodă care poate fi întrebuinţată, constă în dezvoltarea originalului în serie de polinoame Legendre (10). Coeficienţii acestei serii pot fi calculaţi dacă sînt cunoscute valorile funcţiei imagine într-un număr de puncte. Această metodă a fost dealtfel utilizată în [1] pentru găsirea soluţiei unei probleme mai complicate decît aceea de care ne ocupăm.

Putem căuta însă o soluţie aproximativă a problemei dacă rezolvăm ecuaţia [50] presupunînd cunoscută funcţia θ_2'. Astfel, dacă aplicăm acestei ecuaţii transformarea lui Laplace cu două variabile [2], obţinem

$$(q + s + \nu)\,\bar{\bar{\theta}}_1(q,\ s) = \nu\,\bar{\bar{\theta}}_2'(q,s) + \frac{\bar{T}_{10}}{s} + \frac{\gamma}{qs}, \tag{54}$$

unde

$$\bar{\bar{\theta}}_1 = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-q\bar{z}-s\bar{t}}\theta_1\,d\bar{z}\,d\bar{t},\quad \bar{\bar{\theta}}_2' = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-q\bar{z}-s\bar{t}}\theta_2'\,d\bar{z}\,d\bar{t}, \tag{55}$$

luînd în consideraţie şi condiţiile (30), respectiv (31).

Imaginea soluţiei este deci

$$\bar{\bar{\theta}}_1(q,s) = \frac{\nu\,\bar{\bar{\theta}}_2'(q,s) + \dfrac{\gamma}{qs} + \dfrac{\bar{T}_{10}}{s}}{q + s + \nu}, \tag{56}$$

iar inversiunea se efectuează succesiv pentru fiecare variabilă.

Astfel, aplicarea teoremei de convoluţie ne dă

$$\frac{\nu\,\bar{\bar{\theta}}_2'(q,s)}{q+s+\nu} \overset{q}{\bullet\!\!-\!\!\circ} \overset{\bar{z}}{} \nu e^{-(s+\nu)\bar{z}} \overset{\bar{z}}{*} \bar{\theta}_2'(\bar{z},s), \tag{57}$$

unde

$$e^{-(s+\nu)\bar{z}} \overset{\bar{z}}{*} \bar{\theta}_2'(\bar{z}, s) = \int_0^{\bar{z}} e^{-(s+\nu)\zeta} \bar{\theta}_2'(\bar{z} - \zeta, s)\, d\zeta \tag{58}$$

şi

$$\bar{\theta}_2'(\bar{z}, s) \overset{s}{\bullet\!\!-\!\!\circ} \overset{\bar{t}}{} \theta_2'(\bar{z}, \bar{t}). \tag{59}$$

Efectuînd apoi sub semnul integral inversiunea în raport cu s, găsim

$$e^{-(s+\nu)\bar{z}} \overset{\bar{z}}{*} \bar{\theta}_2'(\bar{z}, s) \overset{s}{\bullet\!\!-\!\!\circ} \overset{\bar{t}}{} \int_0^{\bar{z}} e^{-\zeta\nu} \theta_2'(\bar{z} - \zeta, \bar{t} - \zeta)\, d\zeta, \tag{60}$$

θ_2' fiind nulă pentru valorile negative ale variabilelor.

Avem, de asemenea,

$$\frac{\gamma}{qs(q+s+\nu)} \overset{q}{\bullet\!\!-\!\!\circ} \overset{\bar{z}}{} \frac{\gamma}{s(s+\nu)} [1 - e^{-(s+\nu)\bar{z}}] \overset{s}{\bullet\!\!-\!\!\circ} \overset{\bar{t}}{} \frac{\gamma}{\nu} (1 - e^{-\nu\bar{t}}) -$$

$$- \frac{\gamma}{\nu} e^{-\nu\bar{z}} [1 - e^{-\nu(\bar{t} - \bar{z})}]\, U(\bar{t} - \bar{z}) \tag{61}$$

şi

$$\frac{\overline{T}_{10}}{s(q+s+\nu)} \overset{q}{\bullet\!\!-\!\!\circ} \overset{\bar{z}}{} e^{-(s+\nu)\bar{z}} \frac{\overline{T}_{10}}{s} \overset{s}{\bullet\!\!-\!\!\circ} \overset{t}{} \overline{T}_{10} e^{-\nu\bar{z}}\, U(\bar{t} - \bar{z}), \tag{62}$$

unde

$$U(\bar{t} - \bar{z}) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } \bar{t} < \bar{z}, \\ 1 \text{ pentru } \bar{t} > \bar{z} \end{cases} \tag{63}$$

este funcţia lui Heaviside.

Prin urmare, soluţia ecuaţiei (50) are forma

$$\theta_1 = \frac{\gamma}{\nu} (1 - e^{-\nu\bar{t}}) + \nu \int_0^{\bar{t}} e^{-\nu\zeta} \theta_2'(\bar{z} - \zeta, \bar{t} - \zeta)\, d\zeta \tag{64}$$

pentru $t < \bar{z}$ şi

$$\theta_1 = \overline{T}_{10} e^{-\nu\bar{z}} + \frac{\gamma}{\nu} (1 - e^{-\nu\bar{z}}) + \nu \int_0^{\bar{z}} e^{-\nu\zeta} \theta_2'(\bar{z} - \zeta, \bar{t} - \zeta)\, d\zeta \tag{65}$$

pentru $\bar{t} > \bar{z}$.

Putem utiliza aceste formule dacă introducem pentru funcţia θ_2' o expresie aproximativă dedusă, de exemplu, cu ajutorul rezultatelor din

[9]. În felul acesta, se obţine o a doua aproximaţie, procesul iterativ putînd fi eventual continuat.

Prin urmare, cu toate simplificările adoptate, dintre care cele mai importante sînt aceea de a considera în tubing viteza medie în locul celei reale şi aceea de a neglija transferul de căldură în direcţia verticalei, problema rămîne destul de complicată.

Primită la redacţie la 26 decembrie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. I. M. Astrahan, V. I. Maron, *Nestaţionarnîi teploobmen pri promîvki skvajinî*, Jurnal prikladnoi mehaniki i tehniceskoi fiziki, *1* (1969).
2. Jean Hladik, *La transformation de Laplace à plusieurs variables*, Masson et C-ie, Paris, 1969, p. 123—125.
3. T. Oroveanu, *Răcirea găurii de sondă prin circulaţie de lichid*, St. cerc. mec. apl., **28**, *6* (1969).
4. T. Oroveanu, I. Spulber, *Unele probleme privitoare la injecţia lichidelor calde în zăcămintele de petrol*, St. cerc. mec. apl., **29**, *2* (1970).
5. T. Oroveanu, *Influenţa variaţiei parametrilor termici asupra răcirii găurii de sondă prin circulaţie de lichid*, St. cerc. mec. apl., **29**, *6* (1970).
6. T. Oroveanu, *Asupra transferului de căldură în gaura de sondă în timpul injecţiei unui lichid cald în zăcămînt*, St. cerc. mec. apl., **30**, *5* (1971).
7. T. Oroveanu, *Sur la détermination des pertes de chaleur dans un puits de pétrole pendant l'injection d'un liquide chaud dans le gisement*, Revue roumaine des sciences techniques. Série de mécanique appliquée, **16**, *6* (1971).
8. T. Oroveanu, *Sur un problème de transfert de chaleur dans l'écoulement laminaire dans un tube*, Revue roumaine des sciences techniques. Série de mécanique appliquée, **17**, *4* (1972).
9. H. J. Ramey, Jr., *Wellbore Heat Transmission*, Transactions AIME, *225* (1962).
10. I. N. Sneddon, *Functional Analysis*, Handbuch der Physik, Mathematische Methoden II. Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955, p. 240—241.

PROFILUL VITEZEI ÎN REGIUNEA DE PERETE A STRATULUI-LIMITĂ TURBULENT

de D. IONESCU

Centrul de cercetări pentru mașini hidraulice Timișoara

Pornind de la o analiză structurală și dimensională a ecuației energiei turbulente, se stabilește o metodă pentru calculul profilului de viteze din regiunea de perete.

1. INTRODUCERE

Este cunoscut de mai mult timp că în apropierea peretelui profilele de viteză ale curenților turbulenți pot fi făcute adimensionale, astfel încît, diferitele profile măsurate normal la perete se situează pe aceeași curbă numită „legea peretelui" [1], [2]. Cu toată importanța deosebită pe care o reprezintă regiunea de perete, numărul lucrărilor destinate elaborării unei teorii care să prezică comportarea stratului-limită turbulent în această regiune, este destul de limitat. Unele din aceste teorii fie că tratează numai zone restrînse ale regiunii de perete [3], [4], fie că, deși cuprind întreaga regiune, dau pentru substratul vîscos și zona „tampon" expresii care se integrează numai cu calculatoare electronice [5], [6].

În prezenta lucrare, autorul își propune să dea o nouă metodă de calcul pentru distribuția vitezei într-un strat-limită turbulent cu gradient de presiune pozitiv, pornind de la o analiză structurală a turbulenței de perete. Aceasta a făcut-o pe baza ideilor lui Szablewski [7] asupra substratului vîscos, pe care le va relua parțial și le va extinde la întreaga regiune de perete. O analiză dimensională a bilanțului energetic al turbulenței de perete a permis stabilirea unei ecuații complet integrate pentru profilul vitezei, cuprinzînd această regiune pînă la substratul vîscos, în care se știe că distribuția vitezei este liniară.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 32, NR. 3, 1973, P. 541–551

2. TURBULENȚA DE PERETE

Elemente de bază. După cum este bine cunoscut, curenții turbulenți se caracterizează prin fluctuații ale vitezei, care se amortizează spre perete ca urmare a rezistenței opusă de viscozitatea mediului. Materialul experimental obținut prin măsurători directe sau prin tehnici vizuale au arătat că pulsațiile turbulente sînt stabile pînă aproape de perete. În consecință, putem considera regiunea de perete a stratului-limită turbulent ca un întreg, asupra structurii căruia putem obține claritate, numai prin integrarea ecuațiilor Navier-Stokes pentru scurgeri cvasistaționare, folosind condițiile de perete :

$$
\begin{aligned}
0 &= -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_0 + \mu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_0, \\
0 &= -\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_0 + \mu\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0, \\
0 &= -\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_0, \\
\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 &= 0 \quad \text{(din ecuația continuității)} \\
(U)_0 = (V)_0 &= (W)_0 = 0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

în care U, V, W reprezintă valorile momentane ale componentelor vitezei în direcțiile x, y, z iar P este presiunea statică momentană ; indicile zero se referă la perete.

În conformitate cu (1), se pot scrie pentru valori mici ale lui y

$$
\begin{aligned}
U &= \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0 y + \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_0 \frac{y^2}{2} + \ldots, \\
V &= \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_0 \frac{y^2}{2} + \ldots, \\
W &= \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_0 y + \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_0 \frac{y^2}{2} + \ldots .
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Înlocuind în (2) $U = \overline{U} + u$, $V = \overline{V} + v$, $W = \overline{W} + w$ şi $P = \overline{P} + p$, după separarea mărimilor medii în timp, rezultă expresii analoage pentru pulsaţii :

$$u = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 y + \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_0 \frac{y}{2} + \dots,$$

$$v = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_0 \frac{y^2}{2} + \dots, \tag{3}$$

$$w = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 y + \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_0 \frac{y^2}{2} + \dots .$$

Cu (3), energia cinetică a turbulenţii, $\frac{1}{2}\overline{q}^2 = \frac{1}{2}(\overline{u}^2 + \overline{v}^2 + \overline{w}^2)$, devine

$$\frac{1}{2}\overline{q}^2 = \frac{1}{2}\left\{\left[\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0^2} + \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0^2}\right] y^2 + \frac{1}{\mu}\left[\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_0} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left[\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)}\right]\right] y^3 + \dots . \tag{4}$$

Bilanţul energetic al turbulenţii — În teoria lungimii de amestec a lui Pradtl, între gradientul vitezei şi eforturile Reynolds există relaţia

$$\tau = -\rho\,\overline{uv} = \rho\, l^2 \frac{\partial \overline{U}}{\partial y}\left|\frac{\partial \overline{U}}{\partial y}\right|, \tag{5}$$

în care l este o lungime a cărei mărime poate fi determinată din consideraţii de ordin dimensional. Cu expresia simplă, $l = ky$ (k — constanta lui Karman) pentru domeniul de efort constant ($\tau = \tau_0$) al stratului-limită complet turbulent, s-a obţinut cunoscuta lege logaritmică. Însă, pe baza acestei ipoteze nu este posibil să se realizeze o repartiţie de viteze în concordanţă cu experienţa pentru zona tampon. Motivul trebuie să fie acela că extinderea ipotezei lui Prandtl pentru zone foarte apropiate de perete dă pentru tensiunea de frecare o valoare prea mare. Este scopul acestei lucrări de a arăta că poate fi obţinută o relaţie mai completă între gradientul vitezei şi efortul tangenţial pe baza unei analize detaliate a structurii turbulenţii din regiunea de perete.

Bilanţul energiei turbulente pentru regiunea de perete a unui strat-limită bidimensional este

$$-\rho\overline{uv} - \rho\frac{\partial Q}{\partial y} - \rho S = 0. \tag{6}$$

Primul termen reprezintă energia transferată de mişcarea medie prin eforturi tangenţiale de turbulenţă

$$-\rho\overline{uv}\frac{\partial\overline{U}}{\partial y}=\tau\frac{\partial\overline{U}}{\partial y}. \tag{7}$$

Al doilea termen aproximează pierderile de energie prin mişcări moleculare şi turbulente şi prin locul mecanic produs de gradientul presiunii turbulente (difuzia):

$$\rho\frac{\partial Q}{\partial y}=\rho\frac{\partial}{\partial y}\left[\nu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\overline{q^2}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\overline{vq^2}+\frac{1}{\rho}\overline{pv}\right)\right], \tag{8}$$

în care detaliem cu (3)

$$\frac{1}{2}\mu\frac{\partial^2\overline{q^2}}{\partial y^2}=\mu\left[\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}+\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2}\right]+3\left[\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_0}+\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_0}\right]y+\cdots \tag{9}$$

$$\cdots+\frac{1}{2}\rho\frac{\partial}{\partial y}(\overline{vq^2})=\frac{1}{\nu}\overline{\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0\right]}y^3+\cdots \tag{10}$$

$$\cdots+\frac{\partial}{\partial y}(\overline{pv})=\frac{1}{\mu}\overline{(p_0)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_0}y+\cdots. \tag{11}$$

Ultima relaţie s-a dedus, scriind

$$p=(p)_0+\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_0 y+\cdots$$

Ipoteza lui Townsend [4], după care mişcarea turbulentă în regiunea interioară a unui strat-limită constă dintr-o parte „activă", care produce efort tangenţial şi ale cărei proprietăţi statistice sînt funcţii universale de τ şi y, şi o parte „inactivă", irotaţională, impusă de turbulenţa din stratul exterior, a fost confirmată de măsurătorile lui Bradslaw [8]. Mişcarea „inactivă" este generată parţial de fluctuaţiile presiunii statice şi parţial de incursiuni ale fluidului din stratul exterior. Townsend [9] a argumentat că o parte din difuzia energiei este efectuată de vîrtejurile mari, însă studiile mai recente ale lui Bradshaw [8] au arătat că acestea sînt mult mai puternice decît a presupus Townsend. Este de aceea foarte probabil ca cea mai mare parte din difuzie să se facă prin vîrtejuri mari, ceea ce duce la presupunerea că *difuzia turbulentă contribuie foarte puţin sau deloc la mişcarea activă.*

În sfîrșit, termenul al treilea din (6) este disipația

$$\rho S = \mu\left[\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}+\overline{\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2}+\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}+\right.$$

$$\left.+2\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}+2\overline{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}+2\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2}\right] \tag{12}$$

sau cu (3)

$$\rho S = \mu\left[\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0^2}+\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0^2}\right]+2\left[\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_0}+\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_0}\right]y+\cdots \tag{13}$$

După cum este cunoscut, Pradtl [10] a explicat disipația ca fiind rezistența mediului față de mișcarea baloturilor de turbulență, ajungînd prin considerații de ordin dimensional la următoarea expresie:

$$S = c\left(\frac{1}{2}\overline{q}^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big/ l, \tag{14}$$

în care l este o măsură a diametrului mediu a balotului de turbulență. Dacă punem $l \sim y$ obținem o bună concordanță cu experiența pentru zona de perete complet turbulentă. Dacă însă pătrundem în zona tampon se constată diferențe față de experiment, deoarece din (14), în conformitate cu (4) pentru $l \sim y$, rezultă că disipația dispare spre perete în timp ce după (13) $S \sim$ const.

3. PROFILUL VITEZEI

Este deja bine stabilit din numeroase lucrări experimentale, că în curentul din apropierea peretelui, în afara substratului vîscos, singura scară importantă pentru lungime este y și singura scară importantă pentru viteze este $u_\tau = (\tau_0/\rho)^{\frac{1}{2}}$ (τ_0 este tensiunea de frecare la perete) sau cu o bună aproximație, ținînd seamă de variația efortului cu y, $(\tau/\rho)^{\frac{1}{2}}$. Raportul efortului tangențial la energia cinetică a părții „active" a mișcării turbulente, $\tau/\rho\overline{q}^2$, este aproape constant și universal (Bradshaw [8]).

De aceea, efortul tangențial poate fi luat cu aproximație inginerească, să reprezinte energia cinetică a părții „active" a turbulenții, astfel că, ecuația energiei pentru regiunea de perete a turbulenții poate fi folosită ca o ecuație pentru efortul tangențial.

În concordanță cu acestea, vom face o analiză dimensională a termenilor ecuației (6) corespunzători energiei „active" a turbulenții, pe baza expresiilor (7), (9) și (13). Se obține în final o ecuație diferențială de forma

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial y} = A\frac{\nu}{y^2}+\frac{(\tau/\rho)^{\frac{1}{2}}}{Ky} \tag{15}$$

în care A şi K sînt constante. După cum am arătat mai înainte, în curentul complet turbulent din regiunea de perete, expresia (5) dă o bună concordanţă cu experienţa pentru $l = Ky$. În consecinţă, o comparaţie între (5) şi (15) arată că constanta K din (15) este identică cu cunoscuta constantă a lui Karman.

Ecuaţia (15) poate fi integrată dacă se cunoaşte repartiţia efortului tangenţial după normala la perete. Ecuaţiile mişcării medii pentru regiunea de perete a unui strat-limită bidimensional dă $\partial\tau/\partial y = \mathrm{d}\overline{p}/\mathrm{d}x$, însă, pe baza a numeroase dovezi experimentale, efortul tangenţial este liniar, gradientul său nu este egal cu gradientul presiunii. De aceea, în lucrarea prezentă vom accepta pentru efortul tangenţial total o variaţie de forma

$$\frac{\tau}{\rho} = u_\tau^2 + ay, \tag{16}$$

în care am notat $a = \partial\tau/\partial y \neq \mathrm{d}\overline{p}/\mathrm{d}x$.

Integrînd (15) cu distribuţia de efort (16) se obţine

$$\overline{U} = -A\frac{\nu}{y} + \frac{u_\tau}{K}\ln\frac{(u_\tau^2+ay)^{\frac{1}{2}} - u_\tau}{(u_\tau^2+ay)^{\frac{1}{2}} + u_\tau} + \frac{2}{K}(u_\tau^2 + ay)^{\frac{1}{2}} + \overline{U}_i. \tag{17}$$

Constanta de integrare $\overline{U}_i$ se poate determina din condiţia ca la marginea substratului vîscos de grosime δ_0 viteza să fie $\overline{U}_0$. Prin urmare, pentru $ay \ll u_\tau^2$, ultima ecuaţie devine

$$\overline{U}_0 = -A\frac{\nu}{y} + \frac{u_\tau}{K}\ln\frac{a\delta_0}{4u_\tau^2} + 2\frac{u_\tau}{K} + \overline{U}_i.$$

După cum s-a observat experimental, în concordanţă şi cu teoriile lui Mellor [5] şi Mc Donald [6], grosimea substratului vîscos se micşorează cu creşterea presiunii. Această micşorare o presupunem în prezenta lucrare că se face după o exponenţială de argument $(-\alpha_0^{\frac{1}{3}})$, $\alpha_0 = (\nu/\rho)(\mathrm{d}\overline{P}/\mathrm{d}x)/u_\tau^3$.

Nu există pînă în prezent nici o lucrare experimentală în care să se fi pătruns cu măsurătorile de viteză pînă la apropierea substratului vîscos al unui strat-limită cu gradient de presiune. În toate lucrările, măsurătorile au ajuns numai în partea superioară a zonei tampon, aşa că ipoteza formulată nu poate fi susţinută pe argumente experimentale şi de aceea ea are numai un caracter speculativ, justificată mai mult prin rezultatele finale. Pe baza acestei ipoteze şi din motive de ordin dimensional punem

$$\delta_0 = \varepsilon\frac{\nu}{u_\tau}\exp(-\alpha_0^{\frac{1}{3}}) \text{ şi } A = A_0\exp(-\alpha_0^{\frac{1}{3}}). \tag{18}$$

Cu $\alpha \equiv \nu a/u_\tau^3$, $u^+ = \overline{U}/u_\tau$ şi $y^+ = yu_\tau/\nu$, ecuaţia (17) se scrie :

$$u^+ = B^+ - \frac{A}{y^+} + \frac{1}{K}\ln\frac{4}{\alpha}\frac{(1+\alpha y^+)^{\frac{1}{2}}-1}{(1+\alpha y^+)^{\frac{1}{2}}+1} + \frac{2}{K}\left[(1+\alpha y^+)^{\frac{1}{2}}-1\right], \quad (19)$$

în care am notat

$$B^+ = \frac{\overline{U}_0}{U_\tau} + \frac{A_0}{\varepsilon} - \frac{1}{K}\ln\varepsilon + \frac{\alpha^{\frac{1}{3}}}{K} \quad \text{sau} \quad B^+ = B_0^+ + \frac{\alpha_0^{\frac{1}{3}}}{K}.$$

Pentru un strat-limită fără gradient de presiune ($\alpha_0 = 0$), ecuaţia (19) devine

$$u^+ = B_0^+ - \frac{A_0}{y^+} + \frac{1}{K}\ln y^+, \quad (19a)$$

în care se recunoaşte cunoscuta lege logaritmică cu excepţia termenului al doilea, care reprezintă abaterea de la această lege în zona tampon.

Dacă notăm $u_p = (\nu a)^{\frac{1}{3}}$, $u^* = \overline{U}/u_p$ şi $y^* = yu_p/\nu$, ecuaţia (17) poate fi pusă sub a doua formă :

$$u^* = B^* - \frac{A}{y^*} + \frac{\alpha_0^{-\frac{1}{3}}}{K}\ln\frac{4}{\alpha}\frac{(\alpha_0^{-\frac{2}{3}}+cy^*)^{\frac{1}{2}}-\alpha_0^{-\frac{1}{3}}}{(\alpha_0^{-\frac{2}{3}}+Cy^*)^{\frac{1}{2}}+\alpha_0^{-\frac{1}{3}}} +$$

$$+ \frac{2}{K}\left[(\alpha_0^{-\frac{2}{3}}+Cy^*)^{\frac{1}{2}} - \alpha_0^{-\frac{1}{3}}\right], \quad (20)$$

cu

$$B^* = B^+\alpha_0^{-\frac{1}{3}} = B_0^+\alpha_0^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{K}, \quad C = \alpha/\alpha_0.$$

După cum se observă, ecuaţiile (19) şi (20) conţin două constante B_0^+ şi A_0 ale căror valori trebuie să fie determinate experimental din măsurători în stratul-limită fără gradient de presiune. Pentru aceasta am făcut apel la datele de tub ale lui Laufer [11], care reprezintă măsurători în zona tampon pînă la distanţe foarte mici de perete şi care arată o comportare asimptotică $u^+ \sim y^+$ cînd $y^+ \to 0$. Pe baza lor s-a dedus

$$B_0^+ = 5{,}1 \quad \text{şi} \quad A_0 = 21,$$

considerînd pentru constanta lui Karman valoarea 0,4. Este de remarcat că valoarea constantei B_0^+ coincide cu cea întîlnită în literatură. În figura 1

se vede în ce măsură ecuaţia (19 a) aproximează datele experimentale din care au fost deduse constantele.

Considerînd pentru substratul vîscos, a cărui grosime este foarte mică, o repartiţie liniară, astfel încît să se racordeze cu (19) la distanţa δ_0, întreaga regiune de perete este complet determinată.

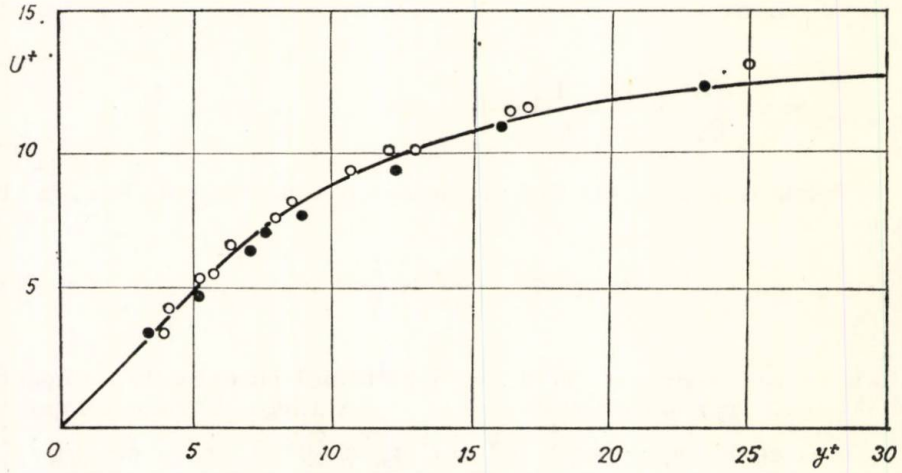


Fig. 1. — Comparaţie între profilul de viteze măsurat de Laufer şi ecuaţia (19a). Experiment :. Re = 500 000, o Re = 50 000 (reproduse după Mellor (5)). Teorie : ————

4. COMPARAŢII CU PROFILE MĂSURATE

În comparaţiile dintre teorie şi experiment, care sînt prezentate în în figurile 2 pînă la 9 s-au folosit valorile coeficientului de frecare citate de autori cu excepţia profilelor lui Newman [12]. În acest caz, am adoptat valoarea stabilită de Mc. Donald [6] prin extrapolarea la perete a efortului tangenţial. Curbele teoretice au fost calculate cu raportul $C = 0{,}55$, care pare a fi destul de bun cel puţin pentru gradienţii de presiune mici şi mijlocii. Această valoare autorul a determinat-o din datele experimentale ale lui Newman [12] şi Bradshaw [13], determinare pe care nu a mai prezentat-o aici din lipsă de spaţiu.

5. CONCLUZII

În această lucrare este prezentată o nouă metodă pentru profilul vitezei, cuprinzînd întreaga regiune de perete a unui strat-limită turbulent, sub formă complet integrată. Între teorie şi experiment este o bună concordanţă, iar cu măsurătorile din zona tampon am putea spune că este chiar foarte bună. O consecinţă a acestei constatări ar fi posibilitatea folosirii prezentei metode pentru aplicarea unei corecţii simple la

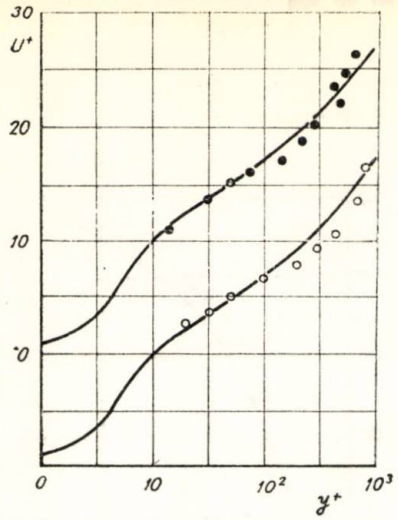


Fig. 2. — Comparație între profile de viteză măsurate de Newman și teorie. Experiment : ○ Stația B și ● stația C. Teorie : _____ ($\alpha_0 = 0{,}0083$ la stația B și $\alpha_0 = 0{,}0114$ la stația C).

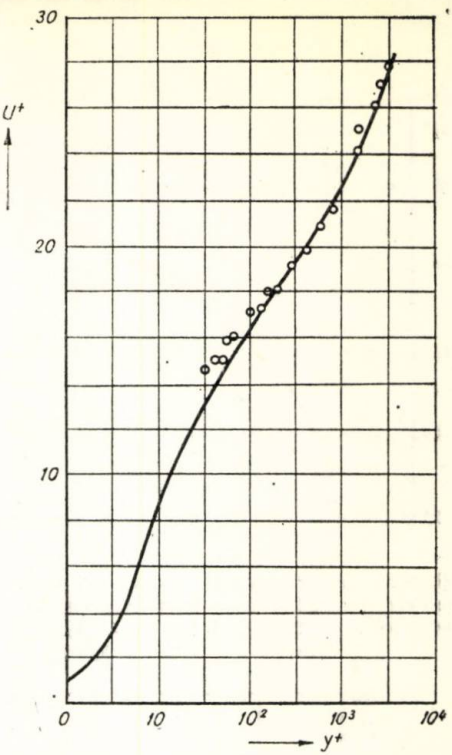


Fig. 3. — Comparație între un profil de viteze măsurat de Bradshaw [13] și teorie. Experiment : ○ stația $x = 83$ in. $U_1 \sim x^{-0.15}$. Teorie : _____ ($\alpha_0 = 0{,}00106$).

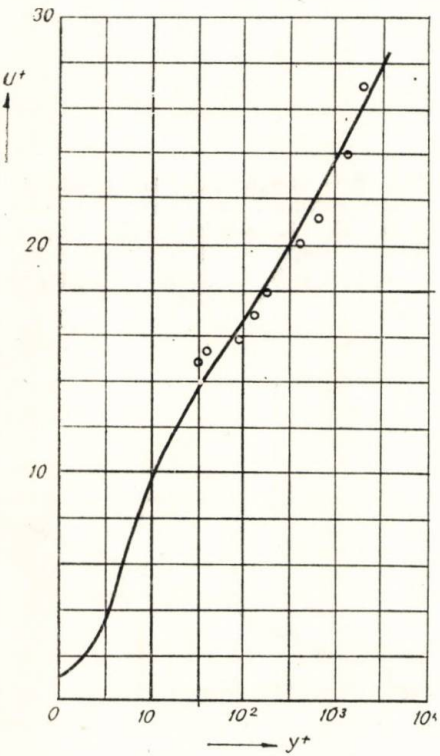


Fig. 4. — Comparație între un profil de viteze măsurat de Bradshaw [13] și teorie. Experiment : ○ stația $x = 83$ in $U_1 \sim x^{-0{,}255}$. Teorie : _____ ($\alpha_0 = 0{,}0039$).

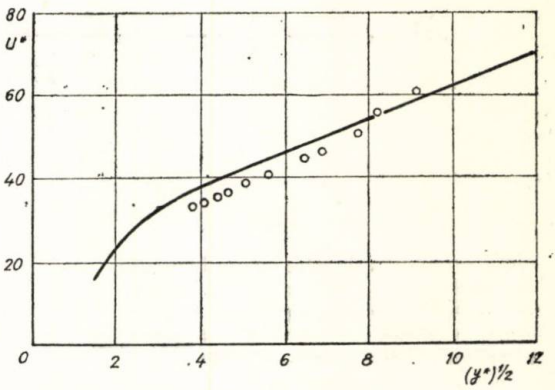


Fig. 5. — Comparație între un profil de viteze măsurat de Patel (reprodus după Mc.Donald [6] și teorie. Experiment : ○ Teorie : _____ ($\alpha_0 = 0{,}09$).

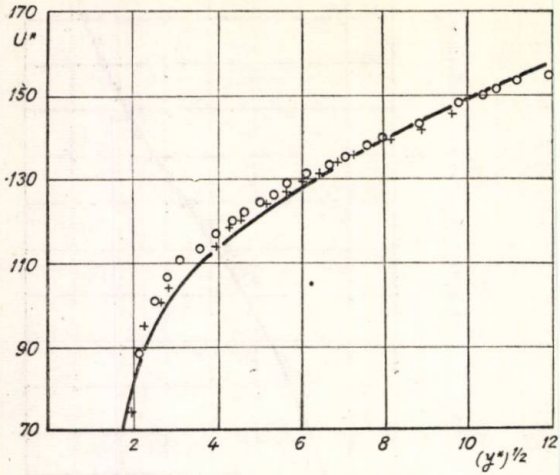


Fig. 6. — Comparaţie între profile de viteze măsurate de Perry (reproduse după Mc Donald [6]) şi teorie. Experiment : ○ staţia $x = 2{,}5$ ft, + staţia $x = 4{,}0$ ft. Teorie : _____ ($\alpha_0 = 0{,}0037$).

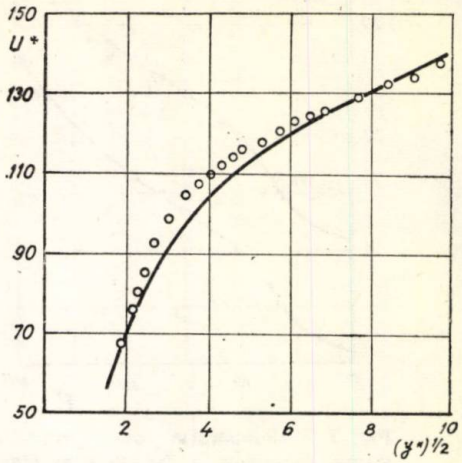


Fig. 7. — Comparaţie între un profil de viteze măsurat de Perry (reprodus după Mc. Donald [6]) şi teorie. Experiment : ○ staţia $x = 5{,}5$ ft. Teorie : _____ ($\alpha_0 = 0{,}00456$).

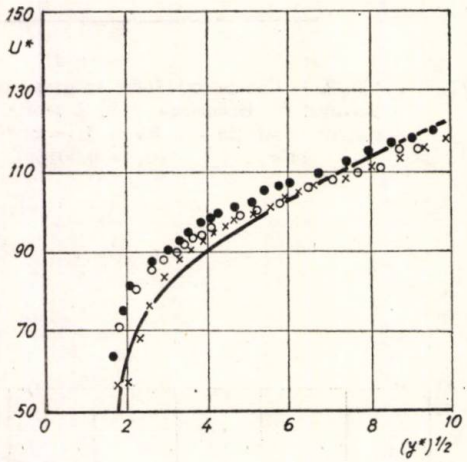


Fig. 8. — Comparaţie între profile de viteză măsurate de Perry (reproduse după Mc. Donald) şi teorie. Experiment : + staţia $x = 5$ ft, Δ staţia $x = 0{,}5$ ft, ○ staţia $x = 10$ ft. Teorie : _____ ($\alpha_0 = 0{,}007$).

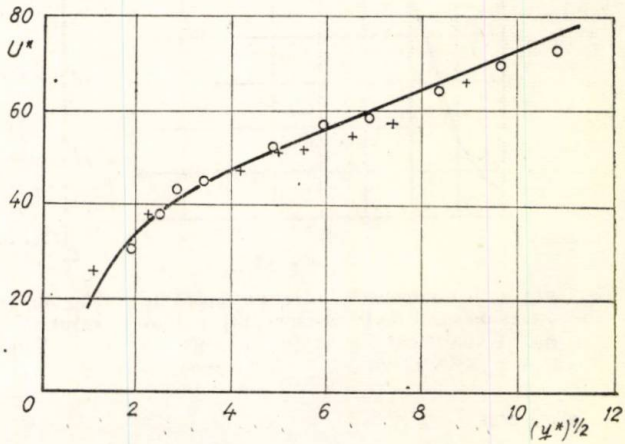


Fig. 9. — Comparaţie între un profil de viteze măsurat de Spangenberg ş.a. (reprodus după Mc. Donald 6) şi teorie. Experiment : ○ staţia $x = 130$ in. ; + staţia $x = 80$ in. (distribuţia A). Teorie _____ ($\alpha_0 = 0{,}04$).

măsurătorile tensiunii de frecare la perete care să ţină seamă de efectele gradientului presiunii, întrucît calibrarea unui instrument în acest scop implică existenţa unei familii universale de profile de viteză în substrat şi în zona tampon.

Primită la redacţie la 30 noiembrie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. F. CLAUSER. J. Aero. Sci., **21**, *91*(1954).
2. F. CLAUSER, Adv. Appl. Mech., **5**, *1*, (1956).
3. B. S. STRATFORD, J. Fluid Mech., **5**, *1*, (1959).
4. A. A. TOWNSEND, J. Fluid Mech., **11**, *97* (1961).
5. G. L., MELLOR, J. Fluid Mech., **24**, *225* (1966).
6. H. Mc. DONALD, J. Fluid Mech.,**35** , *311*(1969).
7. W. SZABLEWSKI, ZAMM, **38**, 77 (1959).
8. P. BRADSHAW, NPL Aero Rep., 1172 (1965) şi J. Fluid Mech., **30**, 241(1967).
9. A. A. TOWNSEND, *The structure of turbulent shear flow*, Cambridge University Press, 1956.
10. L. PRANDTL, Nachr. Acad. Göttingen, *6* (1945).
11. J. LAUFER, NACA TN 2954, 1953, şi NACA Rep. 1174 (1954).
12. B. G. NEWMAN, Australian Aero. Res. Cons. Com. ACA—53.
13. P. BRADSHAW, NPL, Aero Rep. 1184 (1966).

CERCETĂRI EXPERIMENTALE ASUPRA UNOR VENTILATOARE AXIALE TIPIZATE

de ŞT. ZAREA

Institutul politehnic Bucureşti

Pentru patru din ventilatoarele axiale tipizate după şirul numerelor normale R 10, din producţia Fabricii de ventilatoare Bucureşti, s-au efectuat măsurători de debite şi presiuni de refulare şi s-au trasat curbele caracteristice în coordonate adimensionale şi cele de randament. S-au variat : tipul paletei, numărul de palete, unghiul de aşezare şi turaţia, punîndu-se în evidenţă influenţa acestor factori asupra randamentului. Ventilatoarele studiate, cu diametrele de 500, 630, 800 respectiv 1000 mm, cu paletele calculate de autor, au randament mai ridicat cu peste 60 % faţă de cele care se executau anterior la F. V. B.

1. PREZENTAREA PROBLEMEI

În lucrare se prezintă rezultatele măsurătorilor efectuate pe patru tipuri de ventilatoare axiale, considerate ca prototipuri pentru realizarea unor ventilatoare tipizate de randament sporit. Aceste prototipuri fac parte din familia de ventilatoare axiale prevăzute în studiul de tipizare întocmit anterior [1].

Diametrele rotoarelor respective sînt 500, 630, 800 şi, respectiv, 1000 mm. Ventilatoarele sînt întubate şi sînt simbolizate astfel : VAT 500, VAT 630, VAT 800 şi VAT 1000.

Proiectarea rotorului s-a efectuat în ipoteza circulaţiei constante în lungul paletei şi a utilizării unor palete de grosime constantă, întrucît, în prezent, pentru fabrica de ventilatoare Bucureşti (FVB) este preferată tehnologic această soluţie în loc de turnarea unor palete profilate, de grosime variabilă.

S-au utilizat două metodici de calcul, iar paletele obţinute au fost denumite de tip I, respectiv de tip II.

Încercările experimentale s-au efectuat în standul FVB, în aceleaşi condiţii pentru toate rotoarele, cu ambele tipuri de palete.

Prototipurile studiate sînt fără aparate directoare amonte sau în aval de rotoare.

Pe baza cercetării experimentale efectuate s-au determinat:

— curbele caracteristice ale ventilatoarelor cercetate,

— influenţa numărului de palete ale rotorului asupra curbei caracteristice şi a randamentului ventilatorului,

— curbele de randament static în funcţie de debitul adimensional,

— domeniul de utilizare economică a modelelor experimentale (domeniul de debite de presiuni în care ventilatoarele proiectate pot fi utilizate cu randament satisfăcător).

Mărirea randamentului instalaţiilor care utilizează ventilatoare are importante consecinţe economice. Astfel, dacă se ţine seama că în ţara noastră sînt în funcţiune aproximativ 60.000 de ventilatoare convenţionale cu o putere medie de 5 Kw şi apreciind că funcţionează 6000 ore/an prin sporirea randamentului cu 20%, ceea ce este realizabil prin reproiectare, rezultă o economie de 1 200 000 000 lei/an la consumul de energie electrică. În consecinţă este justificată necesitatea îmbunătăţirii constructive a ventilatoarelor. Eficienţa cea mai mare se obţine prin reproiectarea paletajului rotoric.

2. CARACTERISTICILE CONSTRUCTIVE ALE PROTOTIPURILOR ÎNCERCATE

Pentru a se obţine randamente cît mai ridicate în intervale de debite şi presiuni cît mai largi, la prototipurile considerate s-au variat următorii parametri: tipul de palete rotorice, desimea reţelei de profile (l/t), raportul $\nu = D_b/D$ dintre diametrul butucului, D_b, şi diametrul exterior al rotorului, D, sistemul de fixare al paletelor pe butuc, sistemul de fixare al motorului electric.

S-au experimentat două tipuri de palete avînd următoarele particularităţi:

tipul I, palete cu profile de curbură mică, deviaţie mică, unghiuri de aşezare mici ($\theta = 12°$) şi torsionare redusă ($\beta = 8°$) (fig. 1),

tipul II — palete cu deviaţie mai mare, unghiuri de aşezare mai mari ($\theta = 36°$) şi torsionare sporită ($\beta = 36°$) faţă de cele de tip I (fig. 2).

Numărul de palete, z, a fost variat între 4 şi 12. Pentru desimea reţelei de profile s-au considerat patru valori $l/t = 0{,}5$; 0,7; 1,1 şi 1,2.

Pentru raportul $\nu = D_b/D$ s-au considerat valorile 0,5 şi 0,63 ţinînd seama de indicaţiile din literatură [2].

S-au considerat două tipuri de fixare a paletelor de butuc: prin prindere cu şuruburi şi respectiv prin sudare.

Fixarea paletelor pe butuc cu ajutorul şuruburilor s-a utilizat la încercările cu număr diferit de palete pe acelaşi butuc. Dimensiunile de

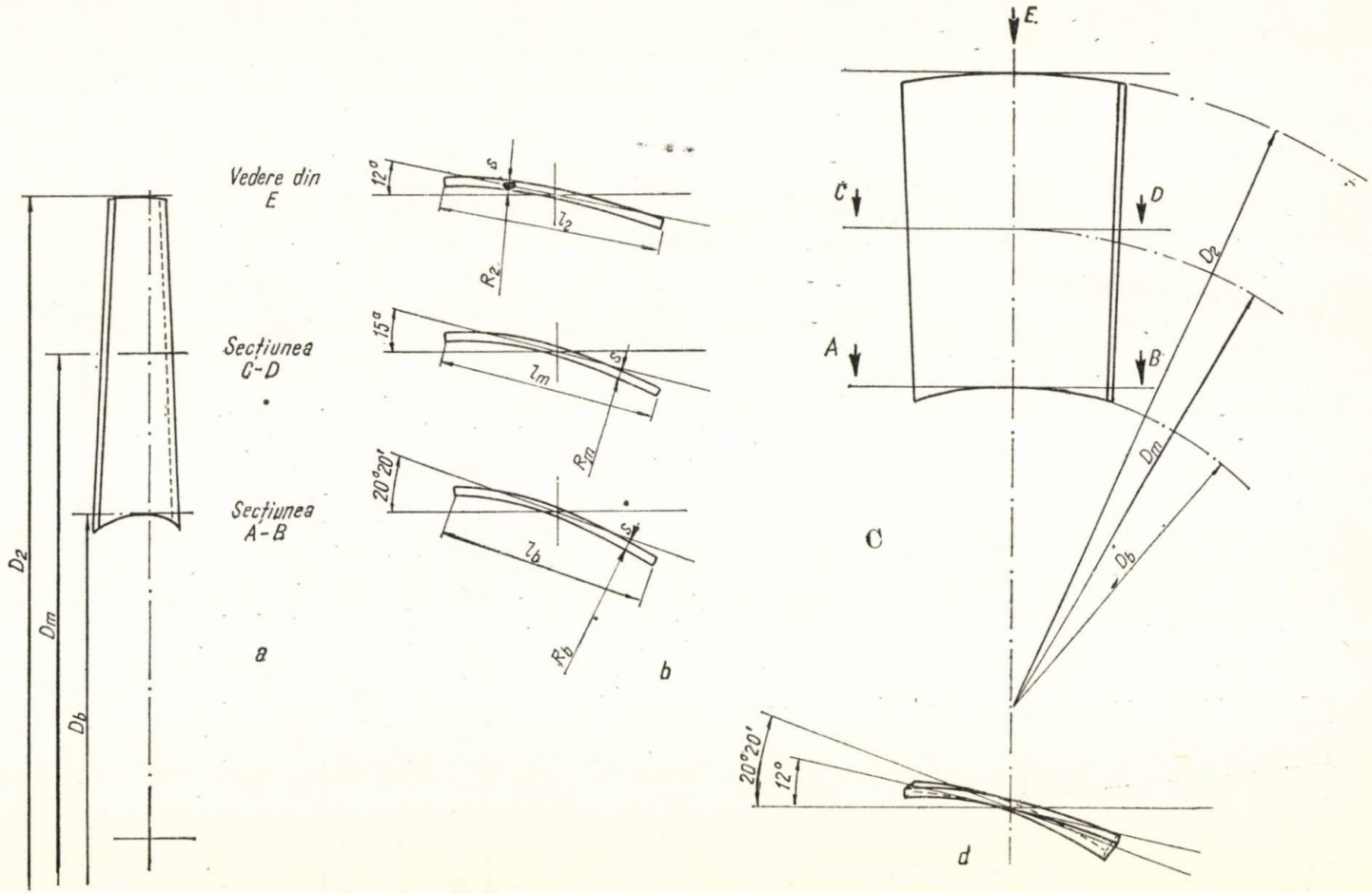
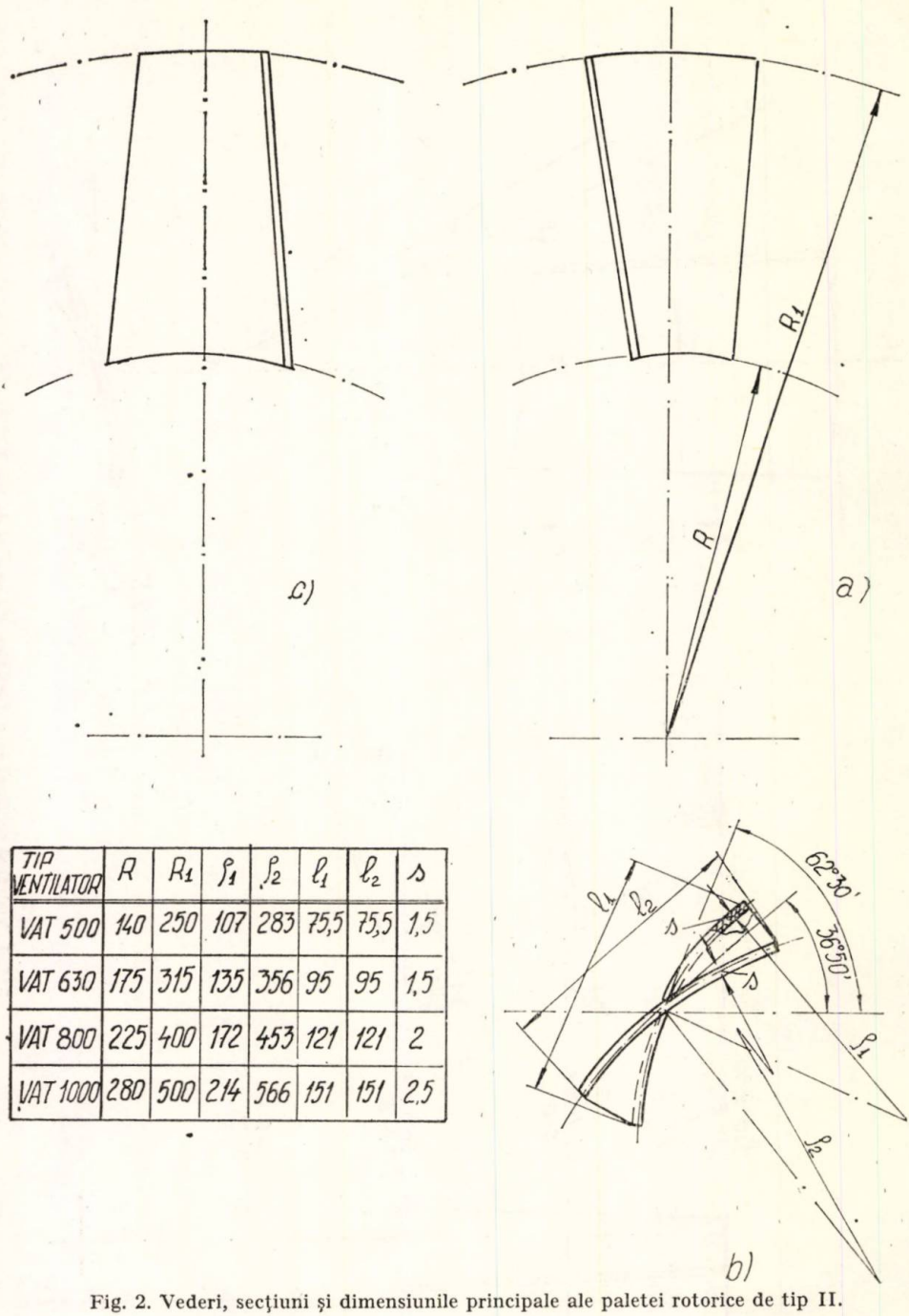


Fig. 1. Vederi și secțiuni caracteristice ale paletei de tip I.



TIP VENTILATOR	R	R_1	f_1	f_2	l_1	l_2	s
VAT 500	140	250	107	283	75,5	75,5	1,5
VAT 630	175	315	135	356	95	95	1,5
VAT 800	225	400	172	453	121	121	2
VAT 1000	280	500	214	566	151	151	2,5

Fig. 2. Vederi, secţiuni şi dimensiunile principale ale paletei rotorice de tip II.

gabarit şi parametrii nominali ai ventilatoarelor studiate sînt precizate în tabela 1 şi în figura 3 [9].

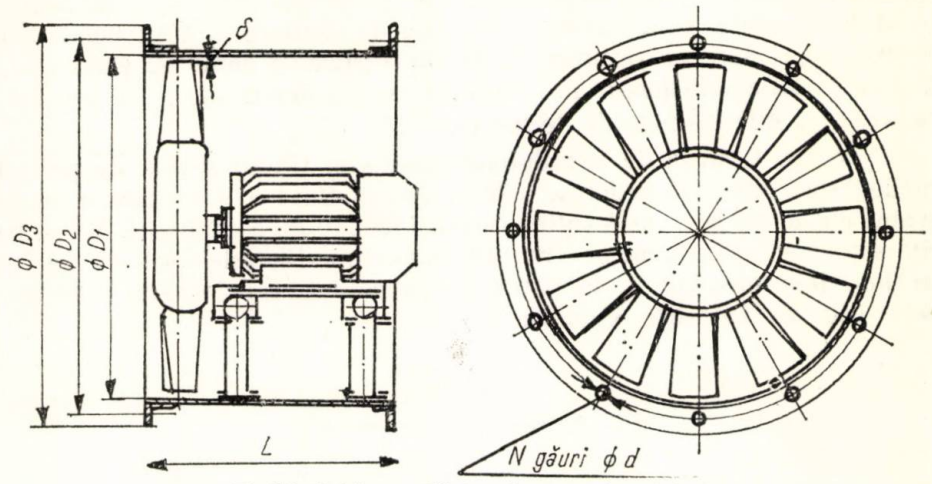


Fig. 3. Schiţa ventilatoarelor experimentate.

Tabela 1

Valorile parametrilor aerodinamici nominali şi a dimensiunilor de gabarit ale ventilatoarelor studiate

Caracteristici	TIPUL VENTILATORULUI			
	VAT 500	VAT 630	VAT 800	VAT 1000
Q m³/h	5600	10000	20000	45000
H mm H_2O	19	28	56	90
n rot/min	1500	1500	1500	1500
z_{rotor} nr. palete	12	9	12	12
P_{motor} Kw	0,75	2,2	7,5	30
D_1 mm	507	636	808	1008
D_2 mm	551	698	868	1068
D_3 mm	583	732	906	1106
L mm	330 / 430	400	500 / 630	700
d mm	11,5	14	14	14
N nr. găuri	12	16	16	16

3. CONDIŢII DE EXPERIMENTARE. NUMĂRUL DE VARIANTE STUDIATE

Ventilatoarele experimentate au fost montate în standul FVB după schema indicată în normele britanice şi belgiene de încercare a acestor maşini.

Măsurarea presiunii statice s-a efectuat în amonte şi în aval de rotor cu manometre tip ASCANIA. Determinarea debitului s-a realizat prin măsurarea repartiţiei vitezei cu tuburi Pitot în zona de aspiraţie, la ventilatorul VAT 500 şi 630, respectiv în zona de refulare la VAT 800 şi VAT 1000. În prelucrarea rezultatelor măsurătorilor de debit s-a ţinut seama de constatările menţionate în literatură asupra determinării curbei caracteristice cu diferite metode de încercări [3] — [5].

Pentru tipurile de ventilatoare studiate, ţinînd seama de posibilităţile de variaţie a tipurilor de palete, a unghiului lor de aşezare, a diametrului butucului etc. au rezultat ca posibile 480 de combinaţii. Măsurătorile s-au efectuat numai pentru 140 de combinaţii, celelalte s-au neglijat ca fiind de interes minim. Pentru exemplificare, în tabela 2 sînt prezentate cele 140 de variante studiate.

Tabela 2

Variantele de rotoare studiate

D mm.	D_b/D	n rot/min	l/t	Nr. de palete la unghiul de aşezare									
				15°		20°		25°		30°		35°	
500	0,5	1500	I	12	6	12	6	12	6	12	6	12	6
			II	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4
			III	6	4	6	4	6	4	6	4	6	4
			IV	4	—	4	—	4	—	4	—	4	—
		3000	I	12	6	12	6	12	6	12	6	12	6
			II	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4
			III	6	4	6	4	6	4	6	4	6	4
			IV	4	—	4	—	4	—	4	—	4	—
	0,63	1500	I	12	6	12	6	12	6	12	6	12	6
			II	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4
			III	6	4	6	4	6	4	6	4	6	4
			IV	4	—	4	—	4	—	4	—	4	—
		3000	I	12	6	12	6	12	6	12	6	12	6
			II	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4
			III	6	4	6	4	6	4	6	4	6	4
			IV	4	—	4	—	4	—	4	—	4	—

Încercările s-au efectuat la turaţia nominală $n = 1500$ rot/min, la turaţia dublă ($n = 3000$ rot/min) şi la $n = 1000$ rot/min.

Paletele fiind demontabile a existat posibilitatea variaţiei numărului de palete precum şi a unghiului de aşezare a acestora, θ. S-au efectuat măsurători pentru cinci unghiuri de aşezare, măsurate la periferie, $\theta = 10° \ldots 35°$, variind din 5° în 5°, pentru paletele de tip I, respectiv pentru $\theta = 10°, 20°, 25°, 30°, 37°$ pentru paletele de tip II.

Fixarea motorului electric şi a ventilatorului de tub s-a realizat după sistemul uzual, cu tălpi de tablă, precum şi cu antretoaze, sistem care are avantaje constructive şi aerodinamice (fig. 4, 5, 6).

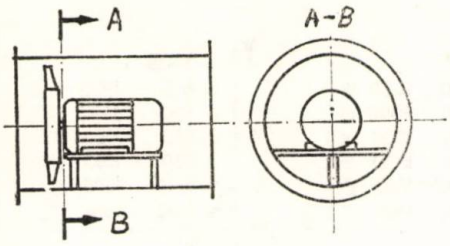


Fig. 4. Schiţa sistemului de fixare a motorului electric cu antretoaze (sistem Woods).

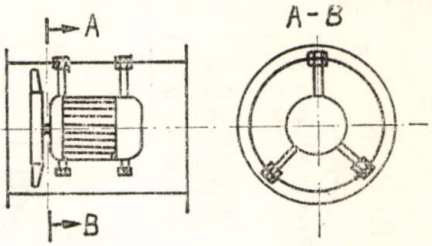


Fig. 5. Schiţa sistemului de prindere a motorului electric cu talpă şi suport unic.

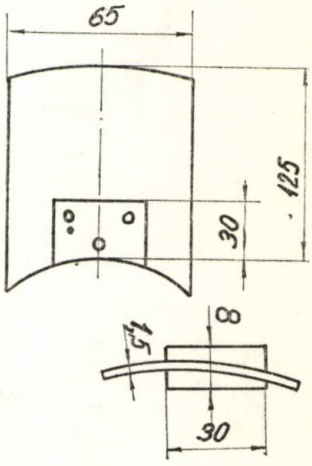


Fig. 6. Detaliu de fixare şi de rigidizare a paletei rotorice.

Rezultatele măsurătorilor s-au reprezentat grafic utilizîndu-se un sistem de coordonate adimensionale φ şi ψ, care au expresiile cunoscute

$$\varphi = \frac{4Q}{\pi D^2 U}; \quad \psi = \frac{2gH_t}{\gamma U^2}, \tag{1}$$

unde Q reprezintă debitul ventilatorului, H_t — înălţimea de refulare, D — diametrul exterior, $u = \pi Dn/60$ — viteza periferică, n — turaţia, γ — greutatea specifică a gazului vehiculat.

Calculul randamentului s-a efectuat fără a se ţine seama de energia cinetică a componentei tangenţiale a vitezei în aval de rotor. În consecinţă, randamentul care apare pe grafice este randamentul static al ventilatorului. Dacă se ţine seama şi de componenta vitezei tangenţiale, randamentul total va fi cu 10...15% mai mare [6].

4. REZULTATELE ÎNCERCĂRII VENTILATOARELOR CU PALETE DE TORSIUNE MICĂ

În figura 1 *a*, *b*, *c* sînt reprezentate paletele de tip I, cu torsiune mică, calculate prin metoda ECK [7] şi care erau utilizate la ventilatoarele din producţia curentă a FVB.

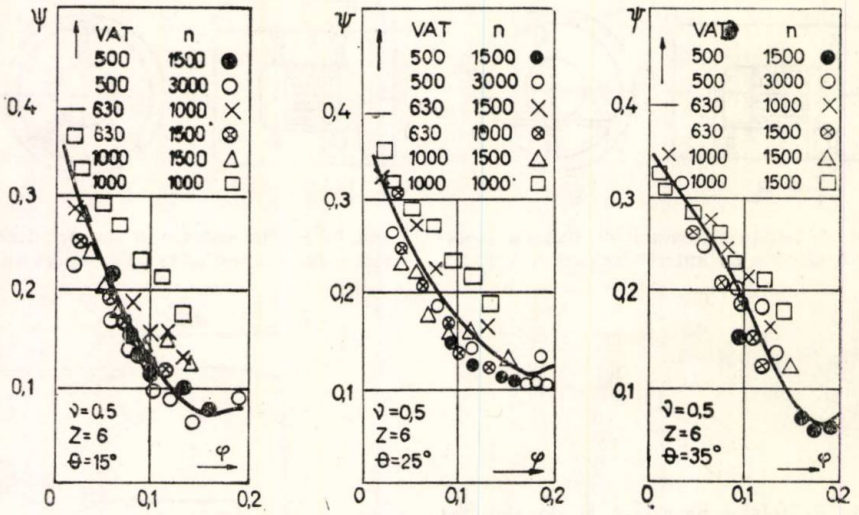


Fig. 7, a, b, c — Rezultatele măsurătorilor şi curbele caracteristice ale ventilatoarelor studiate, avînd şase palete de tip I, pentru diferite turaţii şi unghiuri de aşezare.

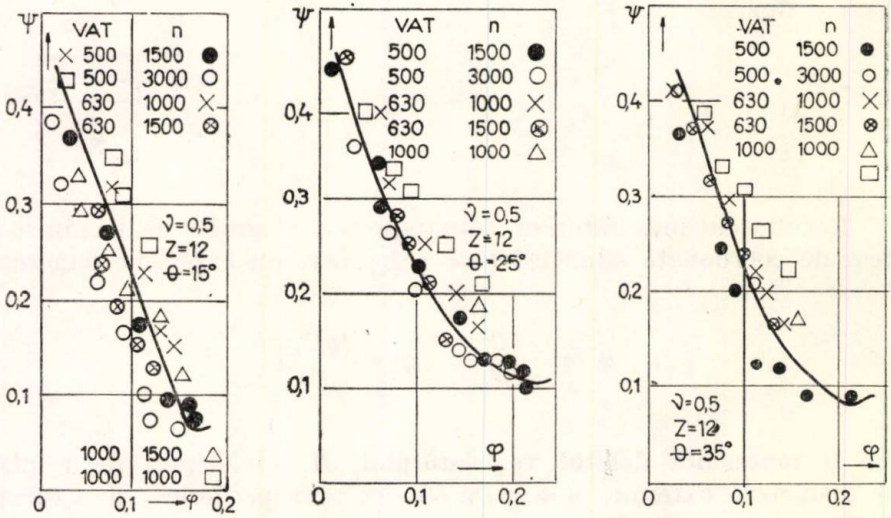


Fig. 8, a, b, c — Rezultatele măsurătorilor şi curbele caracteristice ale ventilatoarelor studiate avînd 12 palete de tip I, pentru diferite turaţii şi unghiuri de aşezare.

Rezultatele obţinute la încercare pe stand a ventilatoarelor VAT 500, VAT 630, VAT 800 şi VAT 1000 cu $\nu = 0{,}5$ şi numărul palelor rotorului $z=6$, respectiv 12, la diferite unghiuri de aşezare θ (măsurate la periferia paletelor) sînt prezentate în figurile 7...9. Întrucît randamentul

static al ventilatoarelor prevăzute cu acest tip de palete rotorice este modest ($\eta \leqslant 0{,}40$) nu s-au reprezentat decît curbele de sarcină. Experienţele au pus în evidenţă clar influenţa numărului de palete ale rotorului şi a modului de aşezare ale acestora asupra curbei de sarcină. Se observă că

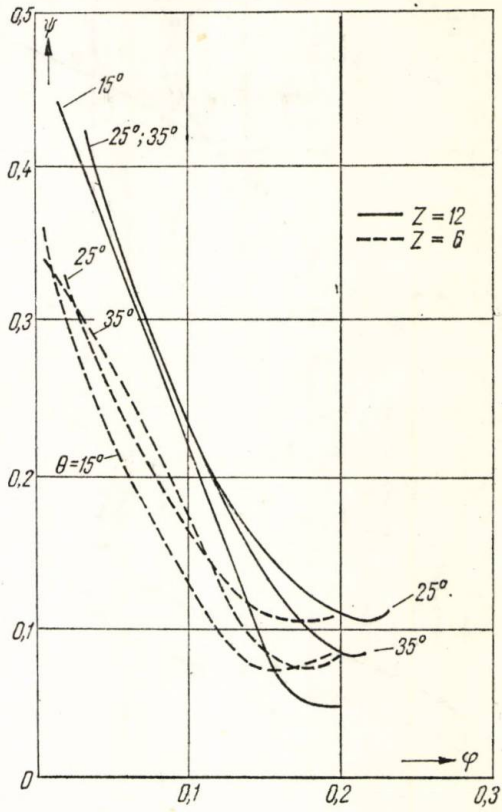


Fig. 9. Curbele caracteristice ale ventilatoarelor VAT 500, 630, 800 şi 1000 trasate pentru diferite valori ale parametrilor θ şi Z.

relaţiile de similitudine sînt respectate. Unele abateri care apar provin din cauza modificării sistemului de montare a ventilatorului pe stand şi a modului de efectuare a măsurătorilor.

Randamentul static mic al paletajului rotoric de tip I se datoreşte şi jocului radial mare ($\delta \geqslant 0{,}01\ R$) dintre extremităţile palelor şi tubul în care este montat ventilatorul. După cum se ştie [7], în acest caz randamentul scade cu 5%...10%.

Ţinînd seama de rezultatele măsurătorilor s-a pus în evidenţă în mod obiectiv şi cantitativ necesitatea proiectării unor palete rotorice mai eficace.

5. REZULTATELE ÎNCERCĂRII VENTILATOARELOR CU PALETE DE TORSIUNE MARE

Pentru aceleaşi date de calcul (Q, H), tabela 1, considerînd că profilele reţelei au scheletul format din arce de cerc, s-au determinat caracteristicile geometrice necesare ale palelor (fig. 2 *a*, *b*, *c*) utilizînd metoda preconizată de V. N. Brusilovschi şi K. Uşakov [6].

Rezultatele încercărilor experimentale ale celor patru tipuri de ventilatoare la diferite unghiuri de aşezare sînt redate în figurile 10...14.

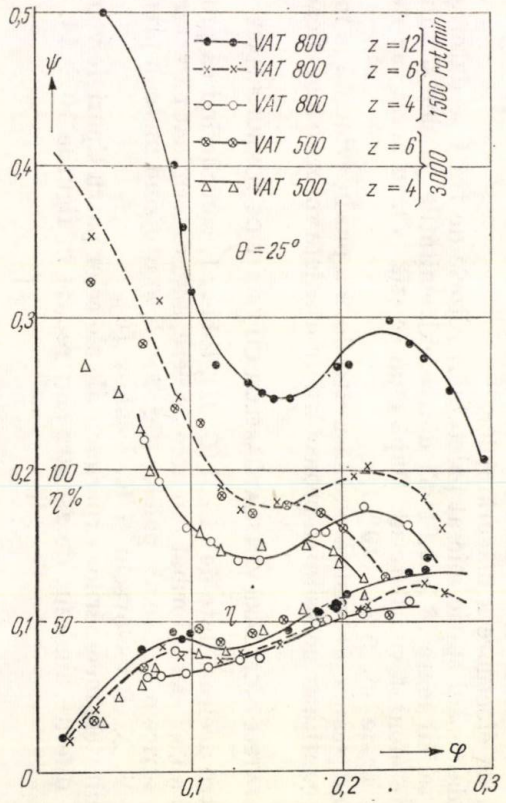


Fig. 10. Curbele caracteristice şi curbele de randament ale ventilatoarelor VAT 500 şi 800 trasate pentru valori diferite ale turaţiei şi numărului de palete rotorice, motorul electric fiind fixat prin antretoaze.

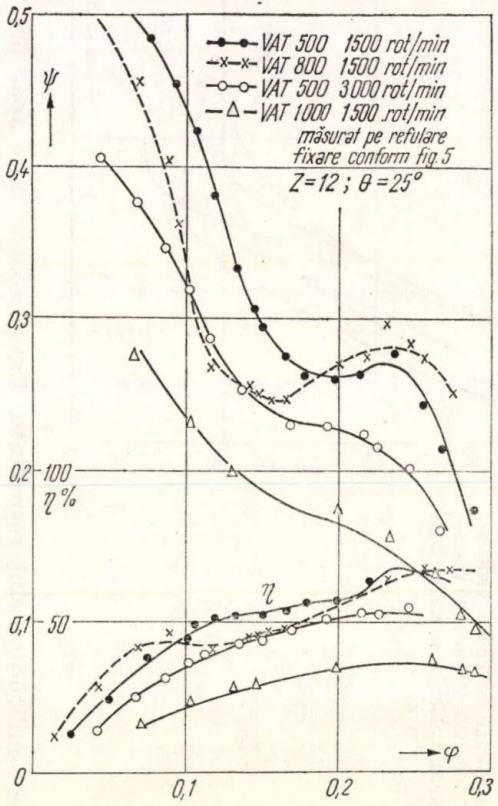


Fig. 11. Curbele caracteristice şi curbele de randament ale ventilatoarelor VAT 500, 800, 1000 pentru Z=12, θ = 25° şi cu motorul electric fixat cu talpă şi suport unic.

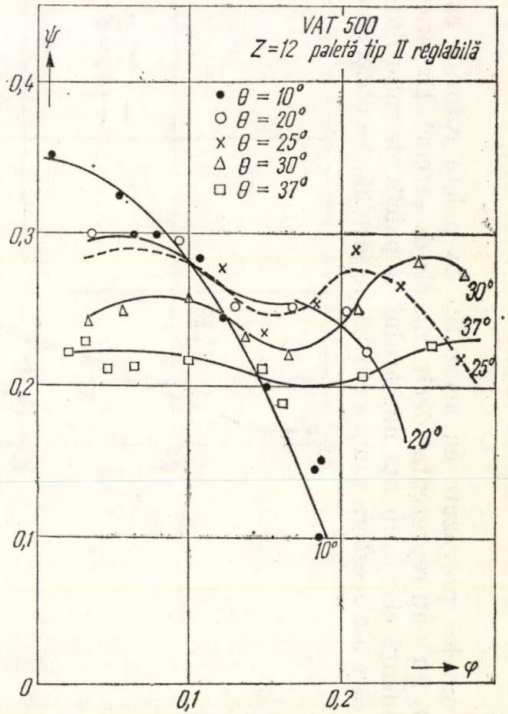


Fig. 12. Curbele caracteristice ale ventilatoarelor VAT 500 cu palete reglabile, pentru diferite unghiuri de aşezare.

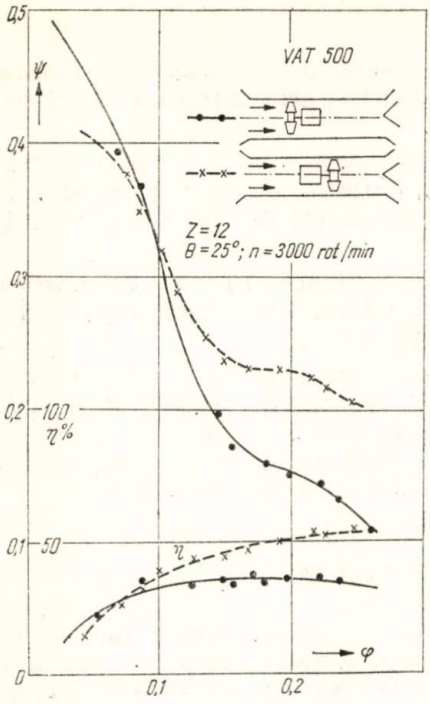


Fig. 13. Influenţa modului de aşezare a ventilatorului faţă de sensul de deplasare a gazului vehiculat asupra curbelor caracteristice şi a celor de randament.

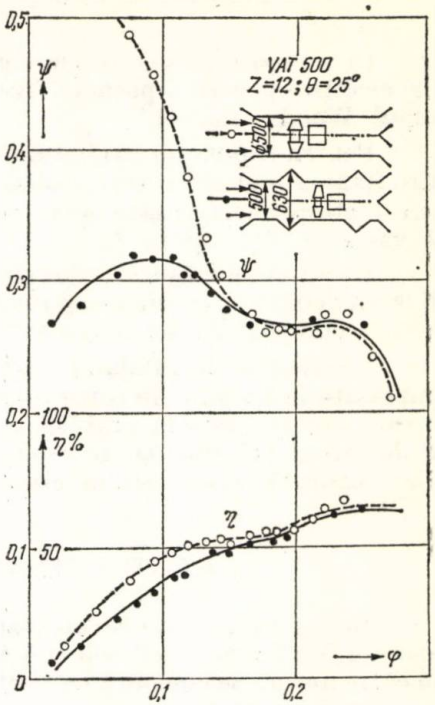


Fig. 14. Influenţa tubulaturii de măsură asupra curbelor caracteristice şi a celor de randament.

La acest tip de palete randamentul static a ajuns la 67% pentru unghiuri de aşezare (măsurate la periferia paletelor) variind între 20° — 37°.

Faţă de tipul I de palete se constată o ameliorare sensibilă a randamentului static concomitent cu creşterea coeficienţilor de debit şi presiune în domeniul randamentelor ridicate. Nu s-a putut ţine seama de efectul pe care îl dă sistemul de fixare cu şuruburi a paletei pe rotor, sistem care perturbă sensibil condiţiile de scurgere a gazului vehiculat.

O a treia serie de încercări s-a efectuat cu paletele de tip II sudate pe butuc la unghiul de 25°, rezultat ca optim din măsurători.

Prin sudarea paletelor de butuc s-a înlăturat efectul defavorabil al sistemului de fixare al paletei semnalat anterior.

Întrucît din lipsă de tuburi de măsură cu aceleaşi dimensiuni cu diametrele ventilatoarelor încercate s-a folosit şi varianta unor tuburi de diametre mai mari legate la ventilator prin piese de racordare, s-a verificat în prealabil care este influenţa perturbărilor introduse de aceste piese. În figurile 13 şi 14 sînt arătate schemele instalaţiilor de măsură şi rezultatele obţinute în cazurile respective. Se constată că la debite şi presiuni aflate în domeniul de utilizare al ventilatorului rezultatele obţinute cu cele două scheme sînt apropiate între ele (fig. 14).

5.1. INFLUENŢA MODULUI DE FIXARE A VENTILATORULUI ÎN TUB

În vederea reducerii pierderilor de sarcină s-au modificat motoarele electrice pentru a permite fixarea lor în tub prin antretoaze după sistemul Woods (fig. 4).

Pentru a pune în evidenţă care este diferenţa între un ventilator la care fixarea motorului este realizată prin antretoaze (fig. 4) şi un altul la care motorul electric este fixat pe tălpi cu suport din tablă s-a încercat şi varianta din figura 5.

Rezultatele măsurătorilor sînt redate în figurile 10 şi 11. Se constată că la un debit dat, presiunea şi randamentul diferă foarte mult după modul în care curentul de aer atacă suportul (fig. 13, 14.)

Diferenţele de randament în cazul în care suportul şi motorul sînt amplasate în amonte de rotor (amplasarea cea mai favorabilă) şi în cazul în care suportul este în aval (situaţia uzuală) sînt de peste 30%, în special în domeniul valorilor Q, H reprezentînd zona de lucru a ventilatorului, şi au tendinţă accentuată de creştere odată cu mărirea debitului.

5.2. CURBELE CARACTERISTICE ADIMENSIONALE

În figura 11 sînt redate caracteristicile adimensionale ale ventilatoarelor VAT 500, VAT 800 şi VAT 1000 cu sistemul de palete proiectat de către autor. Se constată că ventilatoarele VAT 500 şi VAT 800, care au fost măsurate în tuburi de acelaşi diametru cu ventilatorul respectiv au caracteristici destul de apropiate. Diferenţa provine din faptul că debitele s-au măsurat cu tubul Pitot şi tuburile standului de măsură nefiind perfect asemănătoare nu s-a putut asigura un cîmp de viteze identic.

Măsurătorile efectuate pe ventilatorul VAT 500 cu suport din tablă arată influenţa defavorabilă a acestuia şi, în consecinţă, pentru viitor, nu este indicat să se folosească astfel de suporţi.

În figura 9 sînt arătate caracteristicile adimensionale ale ventilatoarelor VAT 500 şi VAT 800 cu număr diferit de palete. Se constată că în domeniul debitelor mari, caracteristice ventilatorului VAT 500, capătă o alură net căzătoare. În această zonă, la ventilatorul respectiv, s-au observat zgomote anormale similare cu cele datorite vibraţiilor paletelor. Considerăm că aceste vibraţii (pentru care nu am dispus de aparatură pentru a le pune în evidenţă) contribuie la desprinderea prematură a curentului de aer de pe profilul paletei şi deci, implicit, la scăderea presiunii. Pentru atenuarea acestor vibraţii s-au rigidizat paletele prin intermediul unor table profilate (fig. 6.

Randamentul static măsurat este de 67%, deci mai mare decît în cazul utilizării tipului I de palete precum şi faţă de tipul II fixate prin şuruburi. Această valoare a randamentului static este la nivelul tehnicii actuale [7]. Randamentul total al ventilatorului poate fi sporit cu aproximativ 10% dacă se micşorează jocul radial la valori de $\delta \leqslant 0{,}001\ R$. S-a menţinut jocul radial mare ($\delta \geqslant 0{,}01\ R$) şi la prototipurile proiectate de noi pentru ca încercările ventilatoarelor cu sistemul vechi de palete şi cele cu sistemul nou să fie efectuate în aceleaşi condiţii.

Pentru producţia de serie se recomandă micşorarea jocului radial şi utilizarea unor palete rigide, profilate.

Erorile de măsură au fost de ordinul a $\pm$ 2 — 3%.

6. CONCLUZII

Încercările efectuate cu prototipurile ventilatoarelor VAT 500, VAT 630, VAT 800 şi VAT 1000 au pus în evidenţă că modificările constructive propuse şi realizate în colaborare cu serviciul constructor şef al FVB au permis obţinerea unor maşini cu caracteristici mecanice şi aerodinamice net superioare faţă de ventilatoarele omologe din producţia curentă.

Principalele rezultate obţinute sînt expuse succint în cele ce urmează :

1. Sistemul nou de palete adoptat permite sporirea randamentului static al ventilatorului cu peste 60% faţă de cel din producţia curentă, ajungîndu-se la valori apropiate de cele existente în prezent la ventilatoarele fabricate în ţările cu tehnică avansată.

2. Experienţele au permis stabilirea numărului optim de palete, desimea reţelei de profile cea mai favorabilă şi valorile corespunzătoare ale unghiului θ de aşezare a paletelor rotorului pentru a se realiza parametrii Q, H necesari ai ventilatoarelor.

3. Sistemul îmbunătăţit de prindere a motorului electric în tubul în care este introdus ventilatorul contribuie la sporirea randamentului acestuia prin micşorarea pierderilor de sarcină.

4. Curbele caracteristice trasate în coordonate adimensionale φ, ψ, şi curbele de randament static $\eta_s = \eta_s(\varphi)$ pun în evidenţă domeniul de debite şi presiuni în care ventilatoarele proiectate pot funcţiona economic. Aceste domenii sînt relativ mari şi corespund cu cele adoptate în studiul general de tipizare.

5. Dependenţa curbelor caracteristice în funcţie de turaţie este foarte apropiată de cea teoretică, ceea ce serveşte şi ca un mijloc de verificare indirectă a corectitudinii măsurătorilor efectuate.

★

Autorul mulţumeşte colectivului din serviciul constructor şef al FVB pentru sprijinul acordat în proiectarea ventilatoarelor experimentate şi pentru efectuarea măsurătorilor în stand.

Primită la redacţie la 22 decembrie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. St. Zarea, C. Ghenoiu, *Tipizarea ventilatoarelor axiale de uz general*, Bucureşti, 1967.
2. H. Marcinowski, *Optimal Problemen bei Axialventilatoren*, Heizung, Lüftung, Haustechnik, *8* (1957).
3. P. Amiard şi colab., *Détermination de caractéristiques aérauliques d'un ventilateur hélicoïde à l'aide de diverses méthodes d'essai*, Industries thermiques et aérauliques, **15**, avril (1969).

4. A. BĂRGLĂZAN, I. ANTON, V. ANTON, I. PREDA, *Încercările maşinilor hidraulice şi pneumatice*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1956.

5. ST. ZAREA, C. GHENOIU, *Metode de încercare a ventilatoarelor*, Bucureşti, 1968.

6. K. UŞAKOV, I. BURSILOVSKI, *Aerodinamika osevîh ventilatorov i elementî ih kon strukţii*, Gostehiz dat, Moscova, 1960.

7. B. ECK, *Die Ventilatoren*, Springer Verlag, Berlin, 1960.

8. Prospecte ale firmelor : Centaxial, Woods, Sirocco, Nordisk, Neu, Ventmeca, Babcock, Luwa, Turbon, Voith, Zet, Metalexport, Joy, Aerex, Meco, Sulzer, Rateau, Marelli, Storck, EKM, Siemens.

TENSIUNI ŞI DEFORMAŢII ÎNTR-UN DISC ÎN MIŞCARE DE ROTAŢIE

de VIRGIL BOGDAN
Institutul politehnic Bucureşti

În lucrare se stabileşte o funcţie potenţial din care se pot deduce expresiile tensiunilor şi deformaţiilor într-un disc în mişcare de rotaţie.
În partea a doua a lucrării se stabilesc funcţia potenţial şi expresiile tensiunilor şi deformaţiilor pentru discul cilindric. Dacă în relaţiile obţinute se presupune că grosimea discului este nulă, se obţin relaţiile cunoscute din rezistenţa materialelor stabilite în cazul discurilor subţiri în ipoteza stării plane de tensiune.

Asupra elementului de volum al unui disc axial simetric aflat în mişcare de rotaţie în jurul axei lui acţionează sistemul de forţe din figura 1, iar din condiţiile de echilibru se obţine sistemul de ecuaţii cunoscut:

$$\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \rho\,\omega^2 r = 0,$$

$$\frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} = 0\,. \tag{1}$$

În lucrarea [1] s-a arătat că se poate obţine o soluţie a problemei dacă se consideră că deplasările radiale şi axiale derivă dintr-un potenţial Φ sub forma

$$u = \frac{a}{1-2\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[(1-2\mu)\,\nabla^2 \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right],$$

$$w = -\frac{a}{1-2\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left[\nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right], \tag{2}$$

în care u este deplasarea radială, w — deplasarea axială, μ — coeficientul lui Poisson, a — o constantă arbitrară.

Sub această formă, ecuația a doua din sistemul (1) este satisfăcută de orice funcție potențial Φ. Pentru ca să fie satisfăcută și prima ecuație a sistemului (1) este necesar ca funcția Φ să satisfacă condiția

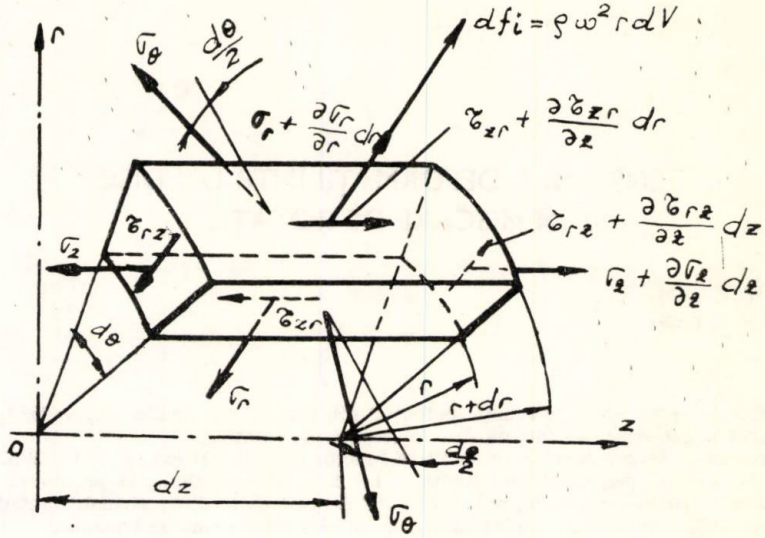


Fig. 1

$$\nabla^2\nabla^2\,\Phi = \varphi(z) - \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2(1-\mu)\,Ea}\,\rho\omega^2 r^2, \tag{3}$$

unde $\varphi(z)$ este o funcție arbitrară de variabila z,

E — modulul lui Young,

ρ — densitatea materialului discului,

ω — viteza unghiulară a discului.

În virtutea legii generalizate a lui Hooke, expresiile tensiunilor în funcție de potențialul Φ, devin:

$$\sigma_r = \frac{Ea}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left\{\mu\nabla^2\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + (1-2\mu)\nabla^2\right]\Phi\right\},$$

$$\sigma_\theta = \frac{Ea}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left\{\mu\nabla^2\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + (1-2\mu)\nabla^2\right]\Phi\right\}, \tag{4}$$

$$\sigma_z = \frac{Ea}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left\{\mu\nabla^2\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \nabla^2\right]\Phi\right\},$$

$$\tau_{rz} = \frac{Ea}{(1+\mu)(1-2\mu)}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z\partial r}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu\nabla^2\right]\Phi.$$

În lucrarea de faţă ne propunem să determinăm o funcţie potenţial Φ din care să deducem apoi expresiile deplasărilor, deformaţiilor şi tensiunilor pentru un disc axial simetric cilindric aflat în mişcare de rotaţie în jurul axei lui.

Funcţia potenţial $\Phi(r, z)$ se poate alege de forma

$$\Phi(r, z) = f_0(r) + zf_1(r) + z^2 f_2(r) + z^3 f_3(r) + z^4 f_4(r) +$$

$$+ z^5 f_5(r) + z^6 f_6(r) = \sum_{m=0}^{6} z^m f_m(r), \tag{5}$$

urmînd ca funcţiile $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_6$ să se aleagă în aşa fel încît potenţialul $\Phi(r, z)$ să satisfacă condiţia (3).

Considerînd potenţialul $\Phi(r, z)$ dat de expresia (5) rezultă imediat expresiile derivatelor lui :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = f_0' + zf_1' + z^2 f_2' + z^3 f_3' + z^4 f_4' + z^5 f_5' + z^6 f_6',$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = f_0'' + zf_1'' + z^2 f_2'' + z^3 f_3'' + z^4 f_4'' + z^5 f_5'' + z^6 f_6'', \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 2f_2 + 6zf_3 + 12z^2 f_4 + 20z^3 f_5 + 30z^4 f_6$$

şi expresia laplacianului funcţiei Φ,

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \left(f_0'' + \frac{1}{r} f_0' + 2f_2\right) + z\left(f_1'' + \frac{1}{r} f_1' +\right.$$

$$\left. + 6f_3\right) + z^2\left(f_2'' + \frac{1}{r} f_2' + 12 f_4\right) + z^3\left(f_3'' + \frac{1}{r} f_3' + 20 f_5\right) + \tag{7}$$

$$+ z^4\left(f_4'' + \frac{1}{r} f_4' + 30 f_6\right) + z^5\left(f_5'' + \frac{1}{r} f_5'\right) + z^6\left(f_6'' + \frac{1}{r} f_6'\right) =$$

$$= (\nabla^2 f_0 + 2f_2) + z(\nabla^2 f_1 + 6f_3) + z^2(\nabla^2 f_2 + 12 f_4) +$$

$$+ z^3(\nabla^2 f_3 + 20 f_5) + z^4(\nabla^2 f_4 + 30 f_6) + z^5 \nabla^2 f_5 + z^6 \nabla^2 f_6 .$$

De asemenea, se deduc imediat expresiile derivatelor laplacianului:

$$\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2\Phi = \left(f_0''' + \frac{1}{r}f_0'' - \frac{1}{r^2}f_0' + 2f_2'\right) + z\left(f_1''' + \frac{1}{r}f_1'' - \frac{1}{r^2}f_1' + 6f_3'\right) +$$

$$+ z^2\left(f_2''' + \frac{1}{r}f_2'' - \frac{1}{r^2}f_2' + 12f_4'\right) + z^3\left(f_3''' + \frac{1}{r}f_3'' - \frac{1}{r^2}f_3' +\right.$$

$$\left. + 20f_5'\right) + z^4\left(f_4''' + \frac{1}{r}f_4'' - \frac{1}{r^2}f_4' + 30f_6'\right) + z^5\left(f_5''' + \frac{1}{r}f_5'' -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{r^2}f_5'\right) + z^6\left(f_6''' + \frac{1}{r}f_6'' - \frac{1}{r^2}f_6'\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\nabla^2\Phi = \left(f_0^{IV} + \frac{1}{r}f_0''' - \frac{2}{r^2}f_0'' + \frac{2}{r^3}f_0' + 2f_2''\right) + z\left(f_1^{IV} + \frac{1}{r}f_1'' -\right.$$

$$\left. - \frac{2}{r^2}f_1'' + \frac{2}{r^3}f_1' + 6f_3''\right) + z^2\left(f_2^{IV} + \frac{1}{r}f_2''' - \frac{2}{r^2}f_2'' + \frac{2}{r^3}f_2' +\right. \tag{8}$$

$$\left. + 12f_4''\right) + z^3\left(f_3^{IV} + \frac{1}{r}f_3''' - \frac{2}{r^2}f_3'' + \frac{2}{r^3}f_3' + 20f_5''\right) +$$

$$+ z^4\left(f_4^{IV} + \frac{1}{r}f_4''' - \frac{2}{r^2}f_4'' + \frac{2}{r^3}f_4' + 30f_6''\right) + z^5\left(f_5^{IV} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{r}f_5''' - \frac{2}{r^2}f_5'' + \frac{2}{r^3}f_5'\right) + z^6\left(f_6^{IV} + \frac{1}{r}f_6''' - \frac{2}{r^2}f_6'' + \frac{2}{r^3}f_6'\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\nabla^2\Phi = 2\left(f_2'' + \frac{1}{r}f_2' + 12f_4\right) + 6z\left(f_3'' + \frac{1}{r}f_3' + 20f_5\right) + 12z^2\left(f_4'' +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{r}f_4' + 30f_6\right) + 20z^3\left(f_5'' + \frac{1}{r}f_5'\right) + 30z^4\left(f_6'' + \frac{1}{r}f_6'\right)$$

şi expresia bilaplacianului funcţiei care trebuie să satisfacă condiţia (3)

$$\nabla^2\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\nabla^2\Phi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2\Phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\nabla^2\Phi = \left[f_0^{IV} + \frac{2}{r}f_0''' - \frac{1}{r^2}f_0'' +\right.$$

$$+\frac{1}{r^3}f_0'+4\left(f_2''+\frac{1}{r}f_2'\right)+24f_4\Big]+z\Big[f_1^{IV}+\frac{2}{r}f_1'''-\frac{1}{r^2}f_1''+$$

$$+\frac{1}{r^3}f_1'+12\left(f_3''+\frac{1}{r}f_3'\right)+120f_5\Big]+z^2\Big[f_2^{IV}+\frac{2}{r}f_2'''-$$

$$-\frac{1}{r^2}f_2''+\frac{1}{r^3}f_2'+24\left(f_4''+\frac{1}{r}f_4'\right)+360f_6\Big]+z^3\Big[f_3^{IV}+ \qquad (9)$$

$$+\frac{2}{r}f_3'''-\frac{1}{r^2}f_3''+\frac{1}{r^3}f_3'+40\left(f_5''+\frac{1}{r}f_5'\right)\Big]+z^4\Big[f_4^{IV}+$$

$$+\frac{2}{r}f_4'''-\frac{1}{r^2}f_4''+\frac{1}{r^3}f_4'+60\left(f_6''+\frac{1}{r}f_6'\right)\Big]+z^5\Big[f_5^{IV}+$$

$$+\frac{2}{r}f_5'''-\frac{1}{r^2}f_5''+\frac{1}{r^3}f_5'\Big]+z^6\Big[f_6^{IV}+\frac{2}{r}f_6'''-\frac{1}{r^2}f_6''+$$

$$+\frac{1}{r^3}f_6'\Big]=\varphi(z)-\alpha^2r^2,$$

în care, cu α^2 s-a notat expresia

$$\alpha^2=\frac{(1+\mu)\ (1-2\mu)}{2(1-\mu)Ea}\ \rho\ \omega^2 \qquad (10)$$

din relaţia (3).

Întrucît condiţia (3) trebuie să fie satisfăcută identic, din relaţia (9) rezultă condiţiile :

$$f_6^{IV}+\frac{2}{r}f_6'''-\frac{1}{r^2}f_6''+\frac{1}{r^3}f_6'=\nabla^2\nabla^2f_6=K_6,$$

$$f_5^{IV}+\frac{2}{r}f_5'''-\frac{1}{r^2}f_5''+\frac{1}{r^3}f_5'=\nabla^2\nabla^2f_5=K_5,$$

$$f_4^{IV}+\frac{2}{r}f_4'''-\frac{1}{r^2}f_4''+\frac{1}{r^3}f_4'+60\left(f_6''+\frac{1}{r}f_6'\right)=\nabla^2\nabla^2f_4+60\nabla^2f_6=K_4,$$

$$f_3^{IV}+\frac{2}{r}f_3'''-\frac{1}{r^2}f_3''+\frac{1}{r^3}f_3'+40\left(f_5''+\frac{1}{r}f_5'\right)=\nabla^2\nabla^2f_3+40\nabla^2f_5=K_3,$$

$$f_2^{IV} + \frac{2}{r} f_2''' - \frac{1}{r^2} f_2'' + \frac{1}{r^3} f_2' + 24\left(f_4'' + \frac{1}{r} f_4'\right) + 360 f_6 =$$

$$= \nabla^2 \nabla^2 f_2 + 24 \nabla^2 f_4 + 360 f_6 = K_2,$$

$$f_1^{IV} + \frac{2}{r} f_1''' - \frac{1}{r^2} f_1'' + \frac{1}{r^3} f_1' + 12\left(f_3'' + \frac{1}{r} f_3'\right) + 120 f_5 = \tag{11}$$

$$= \nabla^2 \nabla^2 f_1 + 12 \nabla^2 f_3 + 120 f_5 = K_1,$$

$$f_0^{IV} + \frac{2}{r} f_0''' - \frac{1}{r^2} f_0'' + \frac{1}{r^3} f_0' + 4\left(f_2'' + \frac{1}{r} f_2'\right) + 24 f_4 =$$

$$= \nabla^2 \nabla^2 f_0 + 4\nabla^2 f_3 + 24 f_4 = K_0 - \alpha^2 r^2,$$

în care

$$\nabla^2 f = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right) f, \; ; \; \nabla^2 \nabla^2 f = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right) \nabla^2 f,$$

$K_6, K_5, \ldots, K_0$ sînt constante care conduc la expresia

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = \varphi(z) - \alpha^2 r^2 = K_0 + K_1 z + K_2 z^2 + K_3 z^3 + \tag{12}$$

$$K_4 z^4 + K_5 z^5 + K_6 z^6 - \alpha^2 r^2,$$

obţinîndu-se pentru funcţia $\varphi(z)$ o expresie polinomială.

Ecuaţiile de tip Euler din sistemul (11) au soluţiile:

$$f_6 = A_6 + B_6 r^2 + C_6 \ln r + D_6 r^2 \ln r + \frac{K_6}{64} r^4,$$

$$f_5 = A_5 + B_5 r^2 + C_5 \ln r + D_5 r^2 \ln r + \frac{K_5}{64} r^4,$$

$$f_4 = A_4 + B_4 r^2 + C_4 \ln r + D_4 r^2 \ln r - \frac{15}{8}(2B_6 - D_6) r^4 +$$

$$+ \frac{K_4}{64} r^4 - \frac{15}{4} D_6 r^4 \ln r - \frac{5}{192} K_6 r^6,$$

$$f_3 = A_3 + B_3 r^2 + C_3 \ln r + D_3 r^2 \ln r - \frac{5}{4}(2B_5 - D_5) r^4 +$$

$$+ \frac{K_3}{64} r^4 - \frac{5}{2} D_5 r^4 \ln r - \frac{5}{288} K_5 r^6,$$

$$f_2 = A_2 + B_2 r^2 + C_2 \ln r + D_2 r^2 \ln r - \frac{3}{4}(2B_4 - D_4) r^4 -$$

$$- \frac{45}{16}(2A_6 - 3C_6) r^4 + \frac{K_2}{64} r^4 - \frac{3}{2}\left(D_4 + \frac{15}{4} C_6\right) r^4 \ln r + \quad (13)$$

$$+ \frac{5}{16}(6B_6 - 5D_6) r^6 - \frac{K_4}{96} r^6 + \frac{15}{8} D_6 r^6 \ln r + \frac{15}{2048} K_6 r^8,$$

$$f_1 = A_1 + B_1 r^2 + C_1 \ln r + D_1 r^2 \ln r - \frac{3}{8}(2B_3 - D_3) r^4 -$$

$$- \frac{15}{16}(2A_5 - 3C_5) r^4 + \frac{K_1}{64} r^4 - \frac{3}{8}(2D_3 + 5C_5) r^4 \ln r +$$

$$+ \frac{5}{48}(6B_5 - 5D_5) r^6 - \frac{K_3}{192} r^6 + \frac{5}{8} D_5 r^6 \ln r + \frac{5}{2048} K_5 r^8,$$

$$f_0 = A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r - \frac{1}{8}(2B_2 - D_2) r^4 -$$

$$- \frac{3}{16}(2A_4 - 3C_4) r^4 + \frac{K_0}{64} r^4 - \frac{1}{8}(2D_2 + 3C_4) r^4 \ln r +$$

$$+ \frac{1}{48}(6B_4 - 5D_4) r^6 + \frac{5}{48}(6A_6 - 11C_6) r^6 - \frac{K_2}{576} r^6 -$$

$$- \frac{\alpha^2}{576} r^6 + \frac{1}{8}(D_4 + 5C_6) r^6 \ln r - \frac{5}{768}(12B_6 - 13D_6) r^8 +$$

$$+ \frac{K_4}{2048} r^8 - \frac{5}{64} D_6 r^8 \ln r - \frac{K_6}{5120} r^{10},$$

unde $A_6, B_6, \ldots, D_6, K_6, A_5, B_5, \ldots, D_5, K_5, \ldots, A_0, B_0, \ldots, D_0, K_0$ sînt constante arbitrare. Dintre acestea, constantele A_0, B_0, C_0, A_2, A_1, C_1, A_3.

nu intervin în expresiile deplasărilor şi tensiunilor şi ca atare se va considera că

$$A_0 = B_0 = C_0 = A_2 = A_1 = C_1 = A_3 = 0.$$

Se poate scrie acum expresia potenţialului $\Phi(r,z)$, avînd forma expresiei (5) şi satisfăcînd condiţia (3) în care pentru funcţia $\varphi(z)$ s-a ales un polinom :

$$\begin{aligned}
\Phi(r, z) = {} & D_0 r^2 \ln r - \frac{1}{8}(2B_2 - D_2) r^4 - \frac{3}{16}(2A_4 - 3C_4) r^4 + \\
& + \frac{K_0}{64} r^4 - \frac{1}{8}(2D_2 + 3C_4) r^4 \ln r + \frac{1}{48}(6B_4 - 5D_4) r^6 + \\
& + \frac{5}{48}(6A_6 - 11C_6) r^6 - \frac{K_2}{576} r^6 - \frac{\alpha^2}{576} r^6 + \frac{1}{8}(D_4 + 5C_6) r^6 \ln r - \\
& - \frac{5}{768}(12B_6 - 13D_6) r^8 + \frac{K_4}{2048} r^8 - \frac{5}{64} D_6 r^8 \ln r - \frac{K_6}{5120} r^{10} + \\
& + z\left[B_1 r^2 + D_1 r^2 \ln r - \frac{3}{8}(2B_3 - D_3) r^4 - \frac{15}{16}(2A_5 - 3C_5) r^4 + \right. \\
& + \frac{K_1}{64} r^4 - \frac{3}{8}(2D_3 + 5C_5) r^4 \ln r + \frac{5}{48}(6B_5 - 5D_5) r^6 - \qquad (14) \\
& \left. - \frac{K_3}{192} r^6 + \frac{5}{8} D_5 r^6 \ln r + \frac{5}{2048} K_5 r^8 \right] + \\
& + z^2\left[B_2 r^2 + C_2 \ln r + D_2 r^2 \ln r - \frac{3}{4}(2B_4 - D_4) r^4 - \right. \\
& - \frac{45}{16}(2A_6 - 3C_6) r^4 + \frac{K_2}{64} r^4 - \frac{3}{2}\left(D_4 + \frac{15}{4} C_6\right) r^4 \ln r + \\
& \left. + \frac{5}{16}(6B_6 - 5D_6) r^6 - \frac{K_4}{96} r^6 + \frac{15}{8} D_6 r^6 \ln r + \frac{15}{2048} K_6 r^8 \right] + \\
& + z^3\left[B_3 r^2 + C_3 \ln r + D_3 r^2 \ln r - \frac{5}{4}(2B_5 - D_5) r^4 + \frac{K_3}{64} r^4 - \right. \\
& \left. - \frac{5}{2} D_5 r^4 \ln r - \frac{5}{288} K_5 r^6 \right] +
\end{aligned}$$

$$+z^4\left[A_4+B_4r^2+C_4\ln r+D_4r^2\ln r-\frac{15}{8}(2B_6-D_6)r^4+\right.$$

$$\left.+\frac{K_4}{64}r^4-\frac{15}{4}D_6r^4\ln r-\frac{5}{192}K_6r^6\right]+$$

$$+z^5\left[A_5+B_5r^2+C_5\ln r+D_5r^2\ln r+\frac{K_5}{64}r^4\right]+$$

$$+z^6\left[A_6+B_6r^2+C_6\ln r+D_6r^2\ln r+\frac{K_6}{64}r^4\right].$$

Expresiile deplasărilor radiale şi axiale u şi w, deduse din funcţia potenţial (14) cu ajutorul relaţiilor (2) sînt:

$$u=\frac{a}{1-2\mu}\left\{4(1-2\mu)\frac{D_0}{r}+4(1-\mu)\frac{C_2}{r}+4\mu(2B_2+D_2)r-\right.$$

$$-6(1-2\mu)(2A_4-C_4)r+\frac{1}{2}(1-2\mu)K_0r+$$

$$+8\mu D_2r\ln r-12(1-2\mu)C_4r\ln r-\frac{3}{2}(1+2\mu)(4B_4-$$

$$-D_4)r^3-\frac{45}{2}\mu(4A_6-5C_6)r^3+\frac{1}{4}\mu K_2r^3-\frac{1}{4}(1-2\mu)\alpha^2r^3-$$

$$-6(1+2\mu)D_4r^3\ln r-90\mu C_6r^3\ln r-\frac{1}{16}(1+2\mu)K_4r^5+$$

$$+5(1+\mu)(3B_6-2D_6)r^5+15(1+\mu)D_6r^5\ln r+\frac{5}{64}(1+\mu)K_6r^7+$$

$$+z\left[4(1-2\mu)\frac{D_1}{r}+12(1-\mu)\frac{C_3}{r}+24\mu B_3r-30(1-\right.$$

$$-2\mu)(2A_5-C_5)r+12\mu D_3r+\frac{1}{2}(1-2\mu)K_1r+24\mu D_3r\ln r-$$

$$-60(1-2\mu)C_5r\ln r-30(1+2\mu)B_5r^3+\frac{15}{2}(1+2\mu)D_5r^3+$$

$$+\frac{3}{4}\mu K_3 r^3 - 30(1+2\mu) D_5 r^3 \ln r - \frac{5}{16}(1+2\mu) K_5 r^5\Big] +$$

$$+ z^2\Big[4(1-2\mu)\frac{D_2}{r} + 24(1-\mu)\frac{C_4}{r} + 24\mu(2B_4 + D_4) r +$$

$$+\frac{1}{2}(1-2\mu) K_2 r - 90(1-2\mu)(2A_6 - C_6) r - 180(1-2\mu) C_6 r \ln r +$$

$$+\frac{3}{2}\mu K_4 r^3 + 48\mu D_4 r \ln r - 90(1+2\mu) B_6 r^3 + \frac{45}{2}(1+2\mu) D_6 r^3 -$$

$$- 90(1+2\mu) D_6 r^3 \ln r - \frac{15}{16}(1+2\mu) K_6 r^5\Big] + z^3\Big[4(1-2\mu)\frac{D_3}{r} +$$

$$+ 40(1-\mu)\frac{C_5}{r} + 80\mu B_5 r + 40\mu D_5 r + \frac{1}{2}(1-2\mu) K_3 r +$$

$$+ 80\mu D_5 r \ln r + \frac{5}{2}\mu K_5 r^3\Big] + z^4\Big[4(1-2\mu)\frac{D_4}{r} + 60(1-\mu)\frac{C_6}{r} +$$

$$+ 60\mu(2B_6 + D_6) r + \frac{1}{2}(1-2\mu) K_4 r + 120\mu D_6 r \ln r + \tag{15}$$

$$+\frac{15}{4}\mu K_6 r^3\Big] + z^5\Big[4(1-2\mu)\frac{D_5}{r} + \frac{1}{2}(1-2\mu) K_5 r\Big] +$$

$$+ z^6\Big[4(1-2\mu)\frac{D_6}{r} + \frac{1}{2}(1-2\mu) K_6 r\Big]\Big\},$$

$$w = -\frac{a}{1-2\mu}\Big\{4B_1 + 4D_1 + 4D_1 \ln r - 12B_3 r^2 - 30(A_5 - C_5) r^2 +$$

$$+\frac{K_1}{4} r^2 - 6(2D_3 + 5C_5) r^2 \ln r + \frac{45}{4}(2B_5 - D_5) r^4 - \frac{3}{16} K_3 r^4 +$$

$$+\frac{45}{2} D_5 r^4 \ln r + \frac{5}{32} K_5 r^6 + z\Big[8B_2 + 8D_2 + 8D_2 \ln r - 48B_4 r^2 -$$

$$- 180(A_6 - C_6) r^2 + \frac{K_2}{2} r^2 - 48D_4 r^2 \ln r - 180C_6 r^2 \ln r +$$

$$+\frac{135}{2}(2B_6 - D_6)r^4 - \frac{3}{4}K_4r^4 + 135D_6r^4\ln r + \frac{15}{16}K_6r^6\Big] +$$

$$+ z^2\Big[12B_3 + 12D_3 + 12D_3\ln r - 120B_5r^2 + \frac{3}{4}K_3r^2 - 120D_5r^2\ln r -$$

$$-\frac{15}{8}K_5r^4\Big] + z^3\Big[16B_4 + 16D_4 + 16D_4\ln r - 240B_6r^2 + K_4r^2 -$$

$$-240D_6r^2\ln r - \frac{15}{4}K_6r^4\Big] + z^4\Big[20B_5 + 20D_5 + 20D_5\ln r + \frac{5}{4}K_5r^2\Big] +$$

$$+ z^5\Big[24B_6 + 24D_6 + 24D_6\ln r + \frac{3}{2}K_6r^2\Big]\Big\}. \qquad (15)$$

Din expresiile deplasărilor u şi w se pot deduce expresiile deformaţiilor specifice :

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{a}{1-2\mu}\Big\{-4(1-2\mu)\frac{D_0}{r^2} - 4(1-\mu)\frac{C_2}{r^2} + 8\mu B_2 + 12\mu D_2 -$$

$$-12(1-2\mu)A_4 - 6(1-2\mu)C_4 + \frac{1}{2}(1-2\mu)K_0 + 8\mu D_2\ln r -$$

$$-12(1-2\mu)C_4\ln r - 18(1+2\mu)B_4r^2 - \frac{3}{2}(1+2\mu)D_4r^2 -$$

$$-270\mu A_6r^2 + \frac{495}{2}\mu C_6r^2 + \frac{3}{4}\mu K_2r^2 - \frac{3}{4}(1-2\mu)\alpha^2r^2 -$$

$$-18(1+2\mu)D_4r^2\ln r - 270\mu C_6r^2\ln r - \frac{5}{16}(1+2\mu)K_4r^4 +$$

$$+75(1+\mu)B_6r^4 - 35(1+\mu)D_6r^4 + 75(1+\mu)D_6r^4\ln r +$$

$$+\frac{35}{64}(1+\mu)K_6r^6 + z\Big[-4(1-2\mu)\frac{D_1}{r^2} - 12(1-\mu)\frac{C_3}{r^2} + 24\mu B_3 +$$

$$+36\mu D_3 - 30(1-2\mu)(2A_5 + C_5) + \frac{1}{2}(1-2\mu)K_1 + 24\mu D_3\ln r -$$

$$- 60(1-2\mu)\,C_5 \ln r - 90(1+2\mu)\,B_5 r^2 - \frac{15}{2}(1+2\mu)\,D_5 r^2 +$$

$$+ \frac{9}{4}\,\mu K_3 r^2 - 90(1+2\mu)\,D_5 r^2 \ln r - \frac{25}{16}(1+2\mu)\,K_5 r^4\Big] +$$

$$+ z^2\Big[-4(1-2\mu)\frac{D_2}{r^2} - 24(1-\mu)\frac{C_4}{r^2} + 48\mu B_4 + 72\mu D_4 +$$

$$+ \frac{1}{2}(1-2\mu)\,K_2 - 90(1-2\mu)(2A_6 + C_6) -$$

$$- 180(1-2\mu)\,C_6 \ln r + 48\mu D_4 \ln r - 270(1+2\mu)\,B_6 r^2 -$$

$$- \frac{45}{2}(1+2\mu)\,D_6 r^2 + \frac{9}{2}\,\mu K_4 r^2 - 270(1+2\mu)\,D_6 r^2 \ln r -$$

$$- \frac{75}{16}(1+2\mu)\,K_6 r^4\Big] + z^3\Big[-4(1-2\mu)\frac{D_3}{r^2} - 40(1-\mu)\frac{C_5}{r^2} +$$

$$+ 80\mu B_5 + 120\mu D_5 + \frac{1}{2}(1-2\mu)\,K_3 + 80\mu D_5 \ln r + \frac{15}{2}\,\mu K_5 r^4\Big] +$$

$$+ z^4\Big[-4(1-2\mu)\frac{D_4}{r^2} - 60(1-\mu)\frac{C_6}{r^2} + 120\mu B_6 + 180\mu D_6 +$$

$$+ \frac{1}{2}(1-2\mu)\,K_4 + 120\mu D_6 \ln r + \frac{45}{4}\,\mu K_6 r^2\Big] + z^5\Big[-4(1-2\mu)\frac{D_5}{r^2} +$$

$$+ \frac{1}{2}(1-2\mu K_5\Big] + z^6\Big[-4(1-2\mu)\frac{D_6}{r^2} + \frac{1}{2}(1-2\mu)\,K_6\Big]\Big\},$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{a}{1-2\mu}\Big\{4(1-2\mu)\frac{D_0}{r^2} + 4(1-\mu)\frac{C_2}{r^2} + 4\mu(2B_2 + D_2) -$$

$$- 6(1-2\mu)(2A_4 - C_4) + \frac{1}{2}(1-2\mu)\,K_0 + 8\mu D_2 \ln r - 12(1-$$

$$- 2\mu)\,C_4 \ln r - \frac{3}{2}(1+2\mu)(4B_4 - D_4)\,r^2 - \frac{45}{2}\,\mu(4A_6 - 5C_6)\,r^2 +$$

$$+\frac{1}{4}\mu K_2 r^2-\frac{1}{4}(1-2\mu)\alpha^2 r^2-6(1+2\mu)D_4 r^2\ln r-$$

$$-90\mu C_6 r^2\ln r-\frac{1}{16}(1+2\mu)K_4 r^4+5(1+\mu)(3B_6-2D_6)r^4+$$

$$+15(1+\mu)D_6 r^4\ln r+\frac{5}{64}(1+\mu)K_6 r^6+z\left[4(1-2\mu)\frac{D_1}{r^2}+\right.$$

$$+12(1-\mu)\frac{C_3}{r^2}+24\mu B_3-30(1-2\mu)(2A_5-C_5)+$$

$$+12\mu D_3+\frac{1}{2}(1-2\mu)K_1+24\mu D_3\ln r-60(1-2\mu)C_5\ln r-$$

$$-30(1+2\mu)B_5 r^2+\frac{15}{2}(1+2\mu)D_5 r^2+\frac{3}{4}\mu K_3 r^2-30(1+$$

$$\left.+2\mu)D_5 r^2\ln r-\frac{5}{16}(1+2\mu)K_5 r^4\right]+z^2\left[4(1-2\mu)\frac{D_2}{r^2}+\right.$$

$$+24(1-\mu)\frac{C_4}{r^2}+24\mu(2B_4+D_4)+\frac{1}{2}(1-2\mu)K_2-$$

$$-90(1-2\mu)(2A_6-C_6)-180(1-2\mu)C_6\ln r+48\mu D_4\ln r-$$

$$-90(1+2\mu)B_6 r^2+\frac{45}{2}(1+2\mu)D_6 r^2+\frac{3}{2}\mu K_4 r^2-$$

$$\left.-90(1+2\mu)D_6 r^2\ln r-\frac{15}{16}(1+2\mu)K_6 r^4\right]+z^3\left[4(1-2\mu)\frac{D_3}{r^2}+\right.$$

$$+40(1-\mu)\frac{C_5}{r^2}+80\mu B_5+40\mu D_5+\frac{1}{2}(1-2\mu)K_3+$$

$$\left.+80\mu D_5\ln r+\frac{5}{2}\mu K_5 r^2\right]+z^4\left[4(1-2\mu)\frac{D_4}{r^2}+60(1-\mu)\frac{C_6}{r^2}+\right.$$

$$+60\mu(2B_6+D_6)+\frac{1}{2}(1-2\mu)K_4+120\mu D_6\ln r+$$

$$\left.+\frac{15}{4}\mu K_6 r^2\right]+z^5\left[4(1-2\mu)\frac{D_5}{r^2}+\frac{1}{2}(1-2\mu)K_5\right]+$$

$$+ z^6\left[4(1-2\mu)\frac{D_6}{r^2}+\frac{1}{2}(1-2\mu)K_6\right]\Bigg\},$$

$$\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{a}{1-2\mu}\Bigg\{8B_2+8D_2+8D_2\ln r-48B_4r^2-$$

$$-180(A_6-C_6)\,r^2+\frac{K_2}{2}r^2-48D_4\,r^2\ln r-180\,C_6r^2\ln r+$$

$$+\frac{135}{2}(2B_6-D_6)\,r^4-\frac{3}{4}K_4\,r^4+135\,D_6\,r^4\ln r+\frac{15}{16}K_6\,r^6+$$

$$+z\left[24\,B_3+24D_3+24\,D_3\ln r-240B_5\,r^2+\frac{3}{2}\,K_3\,r^2-240\,D_5\,r^2\ln r-\right.$$

$$\left.-\frac{15}{4}\,K_6\,r^4\right]+z^2\left[48B_4+48D_4+48D_4\ln r-720B_6\,r^2+3K_4\,r^2-\right.$$

$$\left.-720D_6r^2\ln r-\frac{45}{4}\,K_6\,r^4\right]+$$

$$+z^3\,[80\,B_5+80\,D_5+80\,D_5\,\ln r+5\,K_5\,r^2]+$$

$$+z^4\left[120\,B_6+120\,D_6+120\,D_6\ln r+\frac{15}{2}\,K_6\,r^2\right]\Bigg\}, \qquad (16)$$

$$\gamma_{rz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{a}{1-2\mu}\Bigg\{-8\mu\frac{D_1}{r}+12(1-\mu)\frac{C_3}{r}+$$

$$+12(1+\mu)(2B_3+D_3)\,r+60\,\mu\,(2A_5-C_5)\,r-\mu\,K_1\,r+$$

$$+24(1+\mu)\,D_3r\,\ln r+120\,\mu\,C_5r\ln r-15(2+\mu)(4\,B_5-D_5)\,r^3+$$

$$+\frac{3}{4}(1+\mu)\,K_3\,r^3-60(2+\mu)\,D_5\,r^3\ln r-\frac{5}{8}(2+\mu)\,K_5\,r^5+$$

$$+z\left[-16\,\mu\frac{D_2}{r}+48(1-\mu)\frac{C_4}{r}+48(1+\mu)(2B_4+D_4)\,r+\right.$$

$$+360\,\mu\,(2A_6-C_6)r-2\mu\,K_2\,r+96(1+\mu)\,D_4\,r\ln r+$$

$$+720\,\mu\,C_6\,r\ln r-90(2+\mu)(4B_6-D_6)\,r^3-$$

$$\left.-360(2+\mu)\,D_6\,r^3\ln r-\frac{15}{4}(2+\mu)\,K_6r^5+3(1+\mu)\,K_4\,r^3\right]+$$

$$+ z^2\left[- 24\mu \frac{D_3}{r} + 120\,(1-\mu)\frac{C_5}{r} + 120\,(1+\mu)\,(2B_5 + D_5)\,r - 3\mu K_3 r + \right.$$

$$\left. + 240\,(1+\mu)\,D_5\, r \ln r + \frac{15}{2}(1+\mu)\,K_5 r^3 \right] +$$

$$+ z^3\left[- 32\,\mu \frac{D_4}{r} + 240\,(1-\mu)\frac{C_6}{r} + 240\,(1+\mu)\,(2B_6 + D_6)\,r - \right.$$

$$\left. - 4\mu K_4 r + 480\,(1+\mu)\,D_6\, r \ln r + 15\,(1+\mu)\,K_6 r^3 \right] +$$

$$+ z^4\left[- 40\,\mu \frac{D_5}{r} - 5\mu K_5 r \right] +$$

$$\left. + z^5\left[- 48\,\mu \frac{D_6}{r} - 6\mu K_6 r \right] \right\}, \tag{16}$$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = \frac{a}{1-2\mu}\{1-2\mu\}\{ - 8B_2 - 8D_2 - 24\,A_4 +$$

$$+ K_0 - 8D_2 \ln r - 24\,C_4 \ln r + 24\,B_4 r^2 + 180\,A_4 r^2 -$$

$$- 180\,C_6 r^2 - \frac{1}{2} K_2 r^2 - \alpha^2 r^2 + 24\,D_4 r^2 \ln r +$$

$$+ 180\,C_6 r^2 \ln r - 45\,B_6 r^4 + \frac{45}{2} D_6 r^4 - 45\,D_6 r^4 \ln r -$$

$$- \frac{5}{16} K_6 r^6 + \frac{3}{8} K_4 r^4 + \tag{17}$$

$$+ z\left[- 24\,B_3 - 120\,A_5 - 24\,D_3 + K_1 - 24\,D_3 \ln r - 120\,C_5 \ln r + \right.$$

$$\left. + 120\,B_5 r^2 - \frac{3}{2} K_3 r^2 + 120\,D_5 r^2 \ln r + \frac{15}{8} K_5 r^4 \right] +$$

$$+ z^2\left[- 48\,B_4 - 48\,D_4 + K_2 - 360\,A_6 - 48\,D_4 \ln r - 360\,C_6 \ln r + \right.$$

$$\left. + 360\,B_6 r^2 - 3\,K_4 r^2 + 360\,D_6 r^2 \ln r + \frac{45}{8} K_6 r^4 \right] +$$

$$+ z^3 [- 80B_5 - 80 D_5 + K_3 - 80 D_5 \ln r - 5 K_5 r^4] +$$

$$+ z^4 \left[- 120 B_6 - 120 D_6 - 120 D_6 \ln r + K_4 - \frac{15}{2} K_6 r^2 \right] +$$

$$+ z^5 [K_5] + z^6 [K_6]\}.$$

În sfîrşit, expresiile tensiunilor σ_r, σ_θ, σ_z, τ_{rz} devin,

$$\sigma_r = \frac{E}{1+\mu} \left\{ \varepsilon_r + \frac{\mu}{1-2\mu} \varepsilon_v \right\} =$$

$$= \frac{Ea}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left\{ \frac{1}{2} K_0 + 4\mu D_2 - 12 A_4 - 6(1-2\mu) C_4 - \right.$$

$$- 4(1-\mu) \frac{C_2}{r^2} - 4(1-2\mu) \frac{D_0}{r^2} - 12 C_4 \ln r - 6 B_4 (3+2\mu) r^2 -$$

$$- \frac{3}{2} (1+2\mu) D_4 r^2 - 90\mu A_6 r^2 + \frac{135}{2} \mu C_6 r^2 + \frac{1}{4} \mu K_2 r^2 -$$

$$- \frac{1}{4} (3-2\mu) \alpha^2 r^2 - 6(3+2\mu) D_4 r^2 \ln r - 90 \mu C_6 r^2 \ln r +$$

$$+ 15 (5+2\mu) B_6 r^4 - \frac{5}{2} (14+5\mu) D_6 r^4 - \frac{1}{16} (5+4\mu) K_4 r^4 +$$

$$+ 15 (5+2\mu) D_6 r^4 \ln r + \frac{5}{64} (7+3\mu) K_6 r^6 + \qquad (18)$$

$$+ z \left[\frac{1}{2} K_1 + 12\mu D_3 - 60 A_5 - 30 (1-2\mu) C_5 - 4(1-2\mu) \frac{D_1}{r^2} - \right.$$

$$- 12 (1-\mu) \frac{C_3}{r^2} - 60 C_5 \ln r - 30 (3+2\mu) B_5 r^2 -$$

$$- \frac{15}{2} (1+2\mu) D_5 r^2 + \frac{3}{4} \mu K_3 r^2 - 30 (3+2\mu) D_5 r^2 \ln r -$$

$$\left. - \frac{5}{16} (5+4\mu) K_5 r^4 \right] + z^2 \left[\frac{1}{2} K_2 + 24\mu D_4 - 180 A_6 - 90 (1-2\mu) C_6 - \right.$$

$$\left. - 4(1-2\mu) \frac{D_2}{r^2} - 24(1-\mu) \frac{C_4}{r^2} - 180 C_6 \ln r - 90(3+2\mu) B_6 r^2 - \right.$$

$$-\frac{45}{2}(1+2\mu)\,D_6 r^2+\frac{3}{2}\mu K_4 r^2-$$

$$-90\,(3+2\mu)\,D_6 r^2\ln r-\frac{15}{16}(5+4\mu)\,K_6 r^4\Big]+$$

$$+z^3\left[\frac{1}{2}K_3+40\,\mu D_5-40\,(1-\mu)\frac{C_5}{r^2}-4\,(1-2\mu)\,\frac{D_3}{r^2}+\frac{5}{2}\,\mu K_5 r^2\right]+$$

$$+z^4\left[\frac{1}{2}K_4+60\mu D_6-4(1-2\mu)\frac{D_4}{r^2}-60\,(1-\mu)\frac{C_6}{r^2}+\frac{15}{4}\,\mu\,K_6 r^2\right]+$$

$$+z^5\left[\frac{1}{2}K_5-4(1-2\mu)\frac{D_5}{r^2}\right]+$$

$$+z^6\left[\frac{1}{2}K_6-4\,(1-2\mu)\frac{D_6}{r^2}\right]\Big\},$$

$$\sigma_\theta=\frac{E}{1+\mu}\left\{\varepsilon_\theta+\frac{\mu}{1-2\mu}\,\varepsilon_v\right\}=$$

$$=\frac{Ea}{(1+\mu)(1-2\mu)}\Big\{\frac{1}{2}K_0-4\mu D_2-12A_4+6(1-2\mu)\,C_4+4(1-2\mu)\frac{D_0}{r^2}+ \tag{18}$$

$$+4(1-\mu)\frac{C_2}{r^2}-12C_4\ln r-6\,(1-2\mu)\,B_4 r^2+\frac{3}{2}(1+2\mu)\,D_4 r^2+$$

$$+90\mu A_6 r^2-\frac{135}{2}\,\mu C_6 r^2-\frac{1}{4}\,\mu\,K_2 r^2-\frac{1}{4}(1+2\mu)\,\alpha^2 r^2-$$

$$-6(1-2\mu)\,D_4 r^2\ln r+90\,\mu\,C_6 r^2\ln r+15\,(1-2\mu)B_6 r^4-$$

$$-\frac{5}{2}\,(4-5\mu)\,D_6 r^4-\frac{1}{16}\,(1-4\mu)\,K_4 r^4+$$

$$+15\,(1-2\mu)\,D_6 r^4\ln r+\frac{5}{64}(1-3\mu)\,K_6 r^6+$$

$$+z\left[\frac{1}{2}K_1-12\,\mu D_3-60\,A_5+30\,(1-2\mu)\,C_5+4(1-2\mu)\frac{D_1}{r^2}+\right.$$

$$+12\,(1-\mu)\frac{C_3}{r^2}-60C_5\ln r-30(1-2\mu)\,B_5\,r^2+$$

$$+\frac{15}{2}D_5\,(1+2\mu)\,r^2-\frac{3}{4}\,\mu\,K_3\,r^2-30\,(1-2\mu)\,D_5\,r^2\ln r-$$

$$-\frac{5}{16}(1-4\mu)\,K_5 r^4\Big]+$$

$$+z^2\Big[\frac{1}{2}K_2-24\,\mu\,D_4-180\,A_6+90\,(1-2\mu)\,C_6+4(1-2\mu)\frac{D_2}{r^2}+$$

$$+24\,(1-\mu)\frac{C_4}{r^2}-180\,C_6\ln r-90\,(1-2\mu)\,B_6\,r^2+$$

$$+\frac{45}{2}(1+2\mu)\,D_6\,r^2-\frac{3}{2}\,\mu\,K_4\,r^2-90\,(1-2\mu)\,D_6\,r^2\ln r-$$

$$-\frac{15}{16}(1-4\mu)\,K_6\,r^4\Big]+$$

$$+z^3\Big[\frac{1}{2}K_3-40\,\mu\,D_5+4(1-2\mu)\frac{D_3}{r^2}+40\,(1-\mu)\frac{C_5}{r^2}-\frac{5}{2}\,\mu\,K_5\,r^2\Big]+$$

$$+z^4\Big[\frac{1}{2}K_4-60\,\mu\,D_6+4\,(1-2\mu)\frac{D_4}{r^2}+60\,(1-\mu)\,\frac{C_6}{r^2}-\frac{15}{4}\,\mu\,K_6\,r^2\Big]+$$

$$+z^5\Big[\frac{1}{2}K_5+4\,(1-2\mu)\frac{D_5}{r^2}\Big]+$$

$$+z^6\Big[\frac{1}{2}K_6+4\,(1-2\mu)\frac{D_6}{r^2}\Big]\Big\},$$

$$\sigma_z=\frac{E}{1+\mu}\Big\{\varepsilon_z+\frac{\mu}{1-2\mu}\,\varepsilon_v\Big\}=$$

$$=\frac{Ea}{(1+\mu)(1-2\mu)}\Big\{-8(1+\mu)\,(B_2+D_2)-24\mu A_4+\mu K_0-$$

$$-8(1+\mu)\,D_2\ln r+24\,(2+\mu)\,B_4 r^2-24\,\mu\,C_4\ln r+$$

$$+180(1+\mu)(A_6-C_6)r^2-\frac{1}{2}(1+\mu)K_2r^2-\mu\alpha^2r^2+$$

$$+24(2+\mu)D_4r^2\ln r+180(1+\mu)C_6r^2\ln r-$$

$$-\frac{45}{2}(3+\mu)(2B_6-D_6)r^4+\frac{3}{8}(2+\mu)K_4r^4-$$

$$-45(3+\mu)D_6r^4\ln r-\frac{5}{16}(3+\mu)K_6r^6+$$

$$+z\Big[-24(1+\mu)(B_3+D_3+D_3\ln r)+120(2+\mu)B_5r^2- \tag{18}$$

$$-120\mu(A_5+C_5\ln r)+\mu K_1-\frac{3}{2}(1+\mu)K_3r^2+$$

$$+120(2+\mu)D_5r^2\ln r+\frac{15}{8}(2+\mu)K_5r^4\Big]+$$

$$+z^2\Big[-48(1+\mu)(B_4+D_4+D_4\ln r)+360(2+\mu)(B_6r^2+$$

$$+D_6r^2\ln r)-360\mu(A_6+C_6\ln r)+\mu K_2-$$

$$-3(1+\mu)K_4r^2+\frac{45}{8}(2+\mu)K_6r^4\Big]+$$

$$+z^3[-80(1+\mu)(B_5+D_5+D_5\ln r)+\mu K_3-5(1+\mu)K_5r^2]+$$

$$+z^4\Big[-120(1+\mu)(B_6+D_6+D_6\ln r)+\mu K_4-\frac{15}{2}(1+\mu)K_6r^2\Big]+$$

$$+\mu K_5z^5+\mu K_6z^6\Big\},$$

$$\tau_{rz}=\frac{E}{2(1+\mu)}\left\{\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right\}=$$

$$= \frac{Ea}{(1+\mu)(1-2\mu)} \Bigg\{ -4\mu \frac{D_1}{r} + 6(1-\mu)\frac{C_3}{r} + 12(1+\mu)B_3 r +$$

$$+ 60\,\mu A_5 r - \frac{1}{2}\mu K_1 r + 60\mu C_5 r \ln r + 12(1+\mu) D_3 r \ln r +$$

$$+ 6(1+\mu) D_3 r - 30\mu C_5 r - 30(2+\mu)(D_5 r^3 \ln r + B_5 r^3) +$$

$$+ \frac{15}{2}(2+\mu) D_5 r^3 + \frac{3}{8}(1+\mu) K_3 r^3 - \frac{5}{16}(2+\mu) K_5 r^5 +$$

$$+ z\Bigg[-8\mu \frac{D_2}{r} + 24(1-\mu)\frac{C_4}{r} + 24(1+\mu)(2B_4 + D_4) r +$$

$$+ 360\mu(A_6 r + C_6 r \ln r) - 180\,\mu C_6 r - \mu K_2 r +$$

$$+ 48(1+\mu) D_4 r \ln r - 180(2+\mu)(B_6 r^3 + D_6 r^3 \ln r) +$$

$$+ 45(2+\mu) D_6 r^3 + \frac{3}{2}(1+\mu) K_4 r^3 - \frac{15}{8}(2+\mu) K_6 r^5 \Bigg] +$$

$$+ z^2\Bigg[-12\mu \frac{D_3}{r} + 60(1-\mu)\frac{C_5}{r} + 120(1+\mu) B_5 r - \frac{3}{2}\mu K_3 r +$$

$$+ 120(1+\mu) D_5 r \ln r + 60(1+\mu) D_5 r + \frac{15}{4}(1+\mu) K_5 r^3 \Bigg] +$$

$$+ z^3\Bigg[-16\mu \frac{D_4}{r} + 120(1-\mu)\frac{C_6}{r} + 120(1+\mu)(2B_6 + D_6) r - 2\mu K_4 r +$$

$$+ 240(1+\mu) D_6 r \ln r + \frac{15}{2}(1+\mu) K_6 r^3 \Bigg] +$$

$$+ z^4\Bigg[-20\mu \frac{D_5}{r} - \frac{5}{2}\mu K_5 r \Bigg] + z^5\Bigg[-24\,\mu \frac{D_6}{r} - 3\mu K_6 r \Bigg] \Bigg\}.$$

Starea de tensiune şi deformaţie se deduce din relaţiile (15)...(18) urmînd ca să se determine constantele A, B, C,...,K din condiţiile la limită.

STĂRILE DE DEFORMAŢIE ŞI TENSIUNE DINTR-UN DISC CILINDRIC

Ca aplicaţie a formulelor de mai sus se determină stările de tensiune şi deformaţie dintr-un disc circular (fig. 2) avînd dimensiunile : raza exterioară R_2, raza interioară R_1 şi lăţimea $2b$.

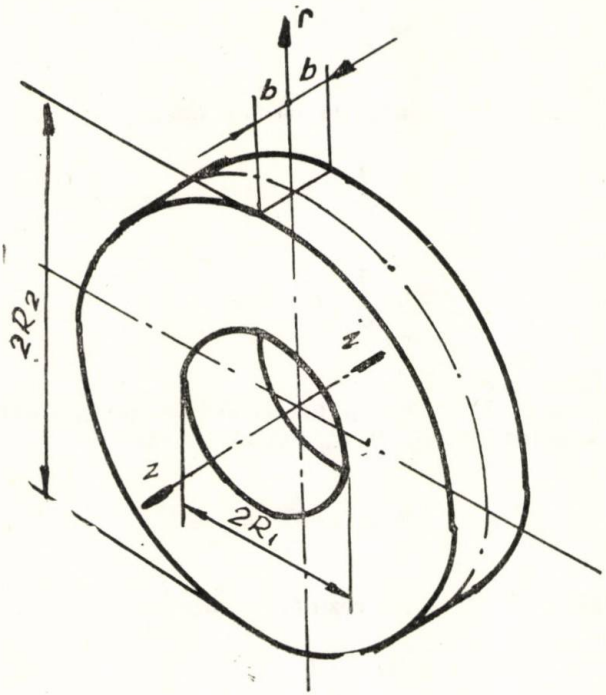


Fig. 2

Condiţiile la limită din care se determină constantele A_4, A_5, A_6, B_1, $B_2,\ldots,B_6$, C_2, $C_3,\ldots,C_6$, D_0, $D_1,\ldots,D_6$, K_0, $K_1,\ldots,K_6$ din relaţiile (14), (15)—(18) pentru cazul discului din figura 2 sînt

$$z = \pm b \Rightarrow \tau_{rz} = \sigma_z \equiv 0,$$

$$\left.\begin{aligned} r &= R_1 \\ r &= R_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tau_{rz} = \sigma_r \equiv 0. \tag{19}$$

Introducînd condiţia

$$\left.\begin{aligned} r &= R_1 \\ r &= R_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tau_{rz} \equiv 0,$$

în expresia tensiunii tangenţiale τ_{rz} din relaţiile (18) şi punînd condiţiile ca fiecare din coeficienţii termenilor z^5, z^4, z^3, z^2, z^1, z° să fie nuli se obţin următoarele condiţii :

— Din condiția ca factorul termenului z^5 să fie nul se deduc relațiile

$$\begin{aligned} -24\mu\frac{D_6}{R_1} - 3\mu R_1 K_6 &= 0, \\ -24\mu\frac{D_6}{R_2} - 3\mu R_2 K_6 &= 0. \end{aligned} \tag{a}$$

Sistemul omogen (a) are soluții ne banale dacă

$$\begin{vmatrix} -24\mu\dfrac{1}{R_1} & -3\mu R_1 \\ -24\mu\dfrac{1}{R_2} & -3\mu R_2 \end{vmatrix} = 0,$$

adică, dacă, $R_1 = R_2$.

Deci, în cazul unui disc cu pereți subțiri pentru care $R_1 \approx R_2 \approx \approx R_{med}$. între constantele D_6 și K_6 există relația

$$D_6 = -\frac{K_6}{8} R_{med}^2 .$$

Dacă se consideră că $R_1 \neq R_2$ rezultă condițiile

$$D_6 = K_6 = 0. \tag{20}$$

— Din condiția ca factorul termenului z^4 să fie nul se deduce sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} -20\mu\frac{D_5}{R_1} - \frac{5}{2}\mu R_1 K_5 &= 0, \\ -20\mu\frac{D_5}{R_2} - \frac{5}{2}\mu R_2 K_5 &= 0, \end{aligned} \tag{b}$$

din care rezultă că pentru discul cu pereți subțiri

$$D_5 = -\frac{K_5}{8} R_{med}^2 ,$$

iar pentru discul a cărui grosime nu este neglijabilă,

$$D_5 = K_5 = 0. \tag{21}$$

— Din condiţia ca factorul termenului z^3 să fie nul şi din condiţiile (20) se obţine sistemul de ecuaţii

$$-16\mu\frac{D_4}{R_1}+240(1+\mu)R_1B_6-2\mu R_1K_4+120(1-\mu)\frac{C_6}{R_1}=0,$$

$$-16\mu\frac{D_4}{R_2}+240(1+\mu)R_2B_6-2\mu R_2K_4+120(1-\mu)\frac{C_6}{R_2}=0, \tag{c}$$

care, după simplificare şi multiplicare cu R_1, respectiv cu R_2, poate fi pus sub forma

$$60(1-\mu)C_6-8\mu D_4+120(1+\mu)R_1^2B_6-\mu R_1^2K_4=0,$$

$$60(1-\mu)C_6-8\mu D_4+120(1+\mu)R_2^2B_6-\mu R_2^2K_4=0. \tag{c'}$$

Prin scăderea celor două ecuaţii rezultă ecuaţiile

$$120(1+\mu)B_6-\mu K_4=0,$$

$$60(1-\mu)C_6-8\mu D_4=0, \tag{c''}$$

din care se deduc condiţiile

$$K_4=120\frac{1+\mu}{\mu}B_6,$$

$$D_4=\frac{15}{2}\cdot\frac{1-\mu}{\mu}C_6. \tag{22}$$

— Din condiţia că factorul termenului z^2 să fie nul şi din condiţiile (21) se obţine sistemul de ecuaţii

$$-12\mu\frac{D_3}{R_1}+60(1-\mu)\frac{C_5}{R_1}+120(1+\mu)R_1B_5-\frac{3}{2}\mu R_1K_3=0,$$

$$-12\mu\frac{D_3}{R_2}+60(1-\mu)\frac{C_5}{R_2}+120(1+\mu)R_2B_5-\frac{3}{2}\mu R_2K_3=0, \tag{d}$$

din care, în mod analog, se deduc ecuaţiile

$$\begin{aligned} 80\,(1+\mu)\,B_5 - \mu K_3 &= 0, \\ 40\,(1-\mu)\,C_5 - 8\mu D_3 &= 0 \end{aligned} \tag{d'}$$

şi rezultă condiţiile

$$\begin{aligned} K_3 &= 80\,\frac{1+\mu}{\mu}\,B_5\,, \\ D_3 &= 5\,\frac{1-\mu}{\mu}\,C_5. \end{aligned} \tag{23}$$

— Din condiţia ca factorul termenului z^1 să fie nul şi din condiţiile (20) şi (22) se obţine sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned} &-8\mu\frac{D_2}{R_1} + 24\,(1-\mu)\frac{C_4}{R_1} + 48\,(1+\mu)\,R_1 B_4 + 24\,(1-\mu)\frac{15}{2}\cdot\frac{1-\mu}{\mu}\,R_1 C_6 + \\ &+ 360\,\mu R_1 A_6 + 360\mu R_1 \ln R_1 C_6 - 180\mu R_1 C_6 - \\ &- \mu R_1 K_2 + 48\,(1+\mu)\,\frac{15}{2}\cdot\frac{1-\mu}{\mu}\,R_1 \ln R_1 C_6 - \\ &- 180\,(2+\mu)\,R_1^3 B_6 + \frac{3}{2}\,(1+\mu)\,120\,\frac{1+\mu}{\mu}\,R_1^3 B_6 = 0, \\ &-8\mu\frac{D_2}{R_2} + 24\,(1-\mu)\frac{C_4}{R_2} + 48\,(1+\mu)\,R_2 B_4 + \\ &+ 24\,(1-\mu)\,\frac{15}{2}\cdot\frac{1-\mu}{\mu}\,R_2 C_6 + 360\mu R_2 A_6 + 360\mu R_2 \ln R_2 C_6 - \\ &- 180\,\mu R_2 C_6 - \mu R_2 K_2 + 48\,(1+\mu)\,\frac{15}{2}\cdot\frac{1-\mu}{\mu}\,R_2 \ln R_2\,C_6 - \\ &- 180\,(2+\mu)\,R_2^3 B_6 + \frac{2}{3}\,(1+\mu)\,120\,\frac{1+\mu}{\mu}\,R_2^3 B_6 = 0. \end{aligned} \tag{e}$$

După înmulţirea cu R_1, respectiv cu R_2 şi efectuarea simplificărilor, sistemul de ecuaţii (e) devine

$$[-8\mu D_2 + 24(1-\mu)\,C_4] + \Big[48(1+\mu)\,B_4 + 360\mu A_6 + \\ + 180\,\frac{1-2\mu^2}{\mu}\,C_6 - \mu K_2\Big]\,R_1^2 + \frac{360}{\mu}\,R_1^2 \ln R_1\,C_6 + \frac{180}{\mu}\,R_1^4 B_6 = 0,$$

$$[-8\mu D_2 + 24(1-\mu)\,C_4] + \Big[48(1+\mu)\,B_4 + 360\mu A_6 + \\ + 180\,\frac{1-2\mu^2}{\mu}\,C_6 - \mu K_2\Big]\,R_2^2 + \frac{360}{\mu}\,R_2^2 \ln R_2 C_6 + \frac{180}{\mu}\,R_2^4 B_6 = 0. \qquad (e')$$

— Din condiţia ca factorul termenului z^0 să fie nul şi din condiţiile (21), (23), şi (d) se obţine sistemul de ecuaţii:

$$-4\mu\,\frac{D_1}{R_1} + 6(1-\mu)\,\frac{C_3}{R_1} + 12(1+\mu)\,R_1 B_3 + 60\mu R_1 A_5 - \frac{1}{2}\,\mu R_1 K_1 + \\ + 60\mu R_1 \ln R_1 C_5 + 12(1+\mu)\,5\,\frac{1-\mu}{\mu}\,R_1 \ln R_1 C_5 + \\ + 6(1+\mu)\,5\,\frac{1-\mu}{\mu}\,R_1 C_5 - 30\mu R_1 C_5 - 30(2+\mu)\,R_1^3 B_5 + \\ + \frac{3}{8}(1+\mu)\,80\,\frac{1+\mu}{\mu}\,R_1^3 B_5 = 0,$$

$$-4\mu\,\frac{D_1}{R_2} + 6(1-\mu)\,\frac{C_3}{R_2} + 12(1+\mu)\,R_2 B_3 + 60\mu R_2 A_5 - \\ - \frac{1}{2}\,\mu R_2 K_1 + 60\mu R_2 \ln R_2 C_5 + 12(1+\mu)\,5\,\frac{1-\mu}{\mu}\,R_2 \ln R_2 C_5 + \\ + 6(1+\mu)\,5\,\frac{1-\mu}{\mu}\,R_2 C_5 - 30\mu R_2 C_5 - 30(2+\mu)\,R_2^3 B_5 + \\ + \frac{3}{8}(1+\mu)\,80\,\frac{1+\mu}{\mu}\,R_2^3 B_5 = 0. \qquad (f)$$

După înmulțirea cu R_1 respectiv cu R_2 și efectuarea simplificărilor, sistemul de ecuații (f) devine;

$$[-4\mu D_1 + 6(1-\mu)\, C_3] + \left[12(1+\mu)\, B_3 + 60\mu A_5 + \frac{30}{\mu} C_5 - \frac{1}{2}\mu K_1\right] R_1^2 + \\ + \frac{60}{\mu} R_1^2 \ln R_1 C_5 + \frac{30}{\mu} R_1^4 B_5 = 0,$$

$$[-4\mu D_1 + 6(1-\mu)\, C_3] + \left[12(1+\mu)\, B_3 + 60\mu A_5 + \frac{30}{\mu} C_5 - \frac{1}{2}\mu K_1\right] R_2^2 + \\ + \frac{60}{\mu} R_2^2 \ln R_2 C_5 + \frac{30}{\mu} R_2^4 B_5 = 0. \qquad (f')$$

Introducînd acum în expresia tensiunii τ_{rz} din relațiile (18) condiția

$$z = \pm b \Rightarrow \tau_{rz} \equiv 0$$

din relațiile (19), punînd condițiile ca fiecare din coeficienții termenilor r^5, $r^3 \ln r$, r^3, $r^1 \ln r$, r^1 și r^{-1} să fie nuli și ținînd seama de condițiile (20)—(23) rezultă în continuare următoarele relații:

— din condițiile (20) și (21) rezultă că factorii termenilor r^5 și $r^3 \ln r$ sînt nuli;

— din condiția ca factorul termenului r^3 să fie nul și din condițiile (20)—(23) se deduce sistemul de ecuații

$$-30(2+\mu)\, B_5 + \frac{3}{8}(1+\mu)\, 80 \frac{1+\mu}{\mu} B_5 \mp \\ \mp 180(2+\mu)\, bB_6 \pm \frac{3}{2}(1+\mu)\, 120 \frac{1+\mu}{\mu} bB_6 = 0, \qquad (g)$$

din care, prin adunare și scădere, se obțin condițiile

$$B_5 = B_6 = K_3 = K_4 = 0; \qquad (24)$$

— din condiția ca factorul termenului $r^1 \ln r$ să fie nul se deduc ecuațiile

$$60\mu C_5 + 12(1+\mu)\, 5 \frac{1-\mu}{\mu} C_5 \pm 360\mu b C_6 \pm 48(1+\mu) \frac{15}{2} \cdot \frac{1-\mu}{\mu} C_6 = 0, \qquad (h)$$

din care, prin adunare şi scădere, rezultă condiţiile

$$C_5 = C_6 = D_3 = D_4 = 0\,; \tag{25}$$

— din condiţia ca factorul termenului r^1 să fie nul se deduc ecuaţiile

$$12(1+\mu)\,B_3 + 60\mu A_5 - \frac{1}{2}\mu K_1 \pm 48(1+\mu)\,bB_4 \pm 360\mu bA_6 \mp \mu bK_2 = 0, \quad \text{(i)}$$

din care, prin adunare şi scădere, se deduc condiţiile

$$\begin{aligned} 12(1+\mu)\,B_3 + 60\mu A_5 - \frac{1}{2}\mu K_1 &= 0, \\ 48(1+\mu)\,B_4 + 360\mu A_6 - \mu K_2 &= 0\,; \end{aligned} \tag{26}$$

— în sfîrşit, din condiţia ca factorul termenului r^{-1} să fie nul se deduc ecuaţiile

$$-4\mu D_1 + 6(1-\mu)\,C_3 \mp 8\mu bD_2 \pm 24(1-\mu)\,bC_4 = 0, \quad \text{(j)}$$

care, prin adunare şi scădere, capătă forma

$$\begin{aligned} -4\mu D_1 + 6(1-\mu)\,C_3 &= 0, \\ -8\mu D_2 + 24(1-\mu)\,C_4 &= 0. \end{aligned} \tag{j'}$$

Din aceste ecuaţii rezultă relaţiile

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{3}{2}\,\frac{1-\mu}{\mu}\,C_3, \\ D_2 &= 3\,\frac{1-\mu}{\mu}\,C_4. \end{aligned} \tag{27}$$

Ecuaţiile (e') şi (f') sînt satisfăcute prin condiţiile (24)—(27). Dacă sînt îndeplinite condiţiile de mai sus rezultă

$$\tau_{rz} \equiv 0,$$

adică, dacă discul cilindric se roteşte liber în jurul axei lui, direcţiile principale ale stării de tensiune sînt: direcţia axială, direcţia radială şi direcţia tangenţială corespunzătoare elementului din fig. (1).

Introducînd aceste condiţii în expresia tensiunii normale σ_z din relaţiile (18) aceasta devine

$$\sigma_z = \frac{Ea}{(1+\mu)(1-2\mu)}\Big[-8(1+\mu)B_2 - 24\mu A_4 + \mu K_0 - \\ - 24\frac{1-\mu^2}{\mu}C_4 - \frac{24}{\mu}C_4 \ln r + \left(24B_4 + 180A_6 - \frac{1}{2}K_2 - \mu\alpha^2\right) r^2\Big]. \tag{28}$$

Introducînd în expresia (28) condiţia

$$z = \pm b \Rightarrow \sigma_z = 0,$$

cuprinsă în relaţiile (19) şi punînd condiţiile ca fiecare din coeficienţii termenilor r^0, $r^0 \ln r$ şi r^2 să fie nuli, se determină condiţiile

$$24B_4 + 180A_6 - \frac{1}{2}K_2 - \mu\alpha^2 = 0,$$

$$C_4 = D_2 = 0, \tag{29}$$

$$-8(1+\mu)B_2 - 24\mu A_4 + \mu K_0 = 0.$$

Din relaţiile (26) şi (29) se deduc condiţiile

$$B_4 = -\frac{\mu^2\alpha^2}{24},$$

$$360A_6 - K_2 = 2\mu(1+\mu)\alpha^2. \tag{30}$$

Introducînd condiţiile de mai sus în expresia tensiunilor radiale σ_r, din relaţiile (18) se obţine

$$\sigma_r = \frac{Ea}{(1+\mu)(1-2\mu)}\Big\{-4(1-2\mu)\frac{D_0}{r^2} - 4(1-\mu)\frac{C_2}{r^2} + 4\frac{1+\mu}{\mu}B_2 - \\ - \frac{1-\mu}{4}(3+\mu)\alpha^2 r^2 + 12\frac{1+\mu}{\mu}B_3 z - 6\frac{1-\mu}{\mu}\frac{C_3}{r^2}z - \mu(1+\mu)\alpha^2 z^2\Big\}. \tag{31}$$

Dacă se pun acum în expresia (24) ultimele dintre condiţiile (19),

$$\left.\begin{aligned} r &= R_1 \\ r &= R_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sigma_r \equiv 0,$$

se obţin ecuaţiile

$$-4(1-2\mu)\frac{D_0}{R_1^2} - 4(1-\mu)\frac{C_2}{R_1^2} + 4\frac{1+\mu}{\mu}B_2 - \frac{1-\mu}{4}(3+\mu)\alpha^2 R_1^2 +$$

$$+ 12\frac{1+\mu}{\mu}B_3 z - 6\frac{1-\mu}{\mu}\frac{C_3}{R_1^2}z - \mu(1+\mu)\alpha^2 z^2 = 0,$$

$$-4(1-2\mu)\frac{D_0}{R_2^2} - 4(1-\mu)\frac{C_2}{R_2^2} + 4\frac{1+\mu}{\mu}B_2 - \frac{1-\mu}{4}(3+\mu)\alpha^2 R_2^2 + k +$$

$$+ 12\frac{1+\mu}{\mu}B_3 z - 6\frac{1-\mu}{\mu}\frac{C_3}{R_2^2}z - \mu(1+\mu)\alpha^2 z^2 = 0.$$

Din condiţia ca factorul termenului z^2 să fie nul se deduce $\alpha^2 = 0$, adică, ţinînd seama de relaţia (10), problema admite soluţii numai dacă viteza de rotaţie a discului este nulă ($\omega = 0$).

În cele ce urmează se deduce o soluţie aproximativă a problemei, introducînd în locul condiţiei

$$\left.\begin{aligned} r &= R_1 \\ r &= R_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sigma_r \equiv 0$$

o condiţie de medie şi anume, condiţia ca suma tensiunilor radiale în lungul unei generatoare de contur să fie nule. Această condiţie se exprimă sub forma

$$S = \left[\int_{-b}^{+b} \sigma_r \, dz\right]_{R_1; R_2} = \frac{Ea}{(1+\mu)(1-2\mu)} \int_{-b}^{+b} \Big[-4(1-2\mu)\frac{D_0}{r^2} -$$

$$- 4(1-\mu)\frac{C_2}{r^2} + 4\frac{1+\mu}{\mu}B_2 - \frac{(1-\mu)(3+\mu)}{4}\alpha^2 r^2 + 12\frac{1+\mu}{\mu}B_3 z -$$

$$- 6\frac{1-\mu}{\mu}\frac{C_3}{r^2}z - \mu(1+\mu)\alpha^2 z^2 \Big] dz \Big|_{R_1; R_2} \equiv 0. \tag{32}$$

Efectuînd integrala (32) se obţine

$$S = \frac{Ea}{(1+\mu)(1-2\mu)} \cdot 2b \left[-4(1-2\mu)\frac{D_0}{r^2} - 4(1-\mu)\frac{C_2}{r^2} + \right.$$

$$\left. + 4\frac{1+\mu}{\mu}B_2 - \frac{(1-\mu)(3+\mu)}{4}\alpha^2 r^2 - \mu(1+\mu)\alpha^2 \frac{b^2}{3} \right]_{R_1; R_2} \equiv 0 \tag{33}$$

şi punînd condiţiile

$$\left.\begin{aligned} r &= R_1 \\ r &= R_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow S \equiv 0, \tag{32'}$$

se deduc ecuaţiile

$$-4(1-2\mu)\frac{D_0}{R_1^2} - 4(1-\mu)\frac{C_2}{R_1^2} + 4\frac{1+\mu}{\mu}B_2 - \frac{(1-\mu)(3+\mu)}{4}\alpha^2 R_1^2 -$$

$$-\mu(1+\mu)\alpha^2\frac{b^2}{3} = 0,$$

$$-4(1-2\mu)\frac{D_0}{R_2^2} - 4(1-\mu)\frac{C_2}{R_2^2} + 4\frac{1+\mu}{\mu}B_2 - \frac{(1-\mu)(3+\mu)}{4}\alpha^2 R_2^2 -$$

$$-\mu(1+\mu)\alpha^2\frac{b^2}{3} = 0,$$

din care rezultă condiţiile

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{\mu(1-\mu)(3+\mu)}{16(1+\mu)}\alpha^2(R_2^2+R_1^2) + \frac{\mu^2}{12}\alpha^2 b^2 \\ 4(1-2\mu)D_0 + 4(1-\mu)C_2 &= \frac{(1-\mu)(3+\mu)}{4}\alpha^2 R_1^2 R_2^2. \end{aligned} \tag{34}$$

Înlocuind în relaţia (32) condiţiile (32'), expresia tensiunii σ_r devine

$$\sigma_r = \frac{Ea}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left\{\frac{(1-\mu)(3+\mu)}{4}\alpha^2\left[R_1^2+R_2^2-\frac{R_1^2R_2^2}{r^2}-r^2\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\mu(1+\mu)}{3}\alpha^2(b^2-3z^2)+\frac{6}{\mu}\left[2(1+\mu)B_3-(1-\mu)\frac{C_3}{r^2}\right]z\right\}. \tag{35}$$

Dacă se pune şi condiţia ca tensiunile σ_r să fie simetrice în raport cu planul $z = 0$ se deduce condiţia

$$2(1+\mu)B_3 - (1-\mu)\frac{C_3}{r^2} \equiv 0,$$

din care rezultă constantele

$$B_3 = C_3 = 0. \tag{36}$$

Introducînd în relaţia (35) condiţia (36) şi înlocuind termenul α^2 cu valoarea lui din relaţia (10), se obţine

$$\sigma_r = \frac{(3+\mu)\,\rho\omega^2}{8}\left[R_1^2 + R_2^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} - r^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{4\mu\,(1+\mu)}{3(1-\mu)(3+\mu)}(b^2 - 3z^2)\right]. \tag{37}$$

Presupunînd că discul are o grosime mică, deci

$$b \approx z \approx 0,$$

din relaţia (37) se deduce formula cunoscută din rezistenţa materialelor,

$$\sigma_r = \frac{3+\mu}{8}\,\rho\,\omega^2\left[R_1^2 + R_2^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} - r^2\right], \tag{38}$$

care constituie astfel o verificare a corectitudinii relaţiilor (15)—(18) deduse anterior.

Introducînd condiţiile deduse pînă aici în expresia deplasării radiale u, din relaţia (15) se obţine

$$u = \frac{(1+\mu)\,(3+\mu)\,a\alpha^2}{4\,(1-2\mu)}\left\{\frac{R_1^2 R_2^2}{r} + \frac{1-\mu}{1+\mu}(R_2^2 + R_1^2)\,r - \right.$$

$$\left. - \frac{1-\mu}{3+\mu}r^3 + \frac{24}{\mu\,(3+\mu)\,\alpha^2}\left(\frac{C_3}{r} + 2B_3\,r\right)z + \frac{4\mu}{3(3+\mu)}(b^2 - 3z^2)\,r\right\} \tag{m}$$

Dacă se pune condiţia ca deplasările u să fie simetrice faţă de planul $z = 0$, rezultă condiţiile

$$C_3 = B_3 = D_1 = 0 \tag{39}$$

şi dacă se înlocuieşte constanta α^2 cu valoarea ei din relaţia (10) se deduce

$$u = \frac{(3+\mu)(1+\mu)}{8\,E}\,\rho\,\omega^2\left[\frac{R_1^2 R_2^2}{r} + \frac{1-\mu}{1+\mu}(R_1^2 + R_2^2)\,r - \right.$$

$$\left. - \frac{1-\mu}{3+\mu}r^3 + \frac{4\mu}{3\,(3+\mu)}(b^2 - 3\,z^2)\,r\right]. \tag{40}$$

Pentru expresia deplasării axiale w din relaţia (15) rezultă acum

$$w = -\frac{a}{1-2\mu}\left\{4B_1 + z\left[\frac{\mu\,(1-\mu)\,(3+\mu)}{2(1+\mu)}\,\alpha^2\,(R_1^2+R_2^2) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2}{3}\mu^2\,\alpha^2\,(b^2-z^2) - \mu\,(1-\mu)\,\alpha^2\,r^2\right]\right\}. \qquad (n)$$

Datorită simetriei în raport cu planul $z = 0$ este necesar ca

$$w\,(z) = -\,w\,(-z),$$

ceea ce duce la condiţia

$$B_1 = 0. \qquad (41)$$

Expresia deplasării axiale devine

$$w = -\frac{\mu\,(1+\mu)}{2\,E}\,\rho\,\omega^2\left[\frac{3+\mu}{2(1+\mu)}\,(R_1^2+R_2^2) - r^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3}\,\frac{\mu}{1-\mu}\,(b^2-z^2)\right]z. \qquad (42)$$

Expresiile deformaţiilor specifice deduse din relaţiile (17) sînt:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{(3+\mu)\,(1+\mu)}{8\,E}\,\rho\,\omega^2\left[-\frac{R_1^2\,R_2^2}{r^2} + \frac{1-\mu}{1+\mu}\,(R_1^2+R_2^2) - \right.$$

$$\left. - 3\,\frac{1-\mu}{3+\mu}\,r^2 + \frac{4\mu}{3\,(3+\mu)}\,(b^2-3\,z^2)\right],$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{(3+\mu)(1+\mu)}{8\,E}\,\rho\,\omega^2\left[\frac{R_1^2\,R_2^2}{r^2} + \frac{1-\mu}{1+\mu}\,(R_1^2+R_2^2) - \right.$$

$$\left. - \frac{1-\mu}{3+\mu}\,r^2 + \frac{4\mu}{3\,(3+\mu)}\,(b^2-3\,z^2)\right], \qquad (43)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\mu(1+\mu)}{2E}\rho\omega^2\left[\frac{3+\mu}{2(1+\mu)}(R_1^2+R_2^2) - r^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3}\frac{\mu}{1-\mu}(b^2 - 3z^2)\right],$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = 0,$$

$$\varepsilon_v = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2E}\rho\omega^2\left[\frac{3+\mu}{2(1+\mu)}(R_1^2+R_2^2) - \right.$$

$$\left. - r^2 + \frac{2\mu}{3(1-\mu)}(b^2 - 3z^2)\right].$$

În sfîrşit, expresiile tensiunilor deduse din relaţiile (18) sînt

$$\sigma_r = \frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2\left[R_1^2 + R_2^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} - r^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{4\mu(1+\mu)}{3(1-\mu)(3+\mu)}(b^2 - 3z^2)\right],$$

$$\sigma_\theta = \frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2\left[R_1^2 + R_2^2 + \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} - \frac{1+3\mu}{3+\mu}r^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{4\mu(1+\mu)}{3(1-\mu)(3+\mu)}(b^2 - 3z^2)\right], \tag{44}$$

$$\sigma_z = 0,$$

$$\tau_{rz} = 0.$$

Cu ajutorul relaţiilor (40) şi (42) se poate stabili forma deformată a discului analizînd formele deformate ale fibrelor longitudinale şi radiale. După deformare, o fibră radială situată iniţial în planul $z = z_0$ ($-b \leqslant z_0 \leqslant b$) va avea coordonata,

$$z = z_0 + w(z_0) = z_0 - \frac{\mu(1+\mu)}{2E}\rho\omega^2\left[\frac{3+\mu}{2(1+\mu)}(R_1^2+R_2^2) - r^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3}\frac{\mu}{1-\mu}(b^2 - z_0^2)\right]z_0. \tag{45}$$

Din relaţia (45) rezultă că o fibră radială rectilinie capătă după deformare o formă parabolică. Expresia tangentei într-un punct la această fibră (fig. 3) va fi

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{dr}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dr}} = \frac{1}{\frac{\mu(1+\mu)}{E} \rho \omega^2 z_0 r}. \tag{46}$$

Pe de altă parte, după deformare, o fibră longitudinală care corespunde unei generatoare a cilindrului de rază $r = r_0$ ($R_1 \leqslant r_0 \leqslant R_2$), va avea coordonata,

$$r = r_0 + u(r_0) = r_0 + \frac{(3+\mu)(1+\mu)}{8E} \rho \omega^2 \left[\frac{R_1^2 R_2^2}{r_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{1-\mu}{1+\mu}(R_1^2 + R_2^2) r_0 - \frac{1-\mu}{3+\mu} r_0^3 + \frac{4\mu}{3(3+\mu)} (b^2 - 3z^2) r_0 \right]. \tag{47}$$

Din relaţia (47) rezultă că fibra longitudinală rectilinie capătă după deformare o formă parabolică. Expresia tangentei într-un punct la această fibră (fig. 3) va fi

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{dr}{dz} = -\frac{\mu(1+\mu)}{E} \rho \omega^2 r_0 z. \tag{48}$$

Într-un acelaşi punct $M(r_0, z_0)$, expresiile celor două tangente vor fi

$$(\operatorname{tg} \varphi_1)_{r_0} = \frac{1}{\frac{\mu(1+\mu)}{E} \rho \omega^2 z_0 r_0}, \tag{49}$$

$$(\operatorname{tg} \varphi_2)_{z_0} = -\frac{\mu(1+\mu)}{E} \rho \omega^2 r_0 z_0$$

şi făcînd produsul celor două tangente rezultă

$$(\operatorname{tg} \varphi_1)_{r=r_0} \cdot (\operatorname{tg} \varphi_2)_{z=z_0} = -1, \tag{50}$$

adică, cele două fibre — longitudinală şi radială — sînt ortogonale în punctul $M(r_0, z_0)$. Concluzia este naturală întrucît în expresiile (43) $\gamma_{rz} = 0$.

Forma deformată a discului este arătată în (fig. 3 *a* şi *b*) fără a preciza care din cele două forme va fi obţinută după punerea

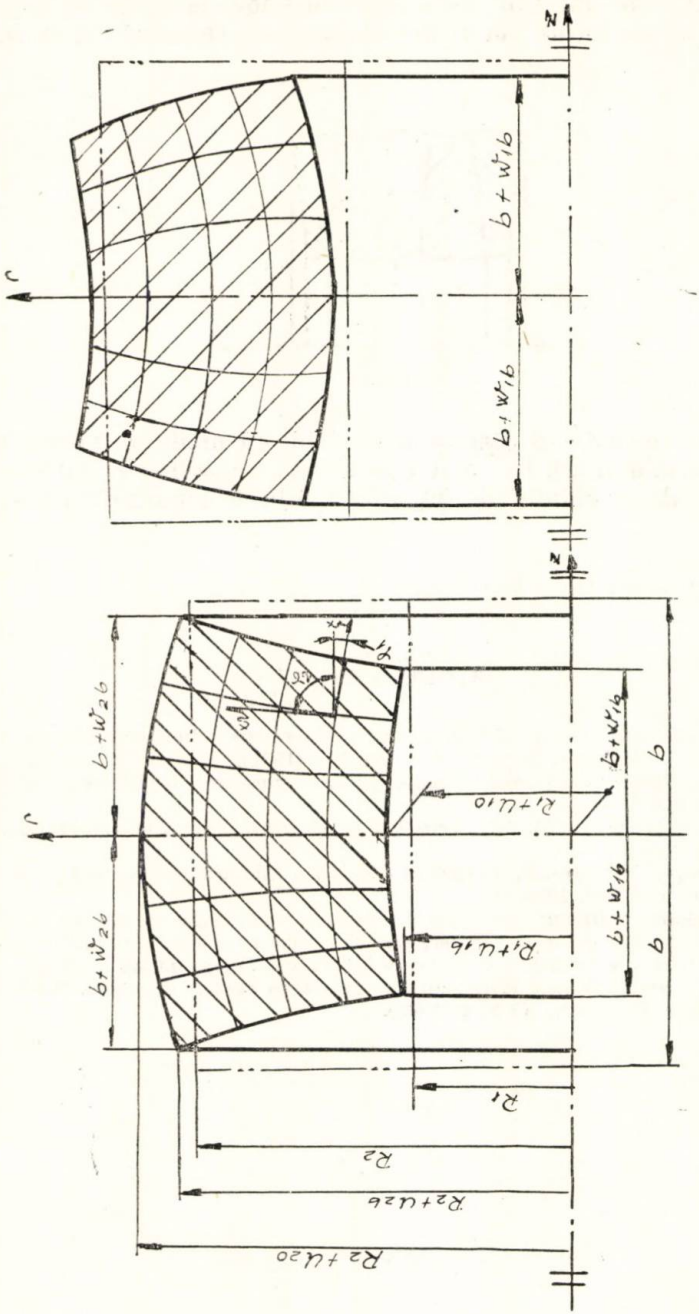

b + w1b
b + w1b
b
b + w2b
b + w2b
b + w1b
b + w1b
b
b
R1 + u10
R1 + u1b
R1
R2
R2 + u2b
R2 + u20
a

Fig. 3

în mişcare de rotaţie a lui. Forma deformată (a) sau (b) a discului depinde şi de solicitările care se produc pe feţele lui laterale.

În cazul unei mulţimi de discuri neomogene lipite pe feţele frontale (fig. 4) aceste forme vor fi determinate de caracteristicile materiale-

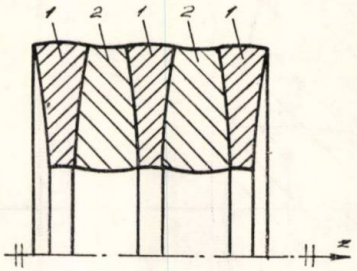


Fig. 4

lor, forma (1) putîndu-se găsi pe materialul cu modulul Young mai mic decît al materialului (2). În acest caz, întrucît $\tau_{rz} \neq 0 \Rightarrow \gamma_{rz} \neq 0$ vor fi necesare corecţii ale unghiului de 90° dintre fibrele longitudinală şi radială deformate.

Primită la redacţie la 5 noiembrie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. V. Bogdan, *Asupra stărilor de eforturi unitare şi deformaţie dintr-un disc axial simetric în mişcare de rotaţie*, St. cerc. mec. apl.,**30**,*4* (1971).
2. V. G. Rekaci, *Rukovodstvo k reşeniiu zadaci po teorii uprugosti*, Izdatelstvo „Vîsşaia şcola", Moskva (1966).
3. S. D. Ponomarev şi colab., *Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini*, vol. III, Edit. tehnică, Bucureşti, 1964.
4. S. Timoshenko, J. N. Goodier, *Théorie de l'élasticité*, Librairie polytechnique Ch. Béranger, Paris et Liège, 1961.
5. A. Petre, V. Bogdan, *Discuri neomogene în mişcare de rotaţie*, St. cerc. mec. aplic., **20**, *5* (1965).
6. V. Bogdan, *Expresiile eforturilor unitare care se produc în discuri în rotaţie solicitate prin eforturi care variază în lungul axei lor*, St. cerc. mec. apl. **26**, *5* (1967).
7. V. Bogdan, *Eforturi unitare şi deformaţii într-un disc în mişcare de rotaţie*, Bulet. Inst. politehnic, Bucureşti, **XXX**, *2* (1968).

STUDIUL TENSIUNILOR TERMICE ÎNTR-UN CILINDRU SOLICITAT DE UN CÎMP DE TEMPERATURI AXIAL-SIMETRIC

de ION ROȘCA

Institutul politehnic București

Autorul determină tensiunile termice dintr-un cilindru, solicitat de un cîmp de temperaturi axial-simetric. Se consideră cilindrul de lungime finită și o distribuție oarecare a temperaturilor într-o secțiune longitudinală în cilindru. Se scot în evidență avantajele metodei numerice aplicate în lucrare în raport cu metodele clasice de rezolvare.

La determinarea tensiunilor termice într-un cilindru se consideră, de obicei, că cilindrul este de lungime infinită și, ca o consecință a acestei ipoteze, că temperatura pe o generatoare a cilindrului este constantă. Desigur că aceste ipoteze nu corespund de cele mai multe ori cazurilor practice în care se aplică formulele obținute. De aceea, în lucrarea de față, ne-am propus să luăm în considerare faptul că cilindrul are o lungime finită, iar distribuția temperaturilor într-o secțiune longitudinală în cilindru este oarecare (se menține ipoteza cîmpului de temperaturi axial-simetric).

În scopul obținerii unei soluții a problemei astfel formulată trebuie integrate ecuațiile generale ale teoriei termoelasticității spațiale. Integrarea acestor ecuații se face folosind metode numerice deoarece integrarea analitică este practic imposibilă pentru condiții la limită corespunzătoare cazurilor curent întîlnite în tehnică.

Deci, pentru determinarea tensiunilor termice în cazul unui cilindru supus la acțiunea unui cîmp de temperaturi axial simetric, se integrează numeric ecuațiile termoelasticității pentru cazul axial-simetric, exprimate în deplasări; folosirea ecuațiilor exprimate în tensiuni este mai dificilă datorită necesității de a lua în considerare condițiile de continuitate. Condițiile la limită exprimă faptul că nu există încărcări mecanice pe suprafețele cilindrului (tensiunile normale și tangențiale sînt nule pe suprafețele cilindrului).

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 32, NR. 3, 1973, P. 603–606

Aceste ecuații sînt [1], [2], [3]:

$$\Delta u - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{2(1+\mu)}{1-2\mu}\alpha\frac{\partial T}{\partial r} = 0,$$
$$\Delta w + \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{2(1+\mu)}{1-2\mu}\alpha\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

în care

u este deplasarea unui punct M în direcția radială;
w — deplasarea unui punct M în direcția axială;
T — temperatura în același punct M;
μ — coeficientul lui Poisson;
α — coeficientul de dilatare liniară al materialului;

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z};$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

(operatorul Laplace în coordonate cilindrice pentru cazul simetric).

Pentru integrarea numerică a ecuațiilor (1) s-a aplicat metoda diferențelor finite [2], [3].

Înlocuind derivatele din ecuațiile diferențiale (1) cu rapoarte de diferențe [2], [3], [4], [5], s-au obținut ecuațiile cu diferențe finite; aceste ecuații sînt aproximative, deoarece derivatele sînt înlocuite prin expresii aproximative. Cu cît numărul de noduri ale rețelei ce acoperă domeniul de studiu (corespunzător metodei [2]) este mai mare, cu atît aproximația este mai bună. Sistemul de ecuații algebrice liniare obținut, inclusiv ecuațiile ce rezultă din condițiile la limită (nu insistăm asupra modului de obținere a acestui sistem, deoarece acest lucru constituie obiectul unei alte lucrări în curs de publicare) s-a rezolvat prin „metoda exactă" folosindu-se un algoritm corespunzător sistemului obținut, sistem a cărui matrice este o matrice bandă. S-a întocmit un program de calcul, iar rezultatele obținute pe calculator constau în deplasările u și w din fiecare nod al rețelei. Cu ajutorul acestor deplasări s-au calculat tensiunile termice conform relațiilor [1], [2], [3]:

$$\sigma_r = 2G\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\mu}{1-2\mu}\theta - \frac{1+\mu}{1-2\mu}\alpha T\right),$$

$$\sigma_t = 2G\left(\frac{u}{r} + \frac{\mu}{1-2\mu}\theta - \frac{1+\mu}{1-2\mu}\alpha T\right),$$

$$\sigma_z = 2G\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\mu}{1-2\mu}\theta - \frac{1+\mu}{1-2\mu}\alpha T\right), \tag{2}$$

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right),$$

unde derivatele s-au calculat ţinînd seama de expresiile lor prin rapoarte de diferenţe [2], [3].

Varianta calculată pe care o prezentăm mai jos este caracterizată prin parametrii :

$$R_1 = \frac{r_1}{r_m} = 0{,}83\,; \quad Z = \frac{L}{r_m} = 4{,}5,$$

$$\frac{(\Delta T_r)_{\max}}{T_{\max}} = 0{,}4\,; \quad \frac{(\Delta T_z)_{\max}}{T_{\max}} = 0{,}8,$$

unde r_1 şi r_m sînt, respectiv, raza interioară şi raza exterioară a cilindrului ;

L — lungimea cilindrului ;

$T_{\max}$ — diferenţa dintre temperatura cea mai mare şi temperatura cea mai mică realizată în corp ;

$(\Delta T_r)_{\max}$ — căderea maximă de temperatură pe rază şi

$(\Delta T_z)_{\max}$ — căderea maximă de temperatură de-a lungul unei generatoare interioare a cilindrului.

Tensiunile calculate, conform celor de mai sus, pentru această variantă au permis ridicarea diagramelor reprezentate în figurile 1 şi 2 din care rezultă o serie de concluzii importante şi anume :

— tensiunile σ_t şi σ_z variază mult în apropierea extremităţilor cilindrului ;

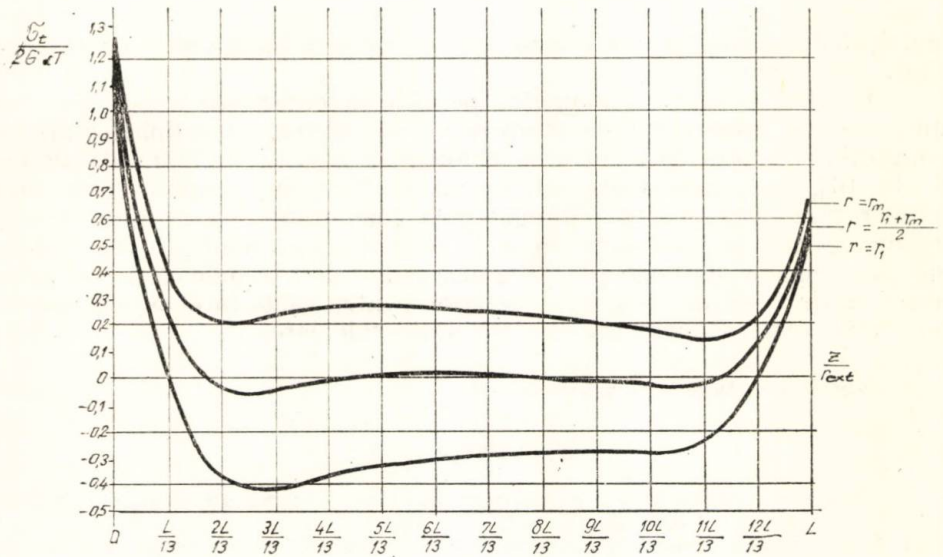


Fig. 1

— tensiunile circumferenţiale σ_t cresc foarte mult în apropierea extremităţilor în raport cu mijlocul cilindrului (fig. 1) ;

— tensiunile axiale σ_z scad în apropierea extremităţilor (ele trebuie să fie nule la extremităţi) (fig. 2).

Aceste rezultate sînt în concordanţă cu cele date în lucrarea [6], unde tensiunile termice calculate în ipoteza cilindrului de lungime infinită sînt corectate prin adăugarea tensiunilor corespunzătoare unor forţe axiale aplicate la extremităţile cilindrului cu scopul anulării tensiunilor axiale ce rezultă din calculul cu formulele de la cilindrul de lungime infinită.

Cu toate acestea, corecţia efectuată nu asigură îndeplinirea tuturor condiţiilor la limită, ceea ce ne permite să afirmăm că rezolvarea numerică este de preferat (rezolvarea numerică asigură îndeplinirea tuturor

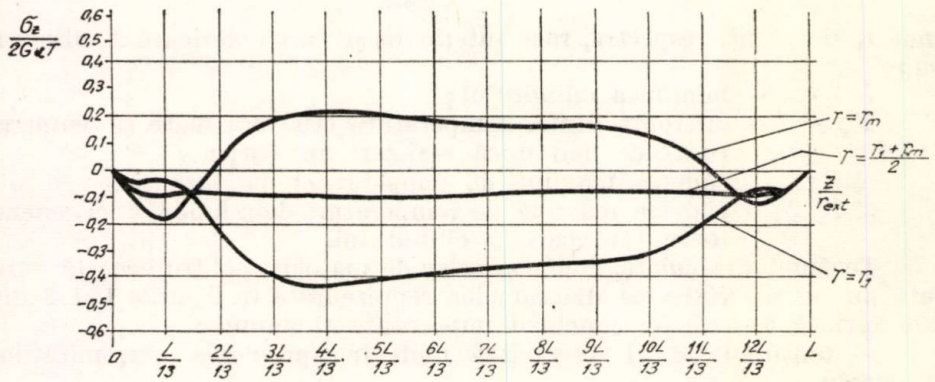


Fig. 2

condiţiilor la limită şi este o rezolvare ce poate fi programată pe calculatoare numerice).

În plus, rezolvarea numerică permite determinarea tensiunilor termice pentru orice cîmp de temperaturi şi pentru orice dimensiuni ale cilindrului în timp ce rezolvarea analitică a ecuaţiei diferenţiale simplificate [6], corespunzătoare cilindrului de lungime infinită, presupune temperatura constantă de-a lungul unei generatoare, iar rezultatele sînt valabile pentru regiuni suficient de depărtate de extremităţi (deci pentru cilindrii suficient de lungi [6], lungimea cilindrului trebuie să fie cel puţin egală cu de două ori diametrul exterior pentru ca la mijlocul cilindrului tensiunile reale să coincidă cu tensiunile calculate).

Primită la redacţie la 27 noiembrie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. N. I. Bezuhov şi colab., *Rasciotî na procinosti, ustoicivosti i kolebania v usloviah visokih temperatur*, izd maşinostroienie, Maskva, 1965.
2. I. Roşca, *Condiţii de contur la o bucşă de cilindru solicitată de un cîmp termic axial simetric*, Buletinul IPB, *2*, 85—91, (1970).
3. I. Roşca, *Consideraţii asupra colţurilor în determinarea numerică a eforturilor dintr-un cilindru solicitat termic axial simetric*, Construcţia de maşini, **22**, *11*, pag. 677—679 (1970).
4. D. N. de G. Allen, *Relaxation Methods*, 1954.
5. M. Soare, *Aplicarea ecuaţiilor cu diferenţe finite la calculul plăcilor curbe subţiri*, ediţia II-a, Bucureşti, Edit., Academiei, 1968.
6. S. D. Ponomariov şi colab., *Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini*, Vol. II., Bucureşti, Edit. tehnică, 1963, 376—379.

METODE DE REZONANȚĂ PENTRU STUDIUL DINAMIC AL STRUCTURILOR DEFORMABILE

de M. RADEȘ
Institutul politehnic București

Lucrarea de față este prima dintr-o serie de articole în care autorul își propune să prezinte cîteva metode de rezonanță dezvoltate sau adaptate în cadrul laboratorului de rezistența materialelor de la Institutul politehnic București, pentru determinarea experimentală a caracteristicilor dinamice ale structurilor.
Metodele expuse sînt aplicabile atunci cînd echipamentul de produs și măsurat vibrații permite o excitație staționară (sau cvasistaționară), prin forțe armonice cu sau fără componente în cvadratură și o măsurare a părților reală și imaginară ale vitezei răspunsului în orice punct. Amortizarea se introduce printr-un coeficient de amortizare vîscoasă echivalentă. Considerînd că din punct de vedere economic excitarea simultană în mai multe puncte nu este totdeauna justificată, se pune accent pe analiza grafică a răspunsului în frecvență al structurilor excitate într-un singur punct, efectuată pe diagrame ale componentelor vitezei în fază sau în cvadratură cu excitația, pe diagrame ale valorii absolute și fazei răspunsului sau pe diagrame polare reprezentînd hodograful vitezei.

1. INTRODUCERE

În general, studiul teoretic al răspunsului dinamic al sistemelor mecanice complexe se face înlocuind structura reală, care are un număr infinit de grade de libertate, prin modelul matematic al sistemului cu număr finit de grade de libertate. Scopul analizei teoretice este rezolvarea unor ecuații de mișcare de forma

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = \Phi, \tag{1}$$

unde M, C și K sînt matricele inerției, amortizării și rigidității raportate la matricea coloană a deplasării generalizate q, iar Φ este matricea excitației raportată la aceleași coordonate q. În teoria modurilor normale de vibrație [1], amortizarea se consideră liniară, iar matricea C este diagonală, adică se introduce cîte un singur coeficient de amortizare pentru fiecare mod nor-

mal. În general însă, matricea C poate fi la fel ca M şi K, adică reală, simetrică, pătrată şi pozitiv definită, iar teoria defazajelor caracteristice propusă de Fraeijs de Veubeke [2] porneşte de la această presupunere, considerînd existenţa unor moduri forţate de vibraţie, în care toate deplasările generalizate sînt în fază, dar unghiul de fază şi forma modului variază cu frecvenţa.

Analiza teoretică presupune, deci, cunoscute cele trei matrice ce definesc caracteristicile dinamice ale sistemului şi calculează elemente ale vibraţiei. În cazul studiului experimental al unei structuri reale este necesar a se proceda invers: pornind de la cantităţi măsurabile — ca de exemplu frecvenţele de rezonanţă, forma modurilor de vibraţie şi amortizarea corespunzătoare acestora — să se determine elementele celor trei matrice.

Majoritatea metodelor experimentale folosite la determinarea proprietăţilor dinamice ale structurilor se bazează pe teoria modurilor normale de vibraţie, aplicată la sisteme cu număr finit de grade de libertate. La început, aceste metode au fost folosite în studiul unor structuri simple, avînd frecvenţe proprii relativ depărtate. Aplicînd forţe armonice de frecvenţă variabilă, se excită pe rînd fiecare rezonanţă a structurii şi se identifică modurile de vibraţie corespunzătoare, considerînd că la rezonanţă vibraţia se face exclusiv în modul normal respectiv.

La structuri complexe, la care într-un domeniu restrîns de frecvenţe pot fi excitate mai multe rezonanţe (un avion modern are pînă la 30 frecvenţe proprii sub 25 Hz), se mai ţine cont de contribuţia altor moduri de vibraţie la amplitudinea de rezonanţă a modului studiat şi de eventuale cuplaje prin amortizare. Metodele experimentale elaborate pentru analiza acestora consideră o contribuţie constantă a modurilor nerezonante în răspunsul la rezonanţă al unei structuri, ceea ce în multe situaţii poate duce la erori apreciabile. Studii critice asupra metodelor de rezonanţă dezvoltate în special în ultimul deceniu sînt publicate în lucrările [3]—[8].

O clasificare incompletă a acestora se poate face după următoarele criterii: a) numărul de puncte de excitare (excitare într-un punct sau simultană în mai multe puncte); b) felul excitaţiei (staţionară armonică, cvasistaţionară, tranzitorie, prin şoc sau aleatoare); c) mărimile fizice măsurate (deplasări, viteze, acceleraţii); d) modul de reprezentare grafică a datelor (diagrame ale amplitudinii şi fazei răspunsului în coordonate liniare, semilogaritmice sau logaritmice, diagrame polare) şi mărimile reprezentate; e) modul de analiză a acestor grafice (criteriul de localizare a rezonanţei şi formula de calcul a factorului de amortizare).

În lucrarea de faţă se prezintă baza teoretică şi analiza critică a cîtorva metode de rezonanţă folosite în special la „excitarea prin intermediul masei" a sistemelor cu un grad de libertate sau la studiul unui singur mod de vibraţie al unei structuri cu frecvenţe proprii relativ depărtate. Excitaţia este staţionară, prin forţe armonice aplicate într-un punct al structurii, iar mărimea măsurată este viteza răspunsului într-un punct. Metodele se deosebesc în special prin modul diferit de analiză în domeniul frecvenţelor a graficelor răspunsului. Nu se tratează procedeul de determinare a formei modurilor normale de vibraţie.

2. ANALIZA RĂSPUNSULUI STAȚIONAR AL SISTEMULUI CU UN GRAD DE LIBERTATE

Conform teoriei modurilor normale de vibrație, răspunsul unei structuri în oricare dintre modurile normale (raportat la coordonatele normale) este descris de ecuația mișcării unui sistem cu un grad de libertate avînd frecvența proprie a modului respectiv

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t), \tag{2}$$

unde parametrii generalizați m, c și k reprezintă masa, coeficientul de amortizare vîscoasă echivalentă și constanta elastică corespunzătoare modului specificat de coordonata normală x, iar $F(t)$ este forța excitatoare, funcție de timp.

Dacă forța perturbatoare este armonică, folosind notația complexă se poate scrie

$$F(t) = F_0 e^{j\omega t}, \tag{3}$$

unde F_0 este amplitudinea constantă a forței, ω este pulsația excitatoare, iar $j = \sqrt{-1}$.

Soluția staționară a ecuației (2) se alege de forma

$$x = x_0 e^{j\omega t}, \tag{4}$$

unde x_0 este o amplitudine complexă a deplasării. Viteza va fi

$$v = \dot{x} = j\omega x_0 e^{j\omega t} = v_0 e^{j\omega t}, \tag{5}$$

unde v_0 este amplitudinea complexă a vitezei.

În punctul de aplicație a forței, mobilitatea este

$$M = \frac{v}{F} = \frac{v_0}{F_0} = \frac{1}{c + j\left(m\omega - \dfrac{k}{\omega}\right)}. \tag{6}$$

Se introduce pulsația adimensională

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}, \tag{7}$$

unde

$$\omega_n = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

este pulsația proprie a sistemului fără amortizare.

Se notează raportul de amortizare prin

$$\zeta = \frac{c}{c_c}, \tag{9}$$

în care

$$c_c = 2\sqrt{mk} = 2\ m\omega_n \tag{10}$$

este coeficientul de amortizare vîscoasă echivalentă critică.

Cu notaţiile (7)—(10), relaţia (6) devine

$$M = \frac{1}{\sqrt{mk}\left[2\zeta + \mathrm{j}\left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)\right]}. \tag{11}$$

Se introduce funcţia adimensională de răspuns în frecvenţă

$$\nu = M\sqrt{mk} = \nu_R + \mathrm{j}\nu_I = |\nu|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}, \tag{12}$$

unde ν_R şi ν_I sînt componenta reală, respectiv cea imaginară, iar

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{\nu_I}{\nu_R}, \tag{13}$$

şi o nouă variabilă adimensională

$$\sigma = \Omega - \frac{1}{\Omega} + 1. \tag{14}$$

Folosind notaţiile (12) şi (14), relaţia (11) devine

$$\nu = \frac{1}{2\zeta + \mathrm{j}(\sigma - 1)}, \tag{15}$$

iar mărimile din relaţiile (12) se scriu sub forma

$$\nu_R = \frac{2\zeta}{4\zeta^2 + (1-\sigma)^2}, \qquad \nu_I = \frac{1-\sigma}{4\zeta^2 + (1-\sigma)^2}, \tag{16}$$

$$|\nu| = \frac{1}{\sqrt{4\zeta^2 + (1-\sigma)^2}}, \qquad \theta = \operatorname{arctg}\frac{1-\sigma}{2\zeta}. \tag{17}$$

De asemenea, se observă că

$$\sin\theta = \frac{\nu_I}{|\nu|} = \frac{1-\sigma}{\sqrt{4\zeta^2+(1-\sigma)^2}} = (1-\sigma)|\nu|,$$

$$\cos\theta = \frac{\nu_R}{|\nu|} = \frac{2\zeta}{\sqrt{4\zeta^2+(1-\sigma)^2}} = 2\zeta|\nu|. \tag{18}$$

3. METODA AMPLITUDINII MAXIME

3.1. FORȚĂ PERTURBATOARE DE AMPLITUDINE CONSTANTĂ

Dacă se reprezintă grafic prima relație (17), pentru o valoare dată a amortizării, se obține curba din figura 1, denumită „curbă de rezonanță". Derivata acestei funcții în raport cu σ este

$$\frac{d|\nu|}{d\sigma} = \frac{1-\sigma}{[4\zeta^2+(1-\sigma)^2]^{3/2}}. \tag{19}$$

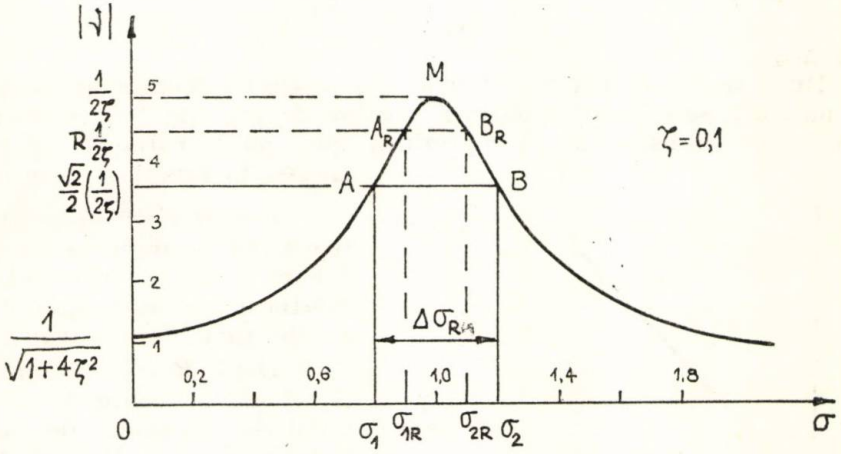


Fig. 1

Prin anularea expresiei (19) rezultă că valoarea maximă a lui $|\nu|$ apare la $\sigma = 1$ (care definește pulsația de rezonanță a amplitudinii, $\omega = \omega_n$) și este $|\nu|_{max} = 1/2\zeta$. Cantitatea $|\nu|_{max}$ reprezintă o măsură a amortizării, dar evaluarea ei este dificilă.

Fie σ_{1R} și σ_{2R} abscisele punctelor A_R și B_R, în care dreapta

$$|\nu| = R|\nu|_{max} = \frac{R}{2\zeta} \tag{20}$$

intersectează curba de rezonanță (R este un coeficient real, subunitar).

Înlocuind în (20) pe $|\nu|$ cu prima relaţie (17), rezultă

$$\sigma_{1R,2R} = 1 \mp 2\zeta \sqrt{\frac{1}{R^2} - 1} \tag{21}$$

sau

$$\Delta\sigma_R = \sigma_{2R} - \sigma_{1R} = 4\zeta \sqrt{\frac{1}{R^2} - 1}\,. \tag{22}$$

Raportul de amortizare este dat de relaţia

$$\zeta = \frac{\Delta\sigma_R}{4}\left(\frac{1}{R^2} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{23}$$

care, folosind notaţiile (7) şi (14), devine

$$\zeta = \frac{\omega_{2R} - \omega_{1R}}{4\left(\frac{1}{R^2} - 1\right)^{1/2}} \cdot \frac{\omega_{1R}\omega_{2R} + \omega_n^2}{\omega_{1R}\omega_{2R}\omega_n}\,. \tag{24}$$

În cazul sistemelor cu amortizare slabă, se poate considera $\omega_{1R} \cong \omega_{2R} \cong \omega_n$ şi relaţia (24) devine

$$\zeta = \frac{\Delta\omega_R}{2\omega_n}\left(\frac{1}{R^2} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{25}$$

unde $\Delta\omega_R = \omega_{2R} - \omega_{1R}$.

După determinarea pulsaţiei ω_n, ca abscisa punctului de amplitudine maximă, se determină lăţimea benzilor de pulsaţie $\Delta\omega_R$ corespunzătoare diferitelor valori R. Se reprezintă apoi grafic variaţia raportului $\Delta\omega_R/\omega_n$ în funcţie de cantitatea $2(1-R^2)^{\frac{1}{2}}/R$ (fig. 2) şi prin punctele astfel obţinute se trasează o linie dreaptă. Valoarea pantei acestei drepte este egală cu cea a raportului de amortizare.

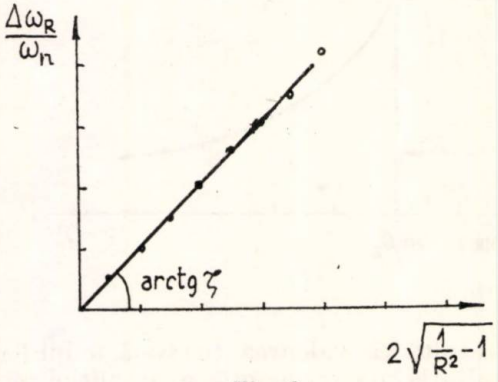


Fig. 2

Dacă $R = \sqrt{2}/2$, punctele A_R şi B_R se confundă cu aşanumitele „puncte de putere jumătate" A şi B, care corespund unor pulsaţii ω_1 şi ω_2, la care puterea disipată prin amortizare este jumătate din cea disipată la rezonanţă. Abscisele acestor puncte sînt

$$\sigma_{1.2} = 1 \mp 2\zeta, \tag{26}$$

astfel că, pentru $R = \sqrt{2}/2$, raportul de amortizare este

$$\zeta = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{4} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_n} \frac{\omega_1\omega_2 + \omega_n^2}{2\omega_1\omega_2}\,. \tag{27}$$

Pentru valori mici ale amortizării, $\omega_1 \cong \omega_2 \cong \omega_n$, se obține formula cunoscută

$$\zeta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_n}. \tag{28}$$

Trebuie notat că modulul funcției adimensionale de răspuns în frecvență este $|\nu| = |v_0| \cdot (mk)^{\frac{1}{2}}/F_0$, iar curbe de tipul celei din figura 1 se obțin practic prin înregistrarea lui $|v_0|$ în încercări cu $F_0 = \text{const}$. Pe baza unei etalonări prealabile, se poate măsura

$$|v_0|_{\max} = \frac{F_0}{\sqrt{mk}} |\nu|_{\max} = \frac{F_0}{m\omega_n} \frac{1}{2\zeta}, \tag{29}$$

de unde rezultă masa generalizată m, iar apoi, din relația (8), constanta elastică generalizată k. Metoda duce la erori în cazul unor curbe de rezonanță prea aplatizate (amortizare mare) sau prea alungite (amortizare mică). De asemenea, în cazul structurilor cu frecvențe proprii apropiate, anumite vîrfuri de rezonanță pot fi atenuate complet, vibrația în alte moduri fiind de același ordin de mărime cu cea la rezonanță într-un mod puternic amortizat.

3.2. AMPLITUDINE CONSTANTĂ A VITEZEI RĂSPUNSULUI

O variantă a acestei metode (ce ar putea fi denumită „metoda amplitudinii minime") este utilizată în încercările cu $|v_0| = \text{constant}$ și F_0

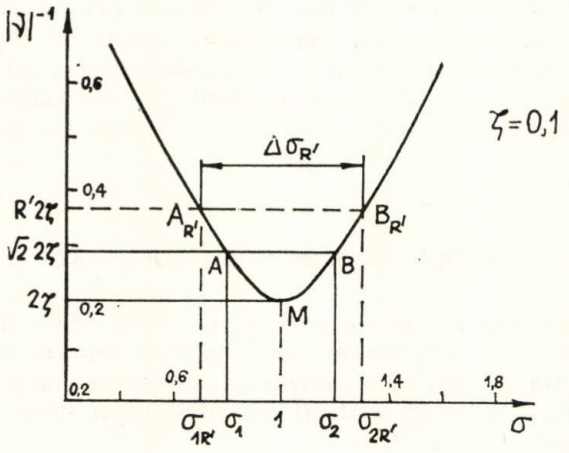


Fig. 3

variabil (în special pentru sisteme neliniare). În acest caz, se reprezintă grafic cantitatea $|\nu|^{-1} = F_0/|v_0| \, (mk)^{\frac{1}{2}}$ în funcție de σ (fig. 3), pe baza relației

$$|\nu|^{-1} = [4\zeta^2 + (1 - \sigma)^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{30}$$

La rezonanţă ($\sigma = 1$), forţa necesară pentru a menţine o valoare constantă a vitezei este minimă, funcţia (30) luînd valoarea $|\nu|_{\min}^{-1} = 2\zeta$.

Dreapta de ecuaţie

$$|\nu|^{-1} = R'|\nu|_{\min}^{-1} = R' \cdot 2\zeta, \tag{31}$$

unde R' este un factor supraunitar, intersectează curba de răspuns în punctele $A_{R'}$, şi $B_{R'}$, de abscise

$$\sigma_{1R',2R'} = 1 \mp 2\zeta(R'^2 - 1)^{\frac{1}{2}}. \tag{32}$$

Raportul de amortizare este dat de relaţia

$$\zeta = \frac{\Delta\sigma_{R'}}{4}(R'^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}, \tag{33}$$

iar pentru valori mici ale amortizării

$$\zeta = \frac{\omega_{2R'} - \omega_{1R'}}{2\omega_n}(R'^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}. \tag{34}$$

Pentru $R' = \sqrt{2}$, abscisele punctelor A şi B sînt $\sigma_{1,2} = 1 \mp 2\zeta$, iar raportul de amortizare este dat de relaţiile (27) şi (28).

În cazul structurilor slab amortizate, banda de frecvenţe în care se înregistrează curba de rezonanţă este foarte îngustă, astfel că în cadrul măsurărilor efectuate la viteze de amplitudine constantă, amplitudinea deplasării variază foarte puţin, ceea ce este avantajos în cazul sistemelor neliniare.

4. METODA DIAGRAMEI UNGHIULUI DE FAZĂ

Unghiul de fază dintre forţa excitatoare şi viteza de răspuns, dat de a doua relaţie (17), este reprezentat grafic în funcţie de σ în figura 4 (pentru o anumită valoare a amortizării). La rezonanţă $\sigma = 1$ şi $\theta = 0°$, deci frecvenţa de rezonanţă poate fi determinată la intersecţia diagramei unghiului de fază cu linia $\theta = 0°$.

Dacă se înlocuieşte

$$\sigma_{1,2} = 1 \mp 2\zeta$$

în a doua relaţie (17), rezultă că punctele A şi B corespund la unghiuri $\theta_{1,2} = \pm 45°$. Intersectînd deci diagrama unghiurilor de fază cu liniile $\theta = \pm 45°$ se obţin punctele A şi B, de abscise σ_1 şi σ_2 (26),

pe baza cărora raportul de amortizare se calculează cu relațiile (27) și (28).

Expresia derivatei unghiului de fază în raport cu σ este

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = \frac{-2\zeta}{4\zeta^2 + (1-\sigma)^2}. \tag{35}$$

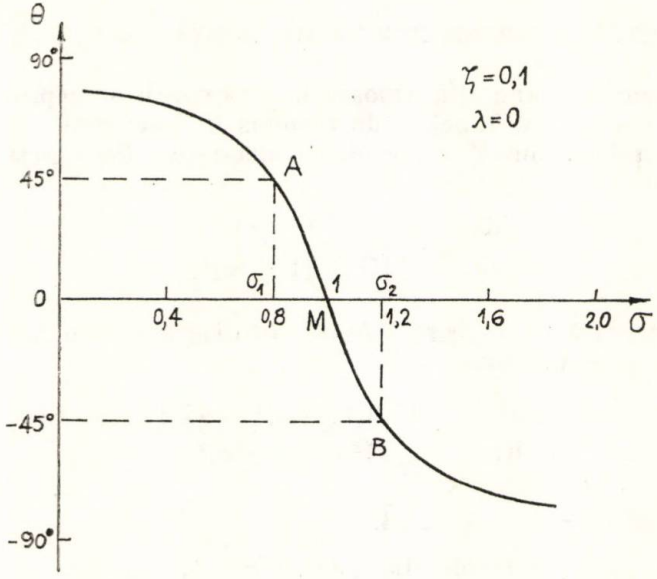


Fig. 4

Valoarea maximă a pantei diagramei unghiului de fază se obține la rezonanță și este

$$\left[\frac{d\theta}{d\sigma}\right]_{\sigma=1} = -\frac{1}{2\zeta}. \tag{36}$$

Deoarece

$$\left[\frac{d\theta}{d\sigma}\right]_{\sigma=1} = \left[\frac{\frac{d\theta}{d\Omega}}{\frac{d\sigma}{d\Omega}}\right]_{\Omega=1} = \left[\frac{\frac{d\theta}{d\Omega}}{1+\frac{1}{\Omega^2}}\right]_{\Omega=1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{d\theta}{d\Omega}\right]_{\Omega=1} = \frac{\omega_n}{2}\left[\frac{d\theta}{d\omega}\right]_{\omega=\omega_n}, \tag{37}$$

rezultă o nouă expresie a raportului de amortizare

$$\zeta = -\frac{1}{\omega_n\left[\frac{d\theta}{d\omega}\right]_{\omega=\omega_n}}. \tag{38}$$

Folosirea acestei relaţii este avantajoasă, fiind necesară doar o mică porţiune din diagrama unghiului de fază, situată în vecinătatea rezonanţei. Deşi determinarea pantei diagramei nu se poate face totdeauna foarte precis, valorile raportului de amortizare calculate pe baza relaţiei (38) sînt mai exacte decît cele determinate prin metoda amplitudinii maxime.

5. METODA DIAGRAMEI COMPONENTEI ÎN FAZĂ A RĂSPUNSULUI

Dacă pentru o anumită valoare a amortizării se reprezintă grafic componenta reală ν_R a funcţiei de răspuns în frecvenţă (16) în raport cu variabila adimensională σ, se obţine diagrama din figura 5*a*. Prima derivată este

$$\frac{d\nu_R}{d\sigma} = \frac{4\zeta(1-\sigma)}{[4\zeta^2 + (1-\sigma)^2]^2} \tag{39}$$

şi este reprezentată (la o scară diferită) în diagrama din figura 5*b*.

A doua derivată este

$$\frac{d^2\nu_R}{d\sigma^2} = \frac{4\zeta[3(1-\sigma)^2 - 4\zeta^2]}{[4\zeta^2 + (1-\sigma)^2]^3} \tag{40}$$

şi se anulează la $\sigma = 1 \mp 2\zeta/\sqrt{3}$.

În figura 5*a*, la rezonanţă, pentru $\sigma = 1$, $\nu_{R\max} = \frac{1}{2\zeta}$, iar la σ_1 şi σ_2, ordonatele au valoarea $\frac{1}{2}\nu_{R\max}$. Frecvenţa de rezonanţă corespunde deci amplitudinii maxime a componentei răspunsului în fază cu excitaţia. Intersectînd diagrama cu dreapta $\nu_R = \frac{1}{2}\nu_{R\max} = \frac{1}{4\zeta}$ se obţin punctele *A* şi *B*, abscisele cărora corespund pulsaţiilor ω_1 şi ω_2, folosite în relaţiile (27) şi (28) pentru calculul raportului de amortizare.

Dacă se intersectează curba componentei reale a răspunsului cu drepte $\nu_R = R_R\nu_{R\max} = R_R\frac{1}{2\zeta}$, abscisele punctelor de intersecţie sînt

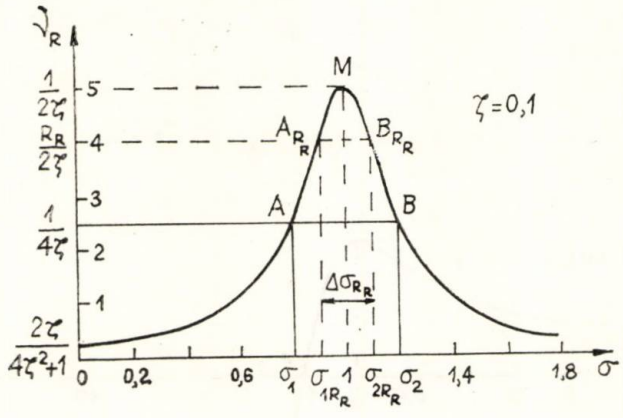
$$\sigma_{1R_R,2R_R} = 1 \mp 2\zeta\left(\frac{1}{R_R} - 1\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{41}$$

astfel că raportul de amortizare va avea expresiile

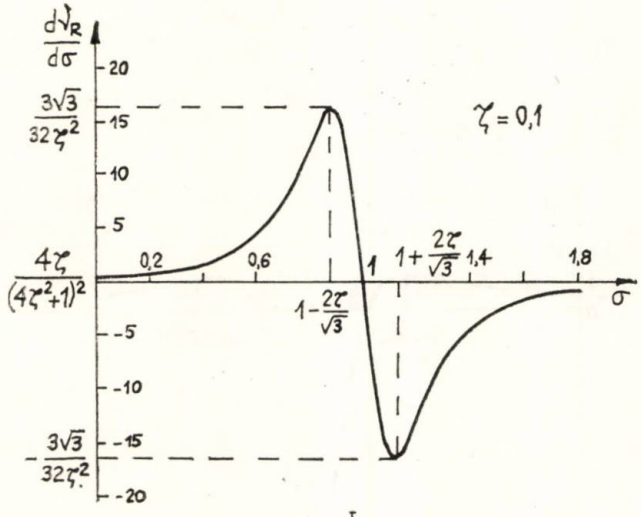
$$\zeta = \frac{\sigma_{2R_R} - \sigma_{1R_R}}{2\sqrt{\frac{1}{R_R} - 1}} = \frac{\omega_{2R_R} - \omega_{1R_R}}{2\omega_n\sqrt{\frac{1}{R_R} - 1}}\left(1 + \frac{\omega_n^2}{\omega_{1R_R}\cdot\omega_{2R_R}}\right), \tag{42}$$

care, pentru $R_R = \frac{1}{2}$, devin identice cu (27) și (28).

O evaluare mai exactă a lui ζ se face determinînd lățimea benzilor de pulsație $\Delta\sigma_{R_R} = \sigma_{2R_R} - \sigma_{1R_R}$ corespunzătoare la diferite valori R_R



a.



b.

Fig. 5

și calculînd panta dreptei trasate prin punctele reprezentate în coordonate $\frac{\Delta\omega_{R_R}}{\omega_n}$ și $2\left(\frac{1}{R_R} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$, analog procedeului din figura 2.

În general, apar aceleași dezavantaje ca la folosirea metodei amplitudinii maxime; în cazul unei izolări imperfecte a modului de vibrație analizat, contribuția altor moduri modifică rezultatele experimentale.

6. METODA DIAGRAMEI COMPONENTEI ÎN CVADRATURĂ A RĂSPUNSULUI

În figura 6*a* s-a reprezentat variaţia în raport cu σ a componentei imaginare a funcţiei de răspuns în frecvenţă, pe baza expresiei din a doua relaţie (16). Prima derivată în raport cu σ este

$$\frac{d\nu_I}{d\sigma} = \frac{(1-\sigma)^2 - 4\zeta^2}{[(1-\sigma)^2 + 4\zeta^2]^2}, \tag{43}$$

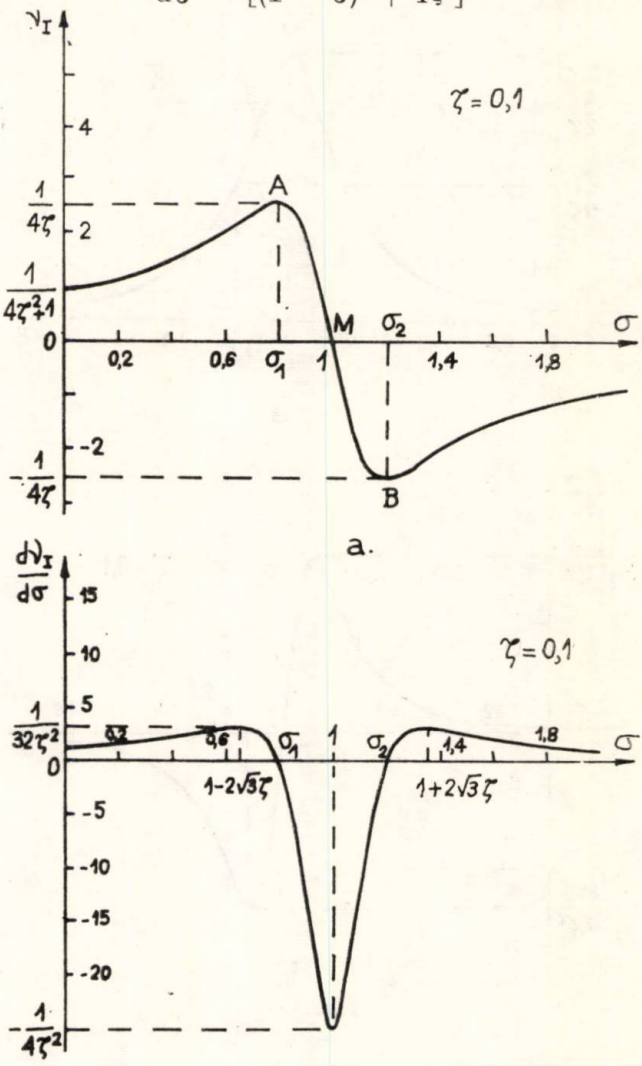


Fig. 6

fiind reprezentată în figura 6*b* (la o scară diferită).

Curba din figura 6*a* intersectează axa absciselor la $\sigma = 1$, care corespunde frecvenţei de rezonanţă. Valorile extreme ale funcţiei ν_I apar în

punctele A și B, de abscise $\sigma_{1,2} = 1 \mp 2\zeta$, astfel că, după determinarea pulsațiilor corespunzătoare, raportul de amortizare se calculează cu relațiile (27) și (28).

Valoarea maximă a pantei diagramei ν_I se obține la rezonanță și este

$$\left[\frac{d\nu_I}{d\sigma}\right]_{\sigma=1} = -\frac{1}{4\zeta^2}. \tag{44}$$

Rezultă o nouă expresie a raportului de amortizare

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{\left[-\frac{d\nu_I}{d\sigma}\right]_{\sigma=1}}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_n\left[-\frac{d\nu_I}{d\omega}\right]_{\omega=\omega_n}}}. \tag{45}$$

Deoarece $\nu_I = v_I \frac{m\omega_n}{F_0}$ unde $v_I = \mathrm{Im}[v_0]$ este componenta în cvadratură a vitezei din relația (45), rezultă constanta elastică generalizată

$$k = \frac{F_0}{2\zeta^2\left[-\frac{dv_I}{d\omega}\right]_{\omega=\omega_n}}, \tag{46}$$

după care, masa generalizată se obține din relația (8).

Cînd aparatura de măsură permite determinarea ambelor componente ν_R și ν_I ale funcției răspunsului în frecvență, raportul de amortizare se poate calcula cu relația

$$\zeta = \frac{\nu_R}{2|\nu|^2} = \frac{\nu_R}{2(\nu_R^2 + \nu_I^2)} = \frac{v_R}{2(v_R^2 + v_I^2)} \frac{F_0}{m\omega_n}. \tag{47}$$

Și în acest caz, contribuția altor moduri la curba de rezonanță a modului studiat poate conduce la rezultate eronate.

7. METODA DIAGRAMEI POLARE A RĂSPUNSULUI

Dacă partea reală ν_R și cea imaginară ν_I ale funcției complexe de răspuns în frecvență (15) se reprezintă în planul complex, locul geometric al vîrfului vectorului ν este un cerc de ecuație

$$\left(\nu_R - \frac{1}{4\zeta}\right)^2 + \nu_I^2 = \frac{1}{16\zeta^2}, \tag{48}$$

reprezentat în figura 7 pentru o valoare particulară a parametrului ζ. Fiecărui punct P de pe cerc îi corespunde o anumită valoare σ, deci o anumită pulsaţie ω. Punctul de intersecţie a cercului cu axa reală defineşte pulsaţia de rezonanţă $\omega = \omega_n$ ($\sigma_n = 1$). Diametrul la rezonanţă

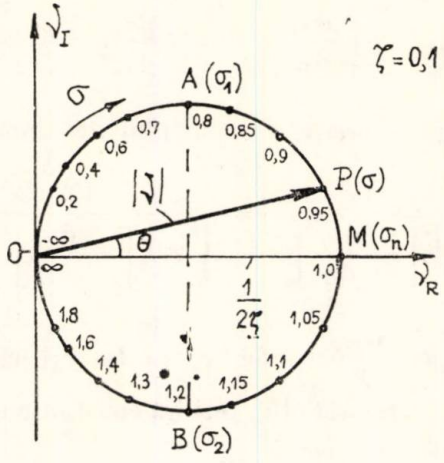


Fig. 7

$OM = 1/2\zeta$. Diametrul perpendicular pe OM intersectează cercul în punctele A şi B, definite de $\sigma_{1,2} = 1 \mp 2\zeta$ (căci le corespund unghiuri de fază $\theta = \mp 45°$), astfel că pentru calculul lui ζ se poate folosi (27).

Dacă se notează prin ds elementul de arc de cerc corespunzător unei creşteri $d\theta$ a unghiului de fază, atunci

$$ds = \frac{d\theta}{2\zeta}, \quad \frac{ds}{d\sigma} = -\frac{1}{2\zeta}\frac{d\theta}{d\sigma} = \frac{1}{4\zeta^2 + (1-\sigma)^2} = |\nu|^2. \tag{49}$$

Deoarece cantitatea $|\nu|^2$ este maximă pentru $\sigma = 1$, rezultă că $\dfrac{ds}{d\sigma}$ este maxim la rezonanţă. Deci, dacă pe cercul (48) se marchează puncte corespunzătoare unor creşteri egale $\Delta\sigma$ ale parametrului σ, atunci lungimea arcului Δs dintre două puncte consecutive va fi maximă la rezonanţă. Această observaţie stă la baza cunoscutului criteriu Kennedy-Pancu [3].

Se poate arăta de asemenea, că derivata

$$\frac{ds}{d\Omega} = \frac{1 + \Omega^2}{4\zeta^2\Omega^2 + (1 - \Omega^2)^2} \tag{50}$$

are o valoare maximă

$$\left[\frac{ds}{d\Omega}\right]_{max} = \frac{1}{4[\sqrt{1 - \zeta^2} - (1 - \zeta^2)]} \tag{51}$$

la pulsația adimensională

$$\Omega = [2\sqrt{1-\zeta^2} - 1]^{1/2}, \tag{52}$$

inferioară pulsației de rezonanță $\Omega_n = 1$. Pentru valori mici ale amortizării însă, membrul doi din relația (52) devine egal cu unitatea, astfel că metoda Kennedy-Pancu poate fi folosită și în analiza diagramelor vectoriale ce au drept parametru pulsația.

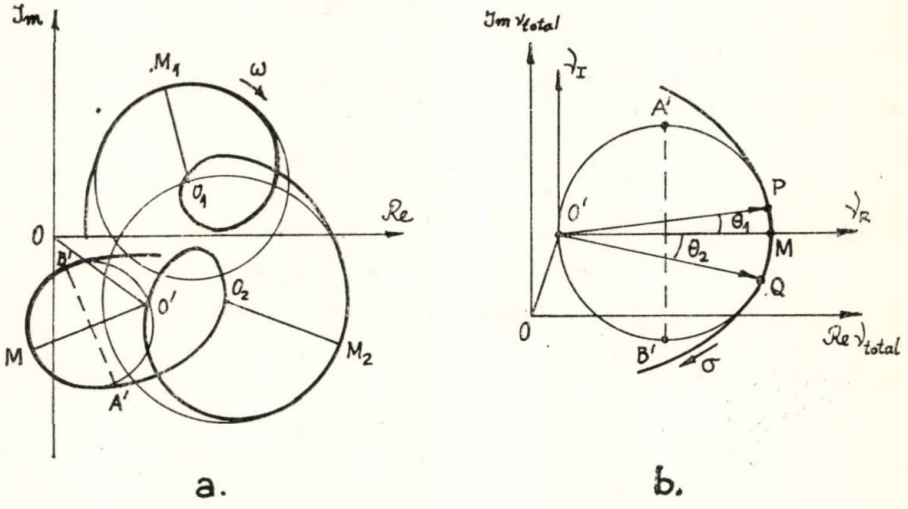


Fig. 8

În cazul existenței mai multor moduri de vibrație, diagrama polară este formată din mai multe bucle, cîte una pentru fiecare mod de vibrație (fig. 8*a*). Punctul M, definit de ω_n, se alege pe diagrama polară a răspunsului sistemului în zona unde $d\theta/d\omega$ este maxim. Prin punctele fiecărei bucle (determinate pe baza datelor experimentale) se trasează „cel mai potrivit" cerc, care să aproximeze cît mai bine punctele din vecinătatea rezonanței. Răspunsul maxim va fi dat de diametrul $O'M$ al acestui cerc, unde O' este „originea deplasată" a vectorului modulului de vibrație respectiv, vectorul OO' reprezentînd contribuția altor moduri de vibrație la răspunsul în modul respectiv. Diametrul perpendicular pe $O'M$ intersectează cercul în „punctele de putere jumătate" A' și B', de pulsații ω_1 și ω_2. Raportul de amortizare se determină apoi cu relațiile (27) și (28).

Pentru diagrame polare de forma celei din figura 8*b*, pe care nu se pot citi valorile ω_1 și ω_2, raportul de amortizare nu se poate calcula cu relațiile (27) sau (28). Se duc vectorii $O'P$ și $O'Q$, care fac unghiurile θ_1 și θ_2 cu diametrul $O'M$ și se notează cu ω_P și ω_Q pulsațiile corespunzătoare punctelor P și Q. Dacă aceste puncte sînt foarte apropiate de punctul M, atunci pe baza relației (36) se poate scrie [4]

$$\left[\frac{d\theta}{d\sigma}\right]_{\sigma=1} \cong \frac{\theta_2 - \theta_1}{\sigma_Q - \sigma_P} = -\frac{1}{2\zeta} \tag{53}$$

sau

$$2\zeta = \frac{\sigma_Q - \sigma_P}{\theta_1 - \theta_2} = \frac{1}{\theta_1 - \theta_2} \frac{\omega_Q - \omega_P}{\omega_n} \left(1 + \frac{\omega_n^2}{\omega_P \omega_Q} \right) \cong \frac{2}{\theta_1 - \theta_2} \frac{\omega_Q - \omega_P}{\omega_n}.$$

Rezultă expresia raportului de amortizare

$$\zeta = \frac{\omega_Q - \omega_P}{\omega_n} \frac{1}{\theta_1 + |\theta_2|}. \tag{54}$$

O altă expresie se poate deduce pe baza figurii 9. Vectorii OP şi OQ intersectează tangenta în M la cerc în punctele S şi T. Conform relaţiei unghiului de fază (17)

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{1 - \sigma_P}{2\zeta}, \quad \operatorname{tg} |\theta_2| = \frac{\sigma_Q - 1}{2\zeta}, \tag{55}$$

de unde rezultă

$$\zeta = \frac{\sigma_Q - \sigma_P}{2(\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} |\theta_2|)} = \frac{\sigma_Q - \sigma_P}{2} \frac{OM}{ST}. \tag{56}$$

Dacă $\theta_1 = \theta_2 = \theta$,

$$\zeta = \frac{\sigma_Q - \sigma_P}{4 \operatorname{tg} \theta} = \frac{\omega_Q - \omega_P}{4\omega_n} \left(1 + \frac{\omega_n^2}{\omega_P \omega_Q} \right) \operatorname{cotg} \theta. \tag{57}$$

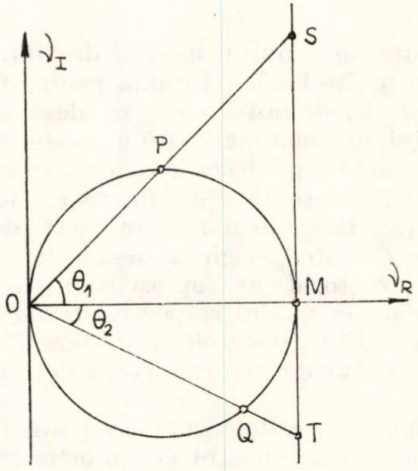


Fig. 9

Dacă unghiul θ se alege mic, atunci $\omega_P \omega_Q \cong \omega_n^2$, iar raportul de amortizare este dat de expresia [9]

$$\zeta = \frac{\omega_Q - \omega_P}{2\omega_n} \operatorname{cotg} \theta. \tag{58}$$

Metoda diagramei polare a răspunsului, folosită împreună cu criteriul Kennedy-Pancu de localizare a rezonanței, este cea mai precisă dintre metodele prezentate. Chiar în cazul unei izolări imperfecte a modului de vibrație studiat, cercul trasat prin punctele curbei de răspuns din vecinătatea rezonanței oferă toate informațiile necesare, eliminînd partea din răspuns ce reprezintă contribuția altor moduri. După determinarea frecvenței de rezonanță în zona unde raza vectoare parcurge cu viteză maximă curba răspunsului, raportul de amortizare se calculează cu una din relațiile (28), (54), (56) sau (58), iar masa generalizată se obține din relația (29) în care se mai cunosc F_0 și $|v_0|_{max}$ pe baza unei etalonări prealabile. Constanta elastică generalizată rezultă din formula (8).

8. EXCITAȚIE CU FORȚE ÎN CVADRATURĂ

8.1. METODA DIAGRAMELOR POLARE

Dacă la forța excitatoare (3) se adaugă o componentă de aceeași pulsație și de amplitudine proporțională cu F_0, însă defazată cu $+90^0$ sau -90^0 față de aceasta, expresia forței perturbatoare totale va fi

$$F(t) = F' + jF'' = (1 + j\lambda) F_0 e^{j\omega t}, \tag{59}$$

unde $\lambda = F''/F'$ este raportul dintre amplitudinile componentelor în cvadratură și în fază. Funcția de răspuns în frecvență (15) devine

$$\nu = \frac{1 + j\lambda}{2\zeta + j(\sigma - 1)}. \tag{60}$$

Partea reală și cea imaginară ale acestei funcții au expresiile

$$\nu_R = \frac{2\zeta - \lambda(1 - \sigma)}{4\zeta^2 + (1 - \sigma)^2}, \quad \nu_I = \frac{2\zeta\lambda + (1 - \sigma)}{4\zeta^2 + (1 - \sigma)^2}. \tag{61}$$

Dacă se elimină σ între cele două expresii (61), rezultă ecuația locului geometric al vîrfului vectorului ν în planul complex

$$\left(\nu_R - \frac{1}{4\zeta}\right)^2 + \left(\nu_I - \frac{\lambda}{4\zeta}\right)^2 = \frac{1 + \lambda^2}{16\zeta^2}, \tag{62}$$

reprezentat în figura 10 prin cercul $(\overline{C})$. Pe aceeași figură s-a trasat și cercul (C) de ecuație (48) corespunzător valorii $\lambda = 0$ în (62).

Pentru $\lambda > 0$, centrul cercului $\overline{O}_1$ este situat în semiplanul imaginar pozitiv, iar pentru $\lambda < 0$, în semiplanul imaginar negativ. Rezonanța apare în punctul $\overline{M}$, unde $\sigma = \sigma_n = 1$. Diametrul la rezonanță este $O\overline{M} =$

$=(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}/2\zeta$ şi face un unghi arctgλ cu semiaxa reală pozitivă. La o valoare oarecare σ a variabilei de frecvenţă, vectorul $\overline{OP}$ are un modul

$$|\nu| = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\sqrt{4\zeta^2+(1-\sigma)^2}} \tag{63}$$

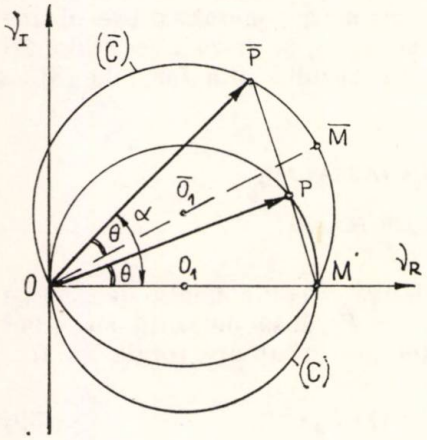


Fig. 10

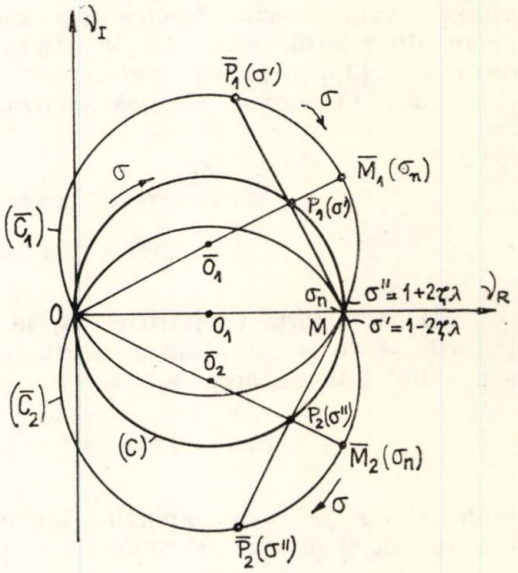


Fig. 11

şi un unghi de fază

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\lambda + \dfrac{1-\sigma}{2\zeta}}{1-\lambda\dfrac{1-\sigma}{2\zeta}}. \tag{64}$$

Cercul $(\overline{C})$ intersectează cercul (C) pe axa reală în punctul M, care pe cercul $(\overline{C})$ corespunde unei valori

$$\sigma'' = 1 + 2\zeta\lambda, \tag{65}$$

deci unei pulsaţii

$$\omega'' = \omega_n(\zeta\lambda + \sqrt{\zeta^2\lambda^2+1}), \tag{66}$$

unde ω_n şi ω'' sînt pulsaţiile corespunzătoare punctului de intersecţie M pe cercul (C), respectiv pe cercul $(\overline{C})$ [10].

Dacă pe aceeaşi diagramă se trasează cercurile de parametri $\pm\lambda$, ambele intersectează cercul (C) în punctul de rezonanţă M (fig. 11).

Pulsația corespunzătoare punctului M pe cercul $(\overline{C}_1)$ este dată de expresia (66), iar cea a punctului M de pe cercul $(\overline{C}_2)$ este

$$\omega' = \omega_n(\sqrt{\zeta^2\lambda^2 + 1} - \zeta\lambda) \tag{67}$$

pentru o valoare a variabilei de frecvență $\sigma' = 1 - 2\zeta\lambda$. Din relațiile (66) și (67) rezultă o nouă expresie a raportului de amortizare [11]

$$\zeta = \frac{1}{\lambda}\,\frac{\omega'' - \omega'}{2\omega_n}. \tag{68}$$

Dacă cercurile $(\overline{C}_1)$ și $(\overline{C}_2)$ se trasează pentru $\lambda = \pm 1$, atunci punctul M va coincide cu punctele de putere jumătate, de pulsație ω_2 pe cercul $(\overline{C}_1)$, respectiv ω_1 pe cercul $(\overline{C}_2)$. Relația (68) devine (28).

Dubla intersectare a cercului de bază (C) duce la o localizare precisă a punctului de rezonanță. Pulsațiile ω', ω_n, ω'' corespund unor raze vectoare egale, deci măsurările se fac la viteze de amplitudine egală și la forțe variabile, ceea ce face ca metoda să dea rezultate bune și în cazul sistemelor neliniare. Deoarece sînt suficiente cîteva puncte de pe cele trei cercuri situate în vecinătatea rezonanței, metoda este aplicabilă sistemelor cu frecvențe proprii apropiate.

8.2. METODA LINIILOR DE FRECVENȚĂ CONSTANTĂ [11]

În figura 12 s-au trasat diagrame polare ale funcției de răspuns în frecvență ν (60) pentru diferite valori ale parametrului $\lambda = F''/F'$. Toate cercurile intersectează diagrama polară $\lambda = 0$ în punctul M, care pe acest cerc definește pulsația de rezonanță ω_n. Orice dreaptă Δ care trece prin punctul M, intersectează cercurile în puncte $P_i(i = 1, 2, 3, \ldots)$ avînd $\sigma = \text{const.}$, deci aceeași pulsație. Ecuația acestor drepte se obține eliminînd parametrul λ între relațiile (61). Rezultă

$$\nu_I = \frac{2\zeta}{\sigma - 1}\left(\nu_R - \frac{1}{2\zeta}\right), \tag{69}$$

deci drepte care trec prin punctul M $(1/2\zeta, 0)$ și au o pantă $m = 2\zeta/(\sigma - 1)$, fiind perpendiculare pe vectorul OP, căruia îi corespunde unghiul de fază (17).

Valoarea lui λ care corespunde punctului M pe o dreaptă Δ de parametru σ este

$$\lambda_M = \frac{1 - \sigma}{2\zeta}, \tag{70}$$

deci, conform relației (17), $\lambda_M = \operatorname{tg}\theta$, unde θ este unghiul între dreptele P_1M și R_1M (sau între OP și axa reală). După determinarea pulsației de

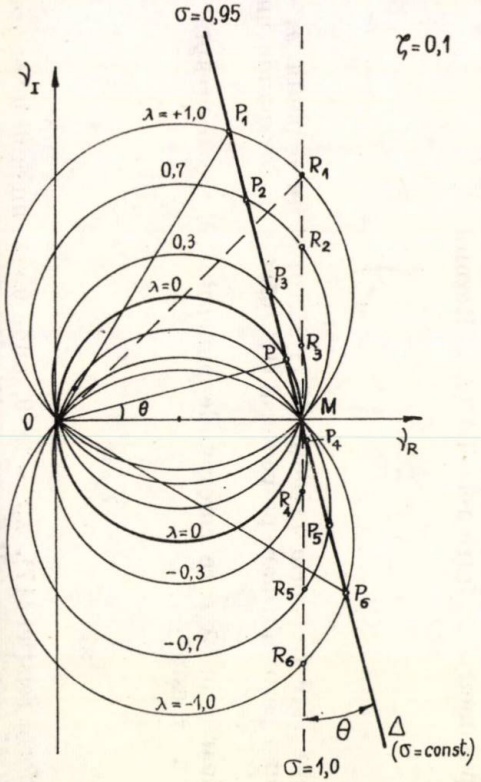

σ=0,95
ζ=0,1
λ=+1,0
0,7
0,3
λ=0
λ=0
−0,3
−0,7
λ=−1,0
P1
P2
P3
P
P4
P5
P6
R1
R2
R3
R4
R5
R6
M
0
θ
θ
Δ
(σ=const.)
σ=1,0

Fig.12

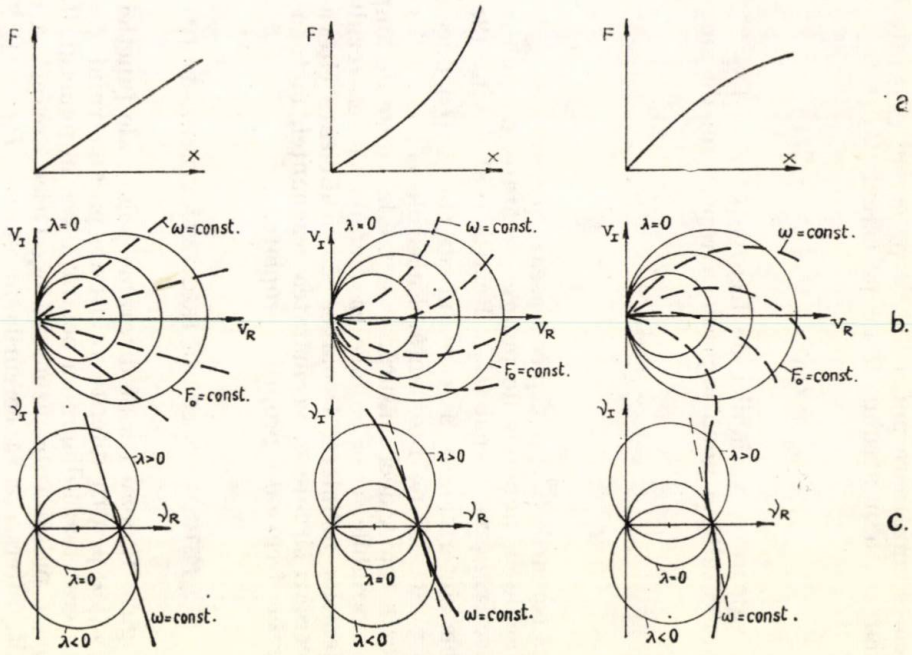

F
x
a
λ=0
ω=const.
F₀=const.
λ>0
λ<0
b.
c.

Fig. 13

rezonanță la intersecția dreptei $\sigma = \text{const.}$ cu cercul $\lambda = 0$, raportul de amortizare se poate calcula din relația

$$\zeta = \frac{1 - \sigma}{2\lambda_M} = \frac{1}{2\lambda_M}\left(\frac{\omega_n}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_n}\right). \tag{71}$$

8.3. METODA FORȚELOR ÎN CVADRATURĂ ÎN CAZUL SISTEMELOR NELINIARE

În cazul sistemelor neliniare, experimental se observă o distorsionare a liniilor de frecvență constantă, după cum se arată în figura 13, ceea ce face ca aplicarea metodei de mai sus să ducă la erori.

Pentru fiecare tip de curbă caracteristică a elementului elastic al sistemului (fig. 13*a*), în figura 13*b* s-au trasat diagramele polare ale vitezei, pentru diferite valori ale amplitudinii forței excitatoare (linie continuă) [12]. La sisteme cu caracteristica liniară, liniile de frecvență constantă (linie întreruptă) sînt drepte concurente în origine. La sisteme cu caracteristica tare, liniile $\omega = \text{const.}$ sînt curbate în sens trigonometric, iar la sisteme cu caracteristica slabă — sînt curbate în sens orar. Aceasta face ca liniile $\omega = \text{const.}$ din cazul excitării cu forțe în cvadratură să fie distorsionate ca în figura 13*c*.

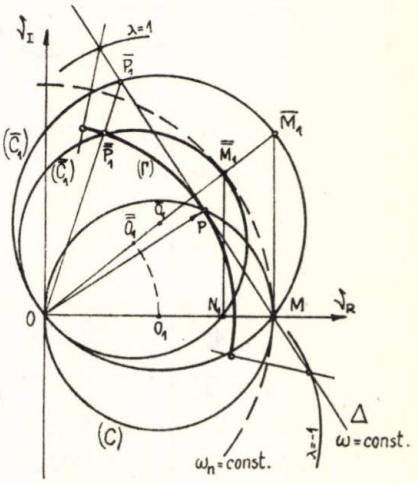
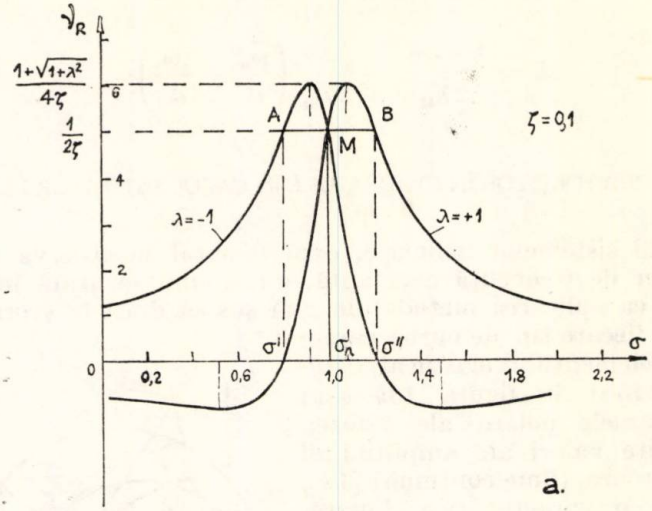


Fig. 14

Localizarea punctului de rezonanță pe cercul $\lambda = 0$, prin intersecția cu două cercuri de parametri $\pm\lambda$ (fig. 11), poate fi eronată în cazul sistemelor neliniare cu amortizare mare, deoarece se folosesc cercuri de răspuns trasate pentru forțe excitatoare de amplitudini diferite [F_0 și [$F_0 (1 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}$], iar în punctul respectiv se realizează menținerea constantă a amplitudinii vitezei, în locul amplitudinii deplasării. Pentru evitarea acestui inconvenient, se recomandă următoarea metodă (fig. 14).

Se trasează cercul (C) care corespunde răspunsului în cazul excitației cu o forță (3) fără componentă în cvadratură. La o anumită valoare a frecvenței excitatoare — care se menține constantă — se introduc componente în cvadratură, de amplitudine $\lambda_i F_0$ ($i = 1,2,3,\ldots$). Prin aceasta, forța totală devine $F_i = (1 + j\lambda_i) F_0 e^{j\omega t}$, avînd o amplitudine $|F_i| = F_0 (1 + \lambda_i^2)^{\frac{1}{2}}$, iar locul geometric ($\bar{C}_1$) al vîrfului vectorului funcției de răspuns este dat de ecuația (62).

Pentru a realiza o încercare sub forță constantă în modul, dar de fază variabilă, se micșorează de fiecare dată forța excitatoare în raportul


γ_R
$\frac{1+\sqrt{1+\lambda^2}}{4\zeta}$
$\frac{1}{2\zeta}$
6
4
2
0
A
B
M
$\zeta = 0{,}1$
$\lambda = -1$
$\lambda = +1$
σ'
σ_R
σ''
σ
0,2
0,6
1,0
1,4
1,8
2,2
a.

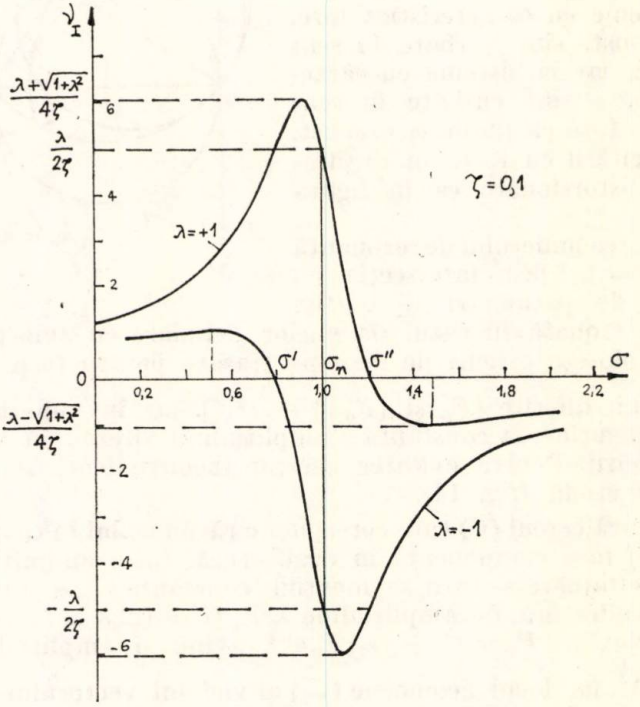

γ_I
$\frac{\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}}{4\zeta}$
$\frac{\lambda}{2\zeta}$
6
4
2
0
$\zeta = 0{,}1$
$\lambda = +1$
σ'
σ_R
σ''
σ
0,2
0,6
1,0
1,4
1,8
2,2
$\frac{\lambda-\sqrt{1+\lambda^2}}{4\zeta}$
-2
-4
$-\frac{\lambda}{2\zeta}$
-6
$\lambda = -1$

Fig. 15

$(1 + \lambda_i^2)^{-\frac{1}{2}}$. Cercurile $(\overline{C}_1)$ de ecuație (62) se transformă în cercurile $(\overline{\overline{C}}_1)$ de ecuație

$$\left(\nu_R - \frac{1}{4\zeta\sqrt{1+\lambda^2}}\right)^2 + \left(\nu_I - \frac{\lambda}{4\zeta\sqrt{1+\lambda^2}}\right)^2 = \frac{1}{16\zeta^2}. \tag{72}$$

Locul geometric al extremității $\overline{\overline{P}}_1$ a vectorului funcției de răspuns (cînd λ_i variază, iar ω = const.) este un arc de cerc (Γ) de ecuație

$$\nu_R^2 + \nu_I^2 = \frac{1}{4\zeta^2 + (1-\sigma)^2}, \tag{73}$$

deci cu centrul în origine și de rază $O\overline{\overline{P}}_1 = OP = |\nu|_{\lambda=0} = (4\zeta^2 + (1-\sigma)^2)^{-\frac{1}{2}}$, avînd un unghi la centru de 90°. Dacă se lucrează la frecvența de rezonanță, acest arc de cerc este tangent cercului $\lambda = 0$ în punctul M. Arcul de cerc (Γ) intersectează cercul $\lambda = 0$ în punctul P, în care este și tangent la dreapta Δ, definită de același parametru ω = const.

Deoarece punctele de pe arcul de cerc (Γ) au pulsația constantă ω = const. și sînt egal depărtate de origine, $|\nu|$ = const., deci amplitudinea vitezei $|v_0|$ = const., căci trasarea lui s-a făcut menținînd constantă amplitudinea forței totale, rezultă că și amplitudinea deplasării $|x_0|$ = const. pe acest cerc și deci efectul neliniarităților poate fi apreciat prin măsurări la diferite nivele $|x_0|$ = const.

Practic, pulsația de rezonanță se găsește în punctul M, la intersecția tangentei în P la arcul de cerc (Γ) cu cercul $\lambda = 0$. Diametrul OM al cercului $\lambda = 0$ face cu raza OP a arcului de cerc (Γ) un unghi θ, dat de a doua relație (17). Raportul de amortizare se obține deci din relația

$$\zeta = \frac{1-\sigma}{2\operatorname{tg}\theta} = \frac{1}{2\operatorname{tg}\theta}\left(\frac{\omega_n}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_n}\right). \tag{74}$$

8.4. METODA DIAGRAMELOR COMPONENTELOR RĂSPUNSULUI ÎN FAZĂ ȘI ÎN CVADRATURĂ

O altă variantă a metodei forțelor în cvadratură se bazează pe reprezentarea grafică a expresiilor (61). În figura 15, cantitățile ν_R și ν_I sînt reprezentate grafic în funcție de σ, pentru două valori $\pm\lambda$.

Pulsația de rezonanță ω_n se determină ca abscisa punctului de intersecție a celor două diagrame ale componentei reale ν_R (fig. 15*a*). Orizontala dusă prin M taie cele două curbe în punctele A și B, de abscise σ' și σ'', definite de relațiile (66) și (67). Aceleași valori se obțin la intersecția cu axa pulsațiilor a curbelor ν_I (fig. 15b). Raportul de amortizare se calculează cu relația (68). Metoda este precisă numai în cazul unei izolări corecte a modului de vibrație studiat.

După determinarea pulsaţiei de rezonanţă ω_n, calculul raportului de amortizare se mai poate face folosind figura 16, în care ν_R şi ν_I sînt reprezentate ca funcţii de λ, pentru o valoare dată a pulsaţiei excitatoare ω. Dreapta corespunzătoare lui ν_I taie axa orizontală în punctul de abscisă

$$\bar{\lambda} = \frac{\sigma - 1}{2\zeta}. \tag{75}$$

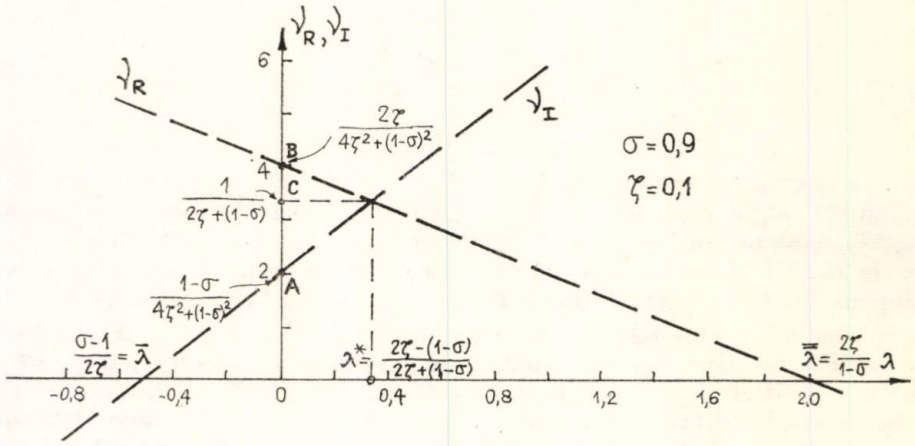


Fig. 16

Cu observaţia ca raportul ordonatelor punctelor în care cele două drepte intersectează axa verticală este

$$\frac{OA}{OB} = \frac{1 - \sigma}{2\zeta} = |\bar{\lambda}|, \tag{76}$$

rezultă următoarea expresie a raportului de amortizare:

$$\zeta = \frac{1 - \sigma}{2\,|\bar{\lambda}|} = \frac{1 - \sigma}{2}\,\frac{OB}{OA} = \frac{1}{2}\,\frac{OB}{OA}\left(\frac{\omega_n}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_n}\right). \tag{77}$$

Dacă se determină abscisa λ^* a punctului de intersecţie a celor două drepte, raportul de amortizare se calculează cu relaţia

$$\zeta = \frac{1 - \sigma}{2}\,\frac{1 + \lambda^*}{1 - \lambda^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_n}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_n}\right)\frac{1 + \lambda^*}{1 - \lambda^*}. \tag{78}$$

Folosirea relaţiilor (77) şi (78) permite evaluarea corectă a amortizării doar în cazul cînd ν_R şi ν_I nu sînt afectate de contribuţia altor moduri de vibraţie.

8.5. METODA DIAGRAMEI UNGHIULUI DE FAZĂ

În figura 17 s-a reprezentat expresia unghiului de fază (64) în funcție de σ. Se observă că

$$\alpha = 0 \qquad \text{la} \quad \sigma^{**} = 1 + 2\zeta\lambda, \tag{79}$$

$$\alpha = \pm 90^\circ \quad \text{la} \quad \sigma^{*} = 1 - \frac{2\zeta}{\lambda}. \tag{80}$$

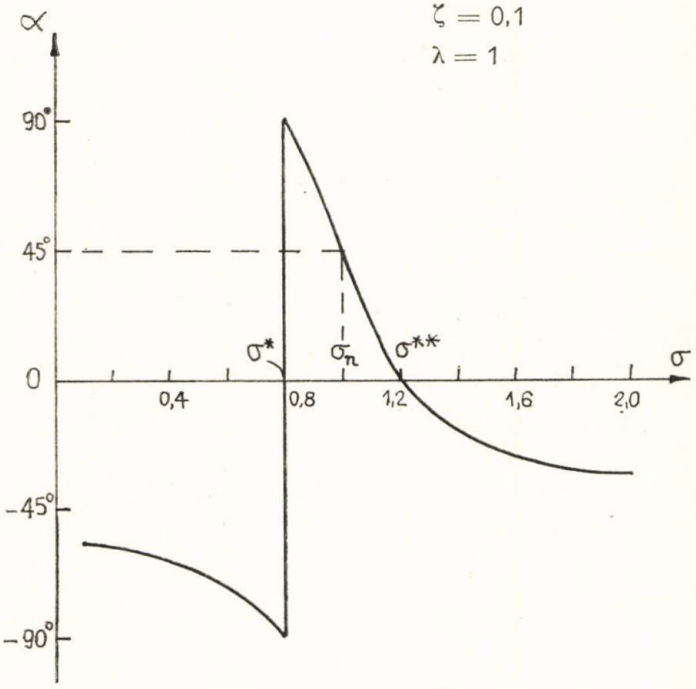


Fig. 17

Prin scăderea relațiilor (79) și (80) rezultă a nouă relație de calcul pentru raportul de amortizare:

$$\zeta = \frac{\sigma^{**} - \sigma^{*}}{2\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{\omega^{**} - \omega^{*}}{2\omega_n}\left(1 + \frac{\omega_n^2}{\omega^{*}\,\omega^{**})}\right)\frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}, \tag{81}$$

în care pulsația proprie ω_n se determină la intersecția orizontalei $\alpha = \operatorname{arctg}\lambda$ cu diagrama unghiului de fază.

9. CONCLUZII

În lucrare s-a prezentat baza analitică a metodelor de rezonanţă cu excitare într-un singur punct, cu referire în special la sistemul cu un grad de libertate excitat prin masă. S-au dezvoltat pe larg metodele folosind excitare cu forţe în cvadratură, care, deşi necesită un echipament special, permit o evaluare mai precisă a caracteristicilor dinamice ale structurilor.

Folosirea diagramelor polare conduce la rezultatele cele mai corecte, deoarece curba răspunsului este mult extinsă tocmai în vecinătatea rezonanţei. Metoda aproximării cu cercuri a buclelor hodografului vitezei elimină contribuţia altor moduri în răspunsul la rezonanţă şi permite studiul sistemelor cu frecvenţe proprii apropiate.

S-a insistat asupra analizei în domeniul frecvenţelor a vitezei răspunsului, metodele propuse fiind aplicabile atunci cînd nu se dispune de un calculator electronic şi se recurge la studiul grafic al curbelor de răspuns. Desigur, folosirea calculatoarelor analogice şi digitale permite aplicarea metodei puterii complexe [13] sau a metodei aproximării cu exponenţiale amortizate a răspunsului în timp [14], care, combinate cu excitarea simultană în mai multe puncte [15, 16], duc la rezultate mai precise.

Lucrările ce vor fi publicate în viitor se vor referi la determinarea formei modurilor normale de vibraţie, limitele de aplicare a criteriului Kennedy-Pancu, folosirea metodelor prezentate mai sus la studiul izolatorilor de vibraţii cu amortizare mare ($\zeta > 0{,}1$), precum şi exemple de aplicare practică a acestora.

Primită la redacţie la 19 decembrie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. R. E. D. Bishop, D. C. Johnson, *The Mechanics of Vibration*, Cambridge University Press, 1960.
2. B. M. Fraeijs de Veubeke, *Dephasages caracteristiques et vibrations forcées d'un système amorti*, Bull. Acad. Belg. Cl. Sci., *34*, 624—641 (1948).
3. C. C. Kennedy, C. D. P. Pancu, *Use of vectors in vibration measurement and analysis*, Journal of Aeronautical Sciences, *14*, 603—625 (1947).
4. D. J. Mead, *The internal damping due to structural joints and techniques for general damping measurement*, A. R. C. Rep. 19870 (1958).
5. R. E. D. Bishop, G. M. L. Gladwell, *An investigation into the theory of resonance testing*, Phil. Trans. Royal Society London, *255*, A1055, 241—273 (1963).
6. J. W. Pendered, R. E. D. Bishop, *A critical introduction to some industrial resonance testing techniques*, Journal of Mechanical Engineering Science, *5*, 345—367 (1963).
7. J. W. Pendered, *Theoretical investigation into the effects of close natural frequencies in resonance testing*, Journal of Mechanical Engineering Science, *7*, 372—379 (1965).
8. J. W. Pendered, *Single point excitation techniques in resonance testing*, Symposium IUTAM „Récents Progrès de la Mécanique des Vibrations Linéaires", Paris, 43—47 (1965).
9. D. V. Mallick, *Resonance testing of multistorey infilled frames*, Proc. 4th World Conference on Earthquake Engng., Santiago de Chile, *1*, 136—149 (1969).
10. G. de Vries, *Remarks on the analysis of the admittance curves of a mechanical structure*, La Recherche Aérospatiale, *95*, 49—55 (1963).
11. E. Mihăilescu, M. Radeş, *Dynamic structural measurement using the method of forces in quadrature*, Symposium „Experimental Techniques in Applied Mechanics" Bucharest, 21—34 (1972).

12. N. H. Hanna, S. A. Tobias, *The non-linear dynamic behaviour of a machine-tool structure*, Internat. Jnl. Machine Tool Design Research, *9*, 293—307 (1969).
13. E. Bonneau, *Determination of the vibration characteristics of a structure from the expression of the complex power supplied*, La Recherche Aérospatiale, *130*, 45—51 (1969).
14. E. F. Baird, W. B. Clark, *Recent developments in flight flutter testing in the U. S.*, 34 th Meeting of AGARD Structures and Materials Panel, Lyngby, April 1972.
15. R. C. Lewis, D. L. Wrisley, *A system for the excitation of pure natural modes of complex structure*, Journal of Aeronautical Sciences, *17*, 705—722 (1950).
16. G. de Vries, Ch. Beatrix, *General measuring processes of vibratory characteristics of lightly damped linear structures*, Progress in Aeronautical Sciences, vol. 9, Pergamon Press, Oxford & New York. 1968.

UN MOD DE REZOLVARE OPTIM AL SISTEMULUI GLOBAL DE ECUAȚII ALGEBRICE LINIARE DIN METODA ELEMENTULUI DIFERENȚIAL FINIT

de IOVĂNESCU RADU
Centrul de mecanica solidelor

Este prezentat un mod de rezolvare a sistemului de ecuații algebrice liniare din metoda elementului diferențial finit, rezolvare optimă atît din punct de vedere funcțional, cît și din punctul de vedere al memoriei cerute de programarea la un computer.

După cum a fost deja prezentată în lucrarea [1], metoda elementului diferențial finit, în cazul particular (bidimensional) al unei plăci curbe, constă în esență din următoarele :

a) Domeniul bidimensional ocupat de placă este împărțit în elemente finite sub formă de triunghiuri curbilinii, ce corespund unor triunghiuri cu laturi linii drepte, din planul coordonatelor curbilinii ale suprafeței mediane a plăcii.

b) Pentru domeniul ocupat în placă de un astfel de element finit se aleg pentru deplasări anumite reprezentări, sub forma unor combinații liniare de funcții elementare date. Coeficienții acestor combinații liniare — în număr de douăzeci și patru pentru fiecare element — constituie necunoscutele problemei.

c) Folosind reprezentările alese pentru deplasări, pe baza ecuațiilor uneia dintre teoriile liniare de placă curbă, pot fi calculate în orice punct al frontierei elementului deplasarea, rotirea, forța și momentul corespunzătoare. Atunci, pentru fiecare latură a unui element finit, pot fi evaluate douăsprezece mărimi caracteristice :

— trei componente ale deplasării medii ;
— trei componente ale rotirii medii ;
— trei componente ale rezultantei ;
— trei componente ale momentului rezultant, calculat în raport cu mijlocul laturii (sau, eventual, în raport cu centrul triunghiului).

d) Sistemul global de ecuaţii algebrice liniare, necesar pentru determinarea tuturor necunoscutelor, se obţine prin impunerea condiţiilor :

— cîte şase condiţii de echilibru pentru fiecare element finit (trei pentru rezultantele pe laturi şi rezultanta forţelor exterioare ; trei pentru momentele rezultante pe laturi şi momentul rezultant exterior, calculate relativ la centrul triunghiului) ;

— cîte douăsprezece condiţii de continuitate, pe fiecare din laturile ce separă două elemente finite vecine, pentru cele douăsprezece mărimi caracteristice ;

— cîte şase condiţii de margine pe fiecare din laturile de element finit ce fac parte din frontiera domeniului, pentru şase din cele douăsprezece mărimi caracteristice.

Dacă se face un calcul simplu, se poate constata concordanţa dintre numărul total al necunoscutelor şi cel al ecuaţiilor. De asemenea, se observă că, pentru un număr mare de elemente finite, sistemul global de ecuaţii ia proporţii, rezolvarea lui devenind incomodă chiar pentru un computer.

În cele ce urmează vom prezenta un mod de rezolvare a acestui sistem, care înlătură acest inconvenient, mod de rezolvare la care se pretează foarte bine metoda elementului diferenţial finit.

Vom începe remarcînd că, prin impunerea celor şase condiţii de echilibru pentru un element finit, şase din cele douăzeci şi patru de necunoscute corespunzătoare acestui element se vor putea exprima în funcţie de celelalte optsprezece. În consecinţă, în raţionamentele ce vor urma, vom considera orice element finit ca depinzînd numai de optsprezece necunoscute.

Vom împărţi elementele finite, din punctul de vedere al poziţiei lor în domeniul de studiat, în două categorii :

— elemente interioare, ale căror laturi sînt toate situate la interiorul domeniului ;

— elemente marginale, care au o latură situată pe frontiera domeniului.

Deoarece elementelor finite marginale le putem impune şase condiţii de margine, în cele ce urmează vom considera elementele marginale ca depinzînd numai de douăsprezece necunoscute.

Atunci, considerînd elementele finite interioare ca depinzînd de optsprezece necunoscute, iar elementele finite marginale ca depinzînd de douăsprezece necunoscute, ne mai rămîn de impus doar condiţii de continuitate. Relativ la impunerea acestor condiţii pe frontiera comună a două elemente finite adiacente, distingem următoarele trei situaţii :

1. Cele două elemente finite vecine sînt marginale. Atunci, impunînd cele douăsprezece condiţii de continuitate, putem exprima cele douăsprezece necunoscute ale unuia din elemente în funcţie de necunoscutele celuilalt.

2. Cele două elemente vecine sînt unul marginal, altul interior. În acest caz, impunerea condiţiilor de continuitate permite fie exprimarea celor douăsprezece necunoscute ale elementului marginal funcţie de necunoscutele elementului interior, fie exprimarea a douăsprezece dintre necunoscutele elementului interior în funcţie de celelalte şase necunoscute ale sale şi de necunoscutele elementului marginal.

3. Cele două elemente vecine sînt interioare. Impunerea condițiilor de continuitate va permite exprimarea oricăror douăsprezece necunoscute ale unuia dintre elemente în funcție de celelalte șase necunoscute ale sale și de necunoscutele celuilalt element.

Odată împărțit domeniul în elemente finite și alese reprezentările pentru deplasări, rezolvarea unei probleme de placă curbă prin metoda elementului diferențial finit revine la următoarele:

— considerarea pe rînd a tuturor elementelor finite ce compun domeniul, cu impunerea condițiilor de echilibru și de margine (pentru elemente marginale);

— impunerea condițiilor de continuitate pe laturile ce separă perechile de elemente finite vecine;

— rezolvarea sistemului global de ecuații algebrice liniare care rezultă prin impunerea condițiilor de mai sus.

Aceste trei faze ale rezolvării pot fi realizate simultan dacă se alege un anumit mod optim de parcurgere a rețelei de elemente finite. Acest mod de parcurgere, care permite realizarea unor programe de calcul economice din punct de vedere funcțional și al memoriei, este axiomatizat în cele ce urmează.

A. Procesul este compus din etape, în fiecare etapă plecîndu-se succesiv din toate elementele finite la care s-a ajuns în etapa anterioară.

B. Plecarea dintr-un element finit presupune considerarea tuturor elementelor adiacente, cu excepția celui prin care s-a ajuns în etapa anterioară la acest element.

C. Prima etapă constă din considerarea unui element marginal.

Vom prezenta acum modul în care, odată cu parcurgerea elementelor, se realizează impunerea condițiilor de continuitate și simultan rezolvarea sistemului global de ecuații. Pentru conciziunea acestei prezentări vom defini următoarele noțiuni:

1. Vom numi vîrf de ramificație, la un moment dat al procesului de parcurgere, orice element al rețelei care pînă la acel moment a fost considerat, dar de la care încă nu s-a plecat.

2. Vom numi necunoscute esențiale ale elementului marginal considerat în prima etapă, cele douăsprezece necunoscute ale sale rămase independente după impunerea condițiilor de echilibru și de margine. Cunoașterea acestor necunoscute permite determinarea tuturor celor douăzeci și patru de necunoscute ce caracterizează acest element.

3. Vom numi necunoscute esențiale ale unui vîrf de ramificație, acelea dintre necunoscutele diferitelor elemente considerate pînă în acel moment, a căror cunoaștere permite determinarea tuturor necunoscutelor (douăzeci și patru) corespunzătoare acestui element vîrf de ramificație.

4. Vom numi necunoscute esențiale de parcurgere la un moment dat al procesului de parcurgere, reuniunea necunoscutelor esențiale ale tuturor elementelor — vîrfuri de ramificație din acel moment.

D. Cînd se pleacă de la un element finit al rețelei cu considerarea unuia dintre elementele adiacente (vezi B), se impun și condițiile de continuitate pe latura comună.

E. În cazul cînd elementul adiacent considerat nu este vîrf de ramificație, impunerea condițiilor de continuitate conduce la douăsprezece relații între necunoscutele noului element și necunoscutele esențiale ale

elementului de plecare. Ţinînd seama de cele menţionate pentru situaţiile 1, 2 sau 3, putem afirma următoarele :

— dacă noul element finit este marginal, necunoscutele sale esenţiale vor fi aceleaşi cu cele ale elementului de plecare ;

— dacă noul element finit este interior, necunoscutele sale esenţiale vor fi aceleaşi cu cele ale elementului de plecare plus şase dintre necunoscutele proprii.

F. În cazul cînd elementul adiacent considerat este un vîrf de ramificaţie, impunerea condiţiilor de continuitate permite reducerea numărului necunoscutelor esenţiale de parcurgere cu douăsprezece.

G. Eliminarea de necunoscute esenţiale de parcurgere la întîlnirea a două vîrfuri de ramificaţie se va face în ordinea în care aceste necunoscute au apărut în procesul de parcurgere.

Procesul se va încheia întotdeauna prin întîlnirea a două vîrfuri de ramificaţie şi impunerea condiţiilor de continuitate corespunzătoare şi va conduce la un sistem de douăsprezece ecuaţii pentru cele douăsprezece necunoscute esenţiale de parcurgere rămase în final.

Această alternare între mărirea numărului de necunoscute esenţiale de parcurgere cu şase, la fiecare considerare a unui element interior şi reducerea acestuia cu douăsprezece la fiecare întîlnire a două vîrfuri de ramificaţie, face ca pe tot timpul procesului, numărul necunoscutelor esenţiale de parcurgere să fie extrem de redus comparativ cu numărul total al necunoscutelor sistemului, permiţînd o economie considerabilă de memorie.

Ar mai fi de adăugat o observaţie legată de ordinea în care într-o anumită etapă (vezi A) a procesului de parcurgere se pleacă din elementele devenite vîrfuri de ramificaţie în etapa anterioară. Din acest punct de vedere sînt posibile mai multe variante, alegerea celei mai potrivite pentru o situaţie sau alta, rămînînd la latitudinea programatorului. Una dintre aceste variante, de fapt cea care va fi folosită în exemplul care urmează, este considerarea elementelor de plecare într-o etapă, exact în ordinea în care aceste elemente au devenit vîrfuri de ramificaţie în etapa anterioară.

În încheiere, vom exemplifica modul de parcurgere şi rezolvare definit în lucrare pe o reţea formată din unsprezece elemente finite (fig. 1), punînd în evidenţă etapele (vezi A).

Etapa I. Considerăm elementul marginal *1* şi notăm cu *12a* cele douăsprezece necunoscute esenţiale ale sale (vezi 2).

Etapa II. Plecînd de la elementul *1*, sînt considerate succesiv elementele *2* şi *3*. Impunerea condiţiilor de continuitate corespunzătoare duce la definirea necunoscutelor esenţiale ale vîrfurilor de ramificaţie *2* şi *3* :

— pentru elementul *2* — necunoscutele *12a* ;

— pentru elementul *3* — necunoscutele *12a* şi *6b*, unde ultimele şase sînt necunoscute ale elementului interior *3*.

Etapa III. Plecînd de la elementul *2*, considerăm elementul *4* şi impunerea condiţiilor de continuitate pe latura comună defineşte drept necunoscute esenţiale :

— pentru elementul *4* — necunoscutele *12a*.

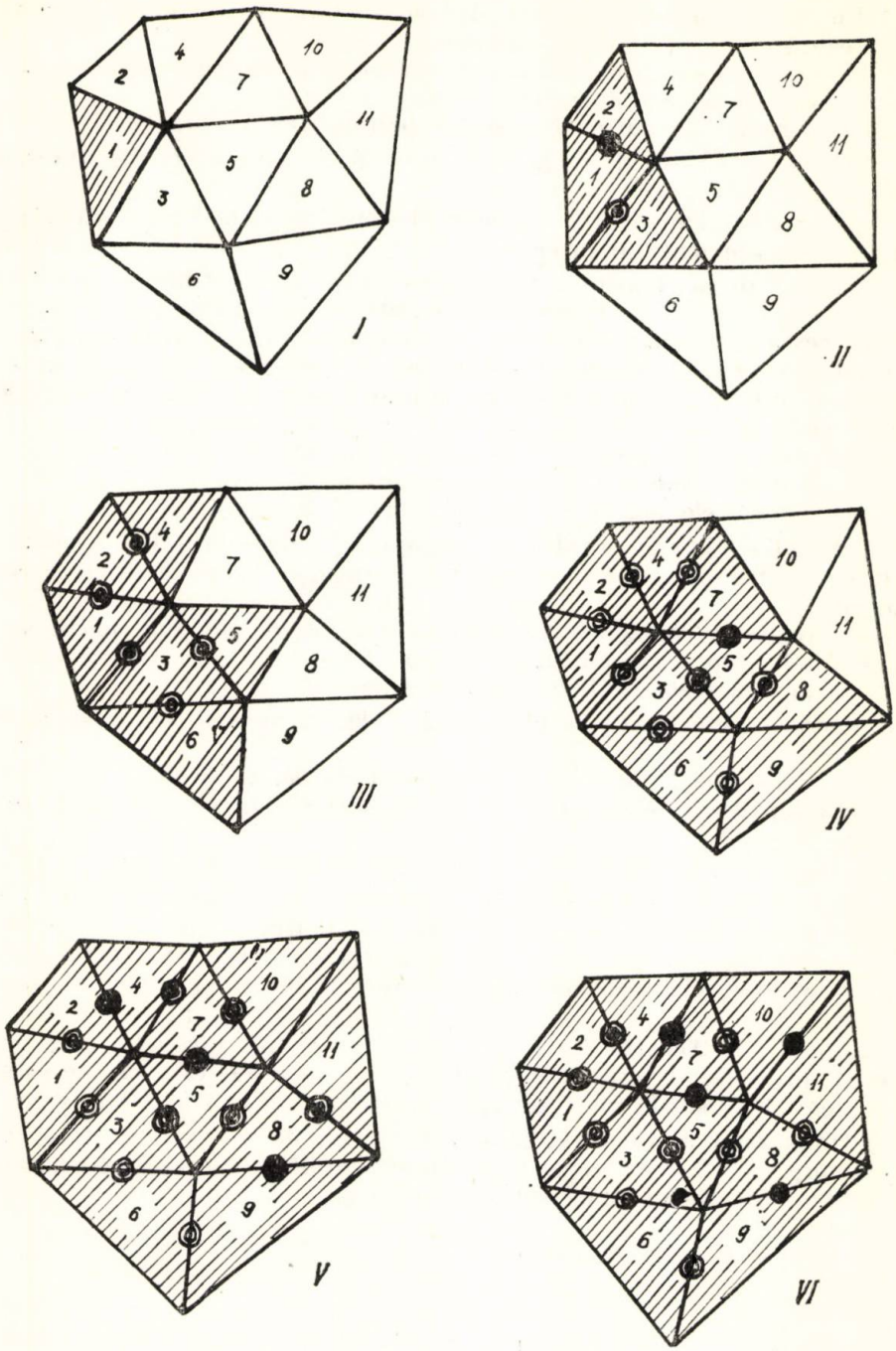


Fig. 1

◉ — I Situaţie tip E de impunere a condiţiilor de continuitate.

● — II Situaţie tip F de impunere a condiţiilor de continuitate.

Plecînd de la elementul *3*, sînt considerate succesiv elementele *5* şi *6*, rezultînd ca necunoscute esenţiale:

— pentru elementul *5* — necunoscutele *12a*, *6b* şi *6c* (necunoscutele *c* fiind proprii elementului interior *5*);

— pentru elementul *6* — necunoscutele *12a* şi *6b*.

Etapa IV. Plecînd de la elementul *4*, rezultă drept necunoscute esenţiale:

— pentru elementul *7* — necunoscutele *12a* şi *6d* (necunoscutele *d* fiind proprii elementului interior *7*).

Plecînd de la elementul *5* cu considerarea elementului *7*, ne aflăm într-o situaţie de tip F. Impunerea condiţiilor de continuitate pe latura dintre aceste două elemente, permite eliminarea a douăsprezece necunoscute esenţiale de parcurgere. Acestea vor fi necunoscutele *12a* (vezi G). Eliminînd aceste necunoscute, vom obţine drept necunoscute esenţiale pentru vîrfurile de ramificaţie din acest moment, următoarele:

— pentru elementul *5* — necunoscutele *6b*, *6c* şi *6d*;

— pentru elementul *6* — necunoscutele *6b*, *6c* şi *6d*;

— pentru elementul *7* — necunoscutele *6b*, *6c* şi *6d*.

Plecînd de la elementul *5*, cu considerarea elementului *8*, şi plecînd de la elementul *6*, cu considerarea elementului *9*, se definesc drept esenţiale

— pentru elementul *8* — necunoscutele *6b*, *6c*, *6d* şi *6c* (necunoscutele *e* fiind proprii elementului interior *8*);

— pentru elementul *9* — necunoscutele *6b*, *6c* şi *6d*.

Etapa V. Plecînd de la elementul *7* la elementul *10* rezultă ca esenţiale

— pentru elementul *10* — necunoscutele *6b*, *6c* şi *6d*.

Plecînd de la elementul *8* la elementul *11*, se definesc drept esenţiale

— pentru elementul *11* — necunoscutele *6b*, *6c* şi *6d* şi *6e*.

Plecînd de la elementul *8* la elementul *9* ne aflăm din nou într-o situaţie de tip *F*, fapt care ne permite eliminarea a încă douăsprezece necunoscute esenţiale de parcurgere şi anume *6b* şi *6c*. Cu această eliminare, necunoscutele esenţiale ale elementelor *10* şi *11* vor fi acum *6d* şi *6e*.

Etapa VI. Această etapă constă din impunerea ultimelor douăsprezece condiţii de continuitate între elementele *10* şi *11*, ceea ce reprezintă un sistem de douăsprezece ecuaţii pentru necunoscutele *6d* şi *6e*.

După cum se observă, numărul maxim de necunoscute esenţiale de parcurgere a fost de treizeci, în timp ce numărul total de necunoscute ale sistemului este de două sute şaizeci şi patru.

Primită la redacţie la 17 noiembrie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. V. VISARION, C. STĂNESCU, N. GRĂDINARU, R. IOVĂNESCU, *Element diferenţial-finit de placă curbă de rotaţie*, St. cerc. mec. apl., *6* (1972).

CERCETĂRI EXPERIMENTALE PRIVIND STABILITATEA CUPOLELOR PE CONTUR PĂTRAT

de VICTOR GIONCU
Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor, I.N.C.E.R.C., Filiala Timișoara

În lucrare se descriu experimentările făcute pe modele de plăci curbe subțiri de tip cupolă, în vederea determinării sarcinii critice de voalare. Rezultatele experimentale sînt comparate cu valorile teoretice deduse de autor și denotă o bună concordanță.

1. INTRODUCERE

Toate metodele pentru calculul structurilor conțin ipoteze suplimentare privind comportarea materialului, schema statică-geometrică și legăturile cu alte elemente ale ansamblului. Calculul este cu atît mai aproape de realitate, cu cît numărul ipotezelor efectuate este mai mic, dar dificultățile de rezolvare cresc și uneori se ajunge la imposibilitatea găsirii unei soluții matematice; de aceea în ultimul timp se face apel din ce în ce mai mult la încercarea construcțiilor cu scopul de a se obține date privind modul real de comportare. Încercarea structurilor la scară naturală este o operație foarte dificilă și costisitoare; dacă experimentările se rezumă numai la încărcările de exploatare, nu avem informații asupra mărimii încărcării limită; dacă încărcarea se face pînă la distrugerea structurii, eforturile economice sînt foarte mari și nu sînt justificate decît în cazuri cu totul speciale. De aceea au luat o mare dezvoltare încercările pe modele, care prezintă o serie de avantaje față de experimentările pe structuri la scara naturală (cost redus, încercări în condiții de laborator etc.) dar și o serie de dezavantaje (nu pot fi reproduse toate detaliile constructive, materialele nu sînt identice, efectul de scară etc.). De aceea este recomandabil ca încercările pe modele să fie efectuate într-o strînsă legătură cu considerațiile teoretice.

În [1] a fost elaborată o metodă de calcul pentru încărcarea critică de pierdere a stabilității cupolelor rezemate pe arce cu tiranți. Deoa-

rece pentru rezolvarea problemei s-au introdus o serie de ipoteze simplificatoare, au fost necesare verificări experimentale. Nu toate încercările menţionate în [1] pot fi folosite pentru verificarea metodei de calcul propusă în lucrare, deoarece sau nu conţin suficiente date care să elucideze toate aspectele, sau se referă la rezemări pe timpane şi au contur dreptunghiular. Singurul model care poate fi luat în considerare este cel din [2], [3], o cupolă pe contur pătrat rezemată pe arce cu tiranţi, realizat din mortar de ciment.

Pentru a studia influenţa condiţiilor de rezemare asupra încărcării critice s-a stabilit un program experimental, care cuprinde încercarea pînă la pierderea stabilităţii a cinci modele din mortar de ciment, avînd aceleaşi dimensiuni generale (deschidere, săgeata), dar grosimi de placă şi dimensiuni ale elementelor marginale diferite.

2. REALIZAREA MODELELOR

Dimensiunile principale ale modelelor sînt indicate în figura 1; toate au deschiderea de 160 cm şi săgeata arcelor marginale de 16 cm. Deoarece proprietăţile mecanice ale materialelor folosite sînt asemănătoare cu cele ale prototipului, similitudinea modelului se poate referi numai la dimensiunile geometrice ale construcţiei; astfel, modelele încercate repre-

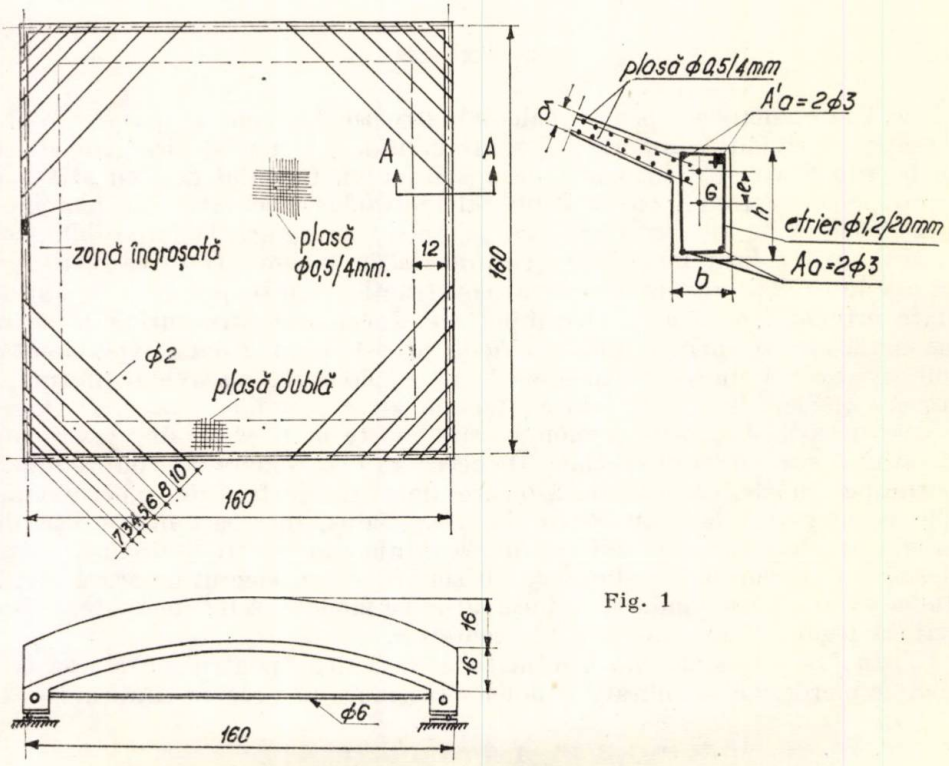


Fig. 1

zintă reducerea la scară 1/10...1/30 a unor structuri reale. De asemenea, această observaţie a permis ca dimensionarea să se facă direct pe modele, nemaifiind necesară folosirea proprietăţilor de similitudine. Calculul modelelor s-a făcut în stadiul elastic, pe baza celor stabilite în (4); s-a păstrat aceeaşi armare la toate cele cinci modele.

Realizarea cofrajului pentru turnarea modelelor a trebuit să satisfacă următoarele cerinţe:

— realizarea suprafeţei din elemente liniare, cu toate că nu este desfăşurabilă;

— obţinerea unor suprafeţe cît mai netede, deoarece la grosimile mici de placă realizate (0,5...0,7 cm) orice abatere poate afecta serios grosimea plăcii;

— posibilitatea unei decofrări uşoare.

De aceea, pe un schelet din lemn care asigură rigiditatea cofrajului şi realizează forma suprafeţei, s-au fixat pe direcţii paralele cu diagonalele plăcii curbe şipci din lemn de tei (fig. 2), prinse de scheletul de lemn cu cuie înecate, ceea ce a permis ca după realizarea suprafeţei, neregularităţile să fie înlăturate; suprafaţa a fost apoi finisată cu trei straturi de vopsea de ulei. Pentru o decofrare cît mai simplă, cofrajul a fost realizat din patru părţi, între care au fost introduse pene de lemn şi asamblate prin buloane.

Armarea plăcii curbe s-a făcut cu o plasă împletită din sîrmă cu diametrul de 0,5 mm şi cu ochiuri de 4 mm (fig. 3). Poziţionarea plasei la mijlocul grosimii plăcii s-a făcut cu ajutorul unor piese metalice de 15×15 mm cu grosimea de 2 mm, prevăzute cu găuri de 3 mm. Prinderea plasei de cofraj s-a făcut prin aşezarea ei între două astfel de plăcuţe, fixate cu ajutorul unor cuie la distanţe de 14,5 × 14,5 cm. Aceste plăcuţe au servit şi drept repere la turnarea plăcii, prin găurile lor s-au măsurat grosimile şi au fost introduse sîrmele pentru realizarea sistemului de încărcare. Armarea colţurilor plăcii s-a realizat din sîrmă cu diametrul de 2 mm, aşezate la distanţele indicate în figura 1. Arcele marginale au fost armate cu sîrmă avînd diametrul de 3 mm, iar etrierii de 1,2 mm.

Pentru confecţionarea mortarului de ciment se cereau următoarele condiţii:

— realizarea unui raport apă/ciment cît mai mic pentru a se reduce contracţia, dar în acelaşi timp să ofere o lucrabilitate cît mai bună;

— folosirea unor agregate cu dimensiuni care să permită umplerea grinzilor marginale cu dimensiuni foarte mici şi pătrunderea mortarului sub plasa de sîrmă cu ochiuri destul de dese.

Din această cauză mortarul folosit nu a putut să modeleze şi proporţia agregatelor folosite la prototip, eliminîndu-se părţile de nisip mai mari de 1,2 mm.

S-a folosit următoarea compoziţie a mortarului:

— ciment P400	1/2 părţi,
— nisip normal cu dimensiunile agregatelor cuprinse între 0,8...1,2	1 parte,
— raportul apă/ciment	0,42.

Turnarea modelului s-a făcut de la mijloc spre marginea plăcii; pentru compactarea lui s-a folosit un vibrator cu 7000 vibraţii/minut.

După terminarea turnării, placa a fost acoperită cu cîrpe umede timp de 5 zile, pentru a micșora contracția betonului.

Decofrarea modelelor s-a făcut la circa 14 zile de la turnare.

La realizarea a două modele s-au produs unele defecțiuni care au condus la scăderea încărcării limită. Astfel, plasa de armare a plăcii a trebuit să fie înnădită la mijloc, deoarece lățimea ei era de 100 cm, iar a modelului de 160 cm; la modelul PEI această înnădire nu a fost corespunzătoare și din cauza contracției betonului s-a observat o fisură în această zonă. La modelul PE IV s-a produs o segregare a mortarului la unul din arcele marginale în zona colțului. Ambele defecțiuni au fost corectate prin umplere cu mortar de ciment, dar au ieșit în evidență cu ocazia încărcării pînă la rupere.

Grosimile plăcii au fost determinate în 121 puncte, iar lățimile și înălțimile arcelor marginale în 44 puncte. În tabela 1 sînt trecute dimensiunile principale ale modelelor, ca media măsurătorilor efectuate; față de aceste valori, abaterile maxime sînt de $\pm 10\%$ și se încadrează în cele considerate drept admisibile [5]. În această tabelă sînt trecute și dimensiunile modelului AS1 [2].

Tabela 1

Caracteristicile geometrice ale modelelor

Nr. crt.	Modelul	Placa curbă			Arce		
		a cm	f cm	δ cm	h cm	b cm	e cm
1	PE I	80	16	0,50	7,70	2,29	+1,00
2	PE II	80	16	0,60	3,75	2,25	−1,00
3	PE III	80	16	0,61	3,00	2,15	−0,80
4	PE IV	80	16	0,66	4,38	2,23	−1,50
5	PE V	80	16	0,65	4,45	2,25	−1,60
6	AS1[2]	122	19,5	0,95	7,62	3,81	−3,81

Parametrii geometrici ai modelelor încercate și ai modelului AS1 sînt trecuți în tabela 2. În tabelele 1 și 2, semnul minus al excentricității de prindere a plăcii de arc înseamnă o descărcare deasupra centrului de greutate al elementelor marginale.

Tabela 2

Parametrii geometrici ai modelelor

Nr. crt.	Modelul	Placa curbă			Arcele marginale		
		$\frac{a}{f}$	$\frac{f}{\delta}$	$\frac{R}{\delta}$	$\frac{2a}{h}$	$\frac{b}{h}$	$\frac{e}{h}$
1	PE I	5,0	32,0	400	20,8	0,30	0,13
2	PE II	5,0	26,7	333	42,6	0,60	−0,27
3	PE III	5,0	25,0	312	53,3	0,71	−0,27
4	PE IV	5,0	24,2	303	36,6	0,51	−0,34
5	PE V	5,0	24,6	359	36,0	0,50	−0,36
6	AS1[2]	6,25	20,5	400	32,0	0,50	−0,50

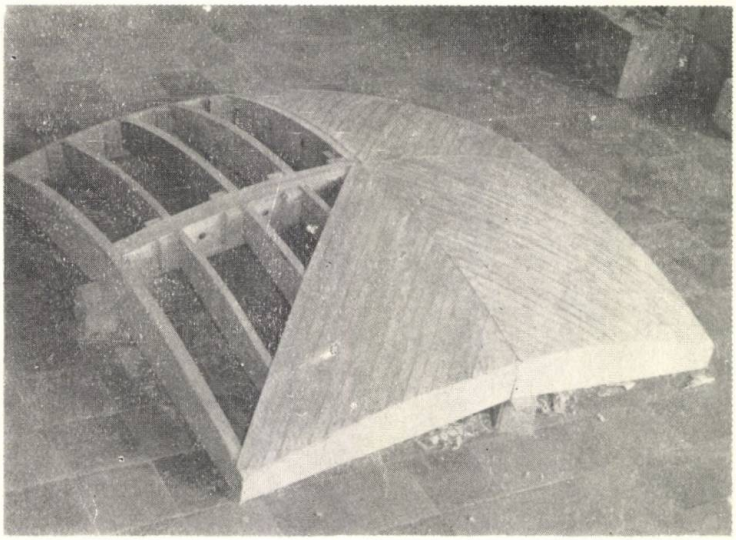


Fig. 2

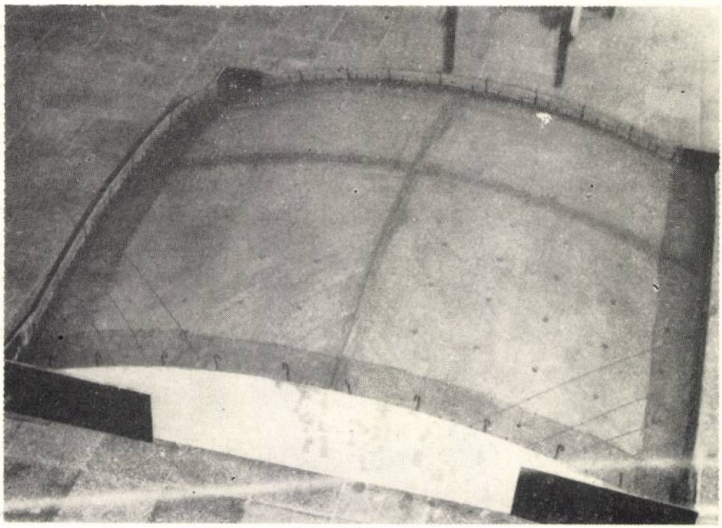


Fig. 3

Rezistențele la compresiune ale betonului au fost determinate pe cuburi de 7 × 7 × 7 cm la 28 zile de la turnare și cu ocazia încărcării și sînt media a trei încercări; determinarea modelului de elasticitate al mortarului s-a făcut conform STAS 5585—62, pe trei prisme de 10 × 10 × 30 cm, la timpul corespunzător încărcării. Aceste valori sînt trecute în tabela 3.

Tabela 3

Rezistențele și modulii de elasticitate ai mortarelor

Nr. crt.	Modelul	R_c kgf/cm²		E kgf /cm²
		28 zile	la încărcare	
1	PE I	250	320	325 000
2	PE II	300	250	250 000
3	PE III	325	345	280 000
4	PE IV	330	359	270 000
5	PE V	300	280	260 000
6	AS1[2]	—	—	315 000

Tiranții au fost alcătuiți din oțel PC 52 cu diametrul de Ø 18 și $A_z = 2{,}545$ cm².

3. ÎNCERCAREA MODELELOR

Pe patru stîlpi din beton a fost montat un cadru metalic rigid (fig.4) pe care au fost așezate modelele; de acestea a fost suspendat un sistem de pîrghii (fig. 5). Între acesta și cadrul metalic a fost intercalat un piston legat de o presă manuală; instalația de încărcare este concepută astfel ca să se autoechilibreze. Transmiterea încărcărilor la placă s-a făcut prin plăci triunghiulare cu colțurile îndoite (fig. 6), de care atîrnă sistemul de pîrghii prin intermediul unor sîrme trecute prin golurile lăsate în placă. Greutatea proprie a instalației de încărcare s-a determinat prin cîntărire și a fost de 220 kgf, ceea ce reprezintă o încărcare inițială de 90 kgf/m². Deformațiile plăcii s-au măsurat cu ajutorul fleximetrelor cu fir. Nu s-au făcut măsurători de eforturi, deoarece scopul principal al experiențelor a fost determinarea încărcării critice de pierdere a stabilității.

Modelul PE I a fost încărcat în trepte de 300 kgf/m², pînă la 1200 kgf/m², după care pasul s-a redus la 120 kgf/m². La încărcarea de 1890 kgf/m² s-au observat primele fisuri în arcele marginale. La încărcarea de 2120 kgf/m² s-a produs brusc pierderea stabilității plăcii printr-o voalare locală (fig. 7). Din figura 8 se constată că arcele marginale au rămas intacte și că suprafața de voalare este aproape circulară. În schimb, defectul de legare a plasei la mijlocul plăcii, menționat mai înainte, se poate observa prin linia de rupere din această zonă.

Modelul PE II a fost încercat în aceleași trepte ca și la modelul PE I; voalarea s-a produs la o încărcare de 1760 kgf/m², cu antrenarea arcului marginal, dovedită de apariția unei fisuri (fig. 9) la mijlocul deschiderii, pornind de la fața superioară spre cea inferioară, ceea ce dove-

deşte că nu este o fisură din încovoiere, iar înclinarea ei atestă faptul că este produsă de torsiunea din arce.

La modelele PE III şi PE IV s-a produs ruperea prematură la colţuri (fig. 10), printr-o articulaţie plastică. Deoarece s-a urmărit încărcarea de pierdere a stabilităţii, s-au reparat aceste colţuri şi modelele PE III, IV şi V au fost reîncercate, avînd marginile rezemate. Rezemarea a fost astfel realizată, încît să fie împiedicate deplasările verticale, dar rotaţiile arcelor marginale să fie libere.

Modelul PE III a fost încercat cu trepte de încărcare de 240 kgf/m^2 pînă la 1200 kgf/m^2 şi apoi în trepte de 120 kgf/m^2. Pierderea stabilităţii s-a produs brusc printr-o voalare locală la încărcarea de 1990 kgf/m^2, cu antrenarea arcelor marginale (fig. 11).

Modelul PE IV a voalat la 2240 kgf/m^2, suprafaţa de voalare cuprinzînd şi arcele marginale (fig. 12). Ruperea acestora s-a produs în zona în care a existat defecţiunea de turnare, menţionată anterior.

Modelul PE V şi-a pierdut stabilitatea la o încărcare de 2700 kgf/m^2, cu o puternică antrenare în procesul de voalare a arcelor marginale (fig. 13).

În figura 14 sînt reprezentate toate cele cinci modele încercate. După cum se observă, cu excepţia modelului PE I, suprafaţa de voalare are o formă care se apropie în măsură mai mare sau mai mică de cea circulară, se produce la colţurile plăcii curbe şi antrenează şi arcele marginale adiacente.

4. COMPARAREA REZULTATELOR TEORETICE CU CELE EXPERIMENTALE

Prin modul cum au fost realizate încercările, se disting două categorii de modele:

— rezemate pe arce cu tiranţi (AS1, PEI, PEII);

— rezemate pe arce cu deplasările verticale împiedicate (PEIII, IV, V).

Deoarece la primele trei modele intervine şi influenţa deplasării marginilor şi deoarece rapoartele $\frac{f}{a}$ (la AS1) şi $\frac{e}{h}$(la PEI, PEII) nu corespund cu cele pentru care au fost stabilite tabelele din [1], coeficienţii respectivi au fost recalculaţi folosind metoda din [4]. Rezultă valorile trecute în tabela 4.

Tabela 4

Coeficienţii adimensionali ai modelelor

	AS1	PEI	PEII
k_W^P	1,050	1,355	1,500
k_W^Δ	3,16	3,36	3,04
k_H^P	1,595	1,541	1,422
k_H^Δ	0,790	1,061	0,240

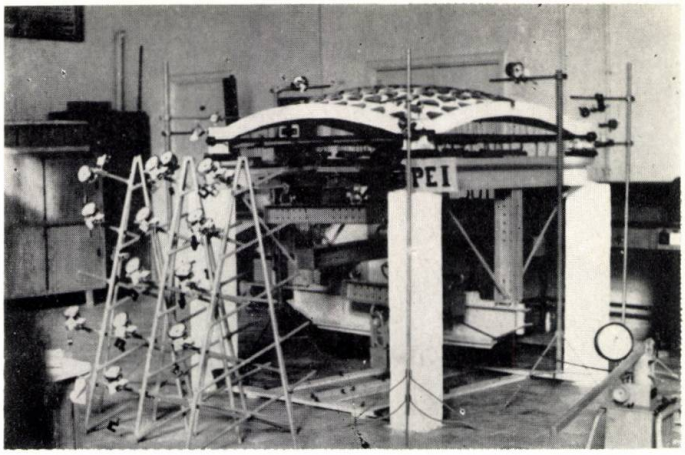


Fig. 4

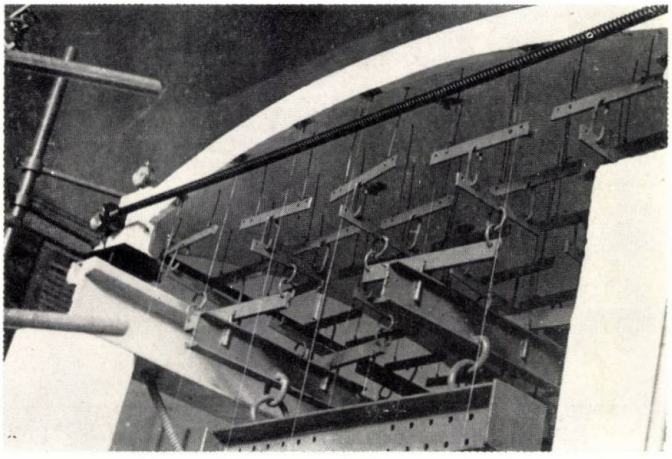


Fig. 5

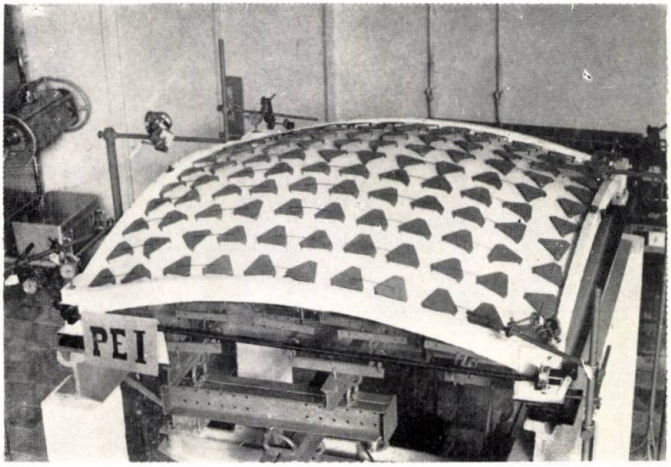


Fig. 6

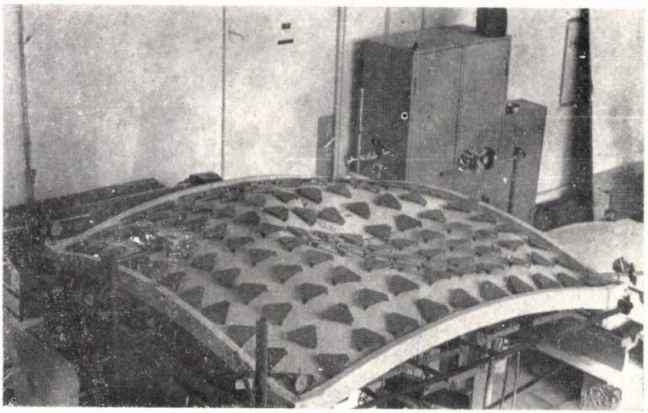


Fig. 7

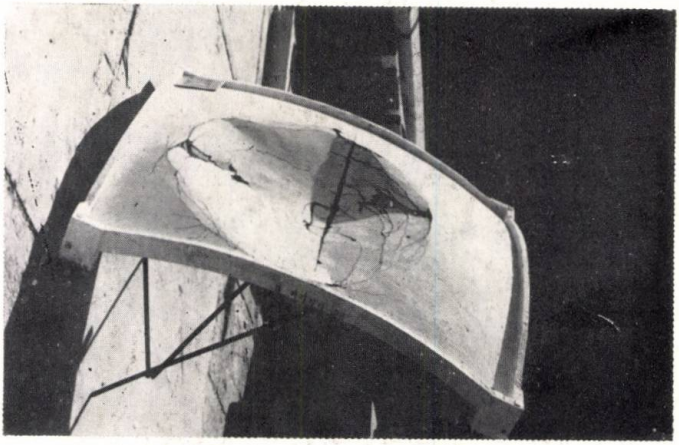


Fig. 8

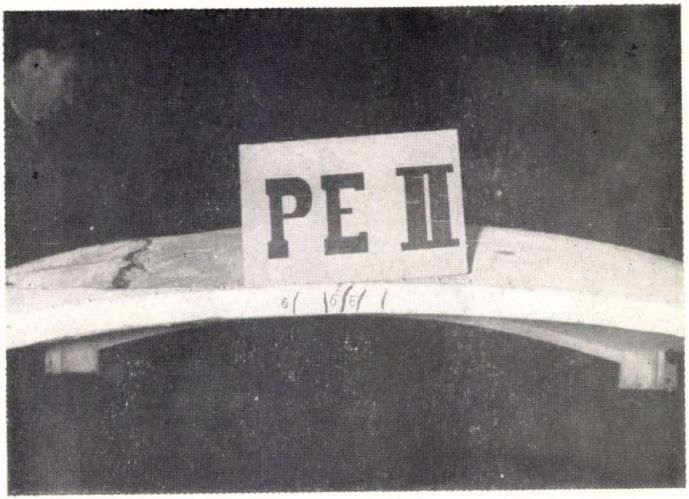


Fig. 9

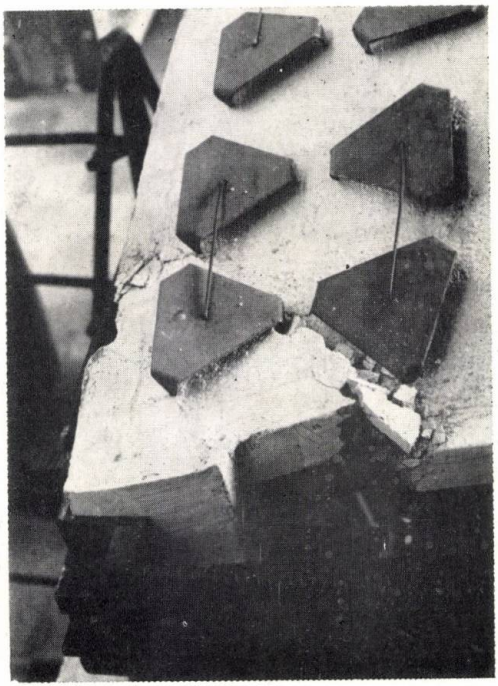


Fig. 10

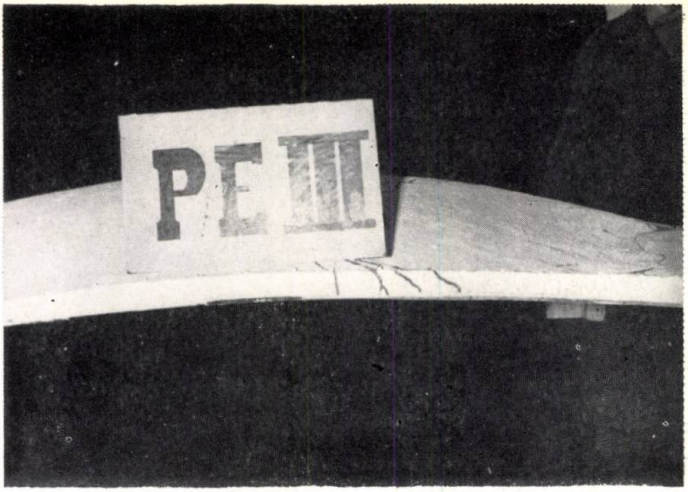


Fig. 11

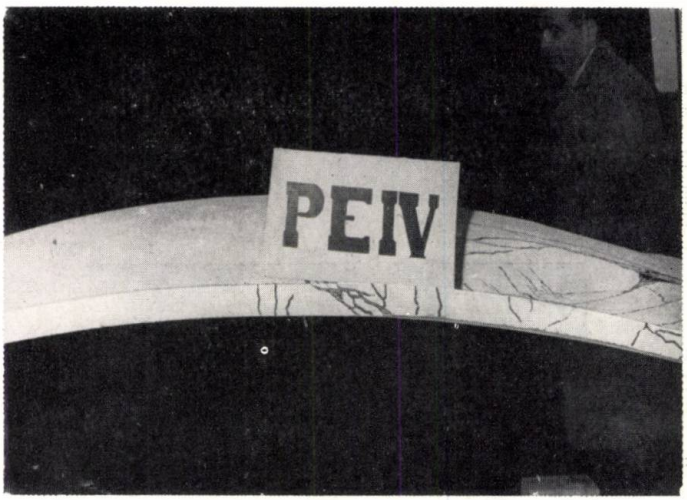


Fig. 12

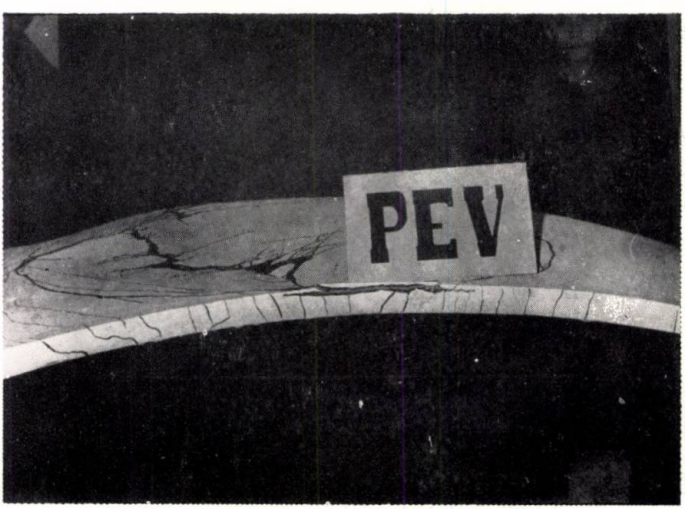


Fig. 13

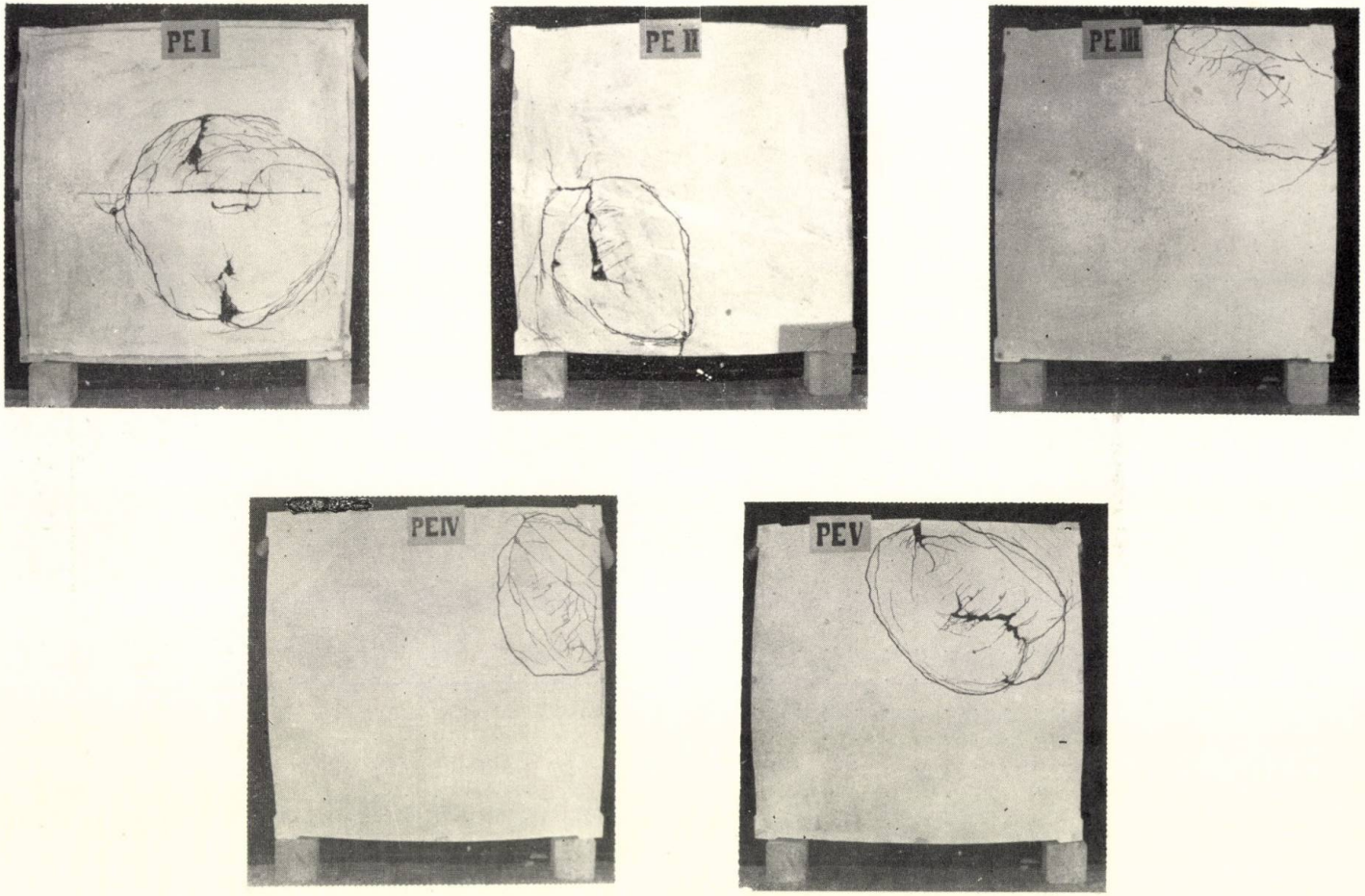


Fig. 14

a) *Modelul AS1:* din relaţiile (4.20) [1] rezultă

$$I_r^* = 5{,}53 \text{ şi } I^* = 16{,}1.$$

Din (4.22) [1]

$$\alpha = \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{I_r^*} + \frac{1{,}6}{I^*}\right)\sqrt{\frac{f}{\delta}}} = \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{5{,}53} + \frac{1{,}6}{16{,}1}\right)\sqrt{20{,}5}} = 0{,}88 < 1$$

şi prin urmare rigiditatea la răsucire a arcelor marginale influenţează capacitatea portantă. Din (4.3) [1],

$$c_\alpha = 0{,}12 + 0{,}44\ \alpha = 0{,}12 + 0{,}44 \times 0{,}88 = 0{,}507.$$

Pentru că voalarea se produce la colţuri $c = 0{,}89$.

Suprafaţa tiranţilor este de $A_z = 1{,}27$ cm^2. Din (4.50) [1]

$$n = \frac{E_z}{E} = \frac{2{,}10 \times 10^6}{0{,}315 \times 10^6} = 6{,}65\,; \quad \overline{A}_z = \frac{A_z}{a^2} = \frac{1{,}27}{122^2} = 0{,}855 \times 10^{-4},$$

iar din (4.49) [1]

$$\Delta_H = \frac{k_H^p}{k_H^\Delta + n\overline{A}_z}\frac{pa}{E} = \frac{1{,}595}{0{,}79 + 6{,}65 \times 0{,}855}10^4\frac{p_a}{E} = 2{,}46 \times 10^3\frac{p_a}{E}.$$

Deplasarea la marginea plăcii va fi din (4.45) [1]

$$W_{a\Delta} = W_a + W_\Delta = (1{,}050 + 3{,}16 \times 2{,}46) \times 10^3\frac{pa}{E} = 8{,}81 \times 10^3\frac{pa}{E},$$

iar W_0 din (4.29) [1]

$$W_0 = \frac{pa^4}{8\,Ef^2\delta} = 0{,}626 \times 10^3\frac{pa}{E}.$$

Rezultă coeficientul

$$\gamma = \frac{W_{a\Delta}}{W_0} = \frac{8{,}81}{0{,}626} = 14{,}1,$$

iar din figura 13 [1], $c_\gamma = 0{,}86$.

Încărcarea critică a sferei complete este [1]:

$$p_a = 0{,}30\ E\left(\frac{\delta}{R}\right)^2 = 0{,}30 \times 315.000\,\frac{1}{400^2} = 0{,}5900 \text{ kgf/cm}^2 = 5900 \text{ kgf/m}^2.$$

Încărcarea critică a cupolei rezemate pe arce cu tiranți este dată de (5.1) [1]

$$p_{cr\alpha\beta\gamma} = c_\alpha c_\beta c_\gamma p_{cr} = 0{,}507 \times 0{,}89 \times 0{,}86\ p_{cr} = 0{,}384\ p_{cr} = 2270\ \text{kgf/m}^2$$

Din tabelele 4 și 5 din [1], rezultă $m_e = 0{,}88$ și $k_e = 0{,}85$, iar din relația (5.2) [1]

$$p_{lim} = 0{,}88 \times 0{,}85 \times p_{cr\alpha\beta\gamma} = 0{,}75\ p_{cr\alpha\beta\gamma} = 1710\ \text{kgf/m}^2.$$

Modelul și-a pierdut stabilitatea la încărcarea $p_{exp} = 2190$ kgf/m^2.

b) *Modelul PE I:* în mod asemănător ca la modelul AS1, rezultă $I_r^* = 13{,}15$, $I^* = 105{,}5$ și $\alpha = 1{,}32 > 1$; prin urmare pierderea stabilității trebuie să se producă fără antrenarea arcelor marginale, ceea ce se observă și experimental (fig. 8 și 14). Astfel voalarea se va produce spre centrul plăcii: $c_\alpha = 0{,}56$ și $c_\beta = 1{,}00$.

Pentru influența deplasărilor verticale, se obține asemănător ca la modelul AS1

$$W_{a\Delta} = 3{,}125 \times 10^3 \frac{pa}{E}$$

și

$$\gamma = 6{,}25,$$

iar din diagrama figurii 13 [1], $c_\gamma = 0{,}925$. Rezultă pentru sfera completă, $p_{cr} = 6090$ kgf/m^2 iar pentru cupole rezemate pe arce ci tiranți: $p_{cr\alpha\beta\gamma} = 0{,}56 \times 1{,}00 \times 0{,}925 \times p_{cr} = 0{,}518\ p_{cr} = 3150$ kgf/m^2. Din tabela 4 rezultă $m_e = 0{,}88$ și având în vedere că la turnare au existat defecțiuni arătate mai sus, s-a luat $k_e = 0{,}75$. Rezultă

$$p_{lim} = 0{,}88 \times 0{,}75 \times p_{cr\alpha\beta\gamma} = 0{,}66 p_{cr\alpha\beta\gamma} = 2080\ \text{kgf/m}^2.$$

c) *Modelul PE II:* rezultă ca mai sus $I_r^* = 3{,}08$, $I^* = 6{,}87$, $\alpha = 0{,}516 < 1$ (voalarea se va produce cu antrenarea arcelor marginale, ceea ce se observă din figura 9), $c_\alpha = 0{,}347$, $c_\beta = 0{,}89$. Deplasarea plăcii fiind

$$W_{a\Delta} = 4{,}52 \times 10^3 \frac{pa}{E},$$

rezultă $\gamma = 10{,}85$ și $c_\gamma = 0{,}885$. Încărcarea critică a sferei complete este $p_{cr} = 6750$ kgf/m^2, iar a cupolei pe contur pătrat $p_{cr\alpha\beta\gamma} = 0{,}516 \times 0{,}89 \times 0{,}885\ p_{cr} = 0{,}274\ p_{cr} = 1850$ kgf/m^2. Din tabelele 4 și 5 din [1] rezultă $m_e = 0{,}93$ și $k_e = 0{,}85$, $p_{lim} = 0{,}93 \times 0{,}85 \times p_{cr\alpha\beta\gamma} = 0{,}791\ p_{cr\alpha\beta\gamma} = 1465$ kgf/m^2.

d) *Modelul PE III:* a fost încercat, aşa cum am arătat mai înainte, avînd marginile sprijinite în trei puncte intermediare. În acest caz rotirea din încovoiere la colţuri este [4]:

$$\theta_r = \frac{0{,}145\ ma^2}{EI},$$

de 4,39 ori mai mică decît cea dată de (4.7a) [1]. Prin urmare se modifică şi expresia [4.22) [1]:

$$\alpha = \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{I_r^*} + \frac{0{,}36}{I^*}\right)\sqrt{\frac{f}{\delta}}}.$$

Astfel, pentru $I_r^* = 1{,}58$ şi $I^* = 2{,}78$ rezultă $\alpha = 0{,}415 < 1{,}0$ şi pierderea stabilităţii se va produce cu antrenarea elementelor marginale. Rezultă $c_\alpha = 0{,}305$, $c_\beta = 0{,}89$ şi, deoarece marginile sînt sprijinite la deplasările verticale, $c_\gamma = 1{,}0$. Încărcarea critică a sferei complete este $p_{cr} = 8600$ kgf/m², iar cea a cupolei pe contur pătrat

$p_{cr\alpha\beta\gamma} = 0{,}305 \times 0{,}89 \times 1{,}00\ \ p_{cr} = 0{,}272\ \ p_{cr} = 2340$ kgf/m². Din tabelele 4 şi 5 [1] rezultă $m_e = 0{,}95$ şi $k_e = 0{,}85$,

$$p_{lim} = 0{,}95 \times 0{,}85\ \ p_{cr\alpha\beta\gamma} = 0{,}807\ \ p_{cr\alpha\beta\gamma} = 1890 \text{ kgf/m}^2.$$

e) *Modelul PE IV:* pentru dimensiunile din tabela 1 rezultă $I_r^* = 2{,}92$, $I^* = 8{,}15$ şi $\alpha = 0{,}686 < 1$; iar din (4.3) [1], $c_\alpha = 0{,}426$; voalarea producîndu-se la colţuri, $c_\beta = 0{,}89$ şi fără deplasări verticale ale marginilor $c_\gamma = 1$. Încărcarea critică a sferei complete este $p_{cr} = 8800$ kgf/m², iar cea a cupolei pe contur pătrat

$$p_{cr\alpha\beta\gamma} = 0{,}426 \times 0{,}89 \times 1{,}00\ \ p_{cr} = 0{,}379\ \ p_{cr} = 3340 \text{ kgf/m}^2.$$

Din tabela 4 [1] rezultă $m_e = 0{,}96$; cum modelul prezenta defecţiuni la turnare, care au ieşit în evidenţă cu ocazia încercării (se observă din figura 14 că modul de rupere diferă de celelalte modele), s-a luat $k_e = 0{,}75$. Rezultă încărcarea limită

$$p_{lim} = 0{,}96 \times 0{,}75\ \ p_{cr\alpha\beta\gamma} = 0{,}72\ \ p_{cr\alpha\beta\gamma} = 2410 \text{ kgf/m}^2.$$

f) *Modelul PE V:* pentru $I_r^* = 2{,}65$ şi $I^* = 7{,}90$, calculate cu valorile din tabela 1, rezultă $\alpha = 0{,}646 < 1$ şi $c_\alpha = 0{,}405$; de asemenea, asemănător cu celelalte modele, $c_\beta = 0{,}89$ şi $c_\gamma = 1{,}0$. Pentru sfera completă $p_{cr} = 8260$ kgf/m², iar pentru cea pe contur pătrat

$$p_{cr\alpha\beta\gamma} = 0{,}405 \times 0{,}89 \times 1{,}00\ \ p_{cr} = 0{,}361\ \ p_{cr} = 2960 \text{ kgf/m}^2.$$

Din tabelele 4 şi 5 [1] rezultă $m_e = 0{,}97$ şi $k_e = 0{,}85$, iar încărcarea limită este

$$p_{\text{lim}} = 0{,}97 \times 0{,}85\ p_{\text{cr}\alpha\beta\gamma} = 0{,}825\ p_{\text{cr}\alpha\beta\gamma} = 2440\ \text{kgf/m}^2.$$

În tabela 5 s-au trecut valorile calculate şi măsurate ale încărcărilor critice pentru cele 6 modele avute în vedere.

Tabela 5

Valori calculate şi măsurate pentru încărcările limită

Nr. crt.	Modelul	p_{cr}	$p_{\text{cr}\varkappa\beta\gamma}$	p_{lim}	p_{exp}	$\frac{p_{\text{exp}}}{p_{\text{cr}}}$	$\frac{p_{\text{exp}}}{p_{\text{cr}\alpha\beta\gamma}}$	$\frac{p_{\text{exp}}}{p_{\text{lim}}}$
		kgf/m²						
1	AS1/2/	5900	2270	1710	2190	0,371	0,965	1,281
2	PE I	6090	3150	2080	2120	0,348	0,673	1,019
3	PE II	6750	1850	1465	1760	0,261	0,951	1,201
4	PE III	8600	2340	1890	1990	0,231	0,851	1,052
5	PE IV	8800	3340	2410	2240	0,255	0,670	0,930
6	PE V	8260	2960	2440	2700	0,327	0,912	1,106

Din examinarea valorilor din tabela 6 se constată că încărcarea critică determinată experimental p_{exp} este:

a) mult mai mică decît cea a sferei complete p_{cr}, fiind numai (23... 37)% din aceasta;

b) este apropiată de cea a cupolelor pe contur patrat $p_{\text{cr}\alpha\beta\gamma}$, determinată după relaţiile din [1]; excepţie fac modelele PE I şi PE IV, la care au existat defecţiuni de turnare;

c) este mai mică decît cea a cupolelor pe contur patrat, la care se ţine seama şi de efectul imperfecţiunilor şi a neomogenităţii structurii; un singur model (PE IV) are valori mai mici, deoarece coeficientul de neomogenitate a structurii folosit nu a putut acoperi defecţiunea de la turnarea modelului.

5. CONCLUZII

Cercetările experimentale efectuate au arătat influenţa mare pe care o au condiţiile de rezemare pe margini asupra încărcării critice de pierdere a stabilităţii. Compararea cu rezultatele teoretice a confirmat foarte bine metoda aproximativă propusă în [1] pentru calculul stabilităţii cupolelor rezemate pe arce cu tiranţi.

Primită la redacţie la 2 octombrie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. V. Gioncu, *Stabilitatea elastică a cupolelor pe contur pătrat*, St. cerc. mec. apl., 197 pag.
2. S. H. Abu-Sitta, *The stresses in doubly-cuved shell roofs of positive Gaussian curvature. Thesis submitted for the degres of Doctor of Philosophy*, University College London, Martie, 1964.
3. S. H. Abu-Sitta, *Experimental studies of shell models*, IASS Congress Mexic, 1967.
4. V. Gioncu, *Comportarea și calculul cupolelor din beton armat reremate pe arce cu tiranți*, Teză de doctorat, Institutul politehnic Timișoara, 1971.
5. G. H. Haidukov, V. V. Sugaev, *The methods for testing models of concrete thin walled shell structures*, Colocviul RILEM, București, 2, p. 66—90 (1969).

STUDII ŞI CERCETĂRI TEORETICE-EXPERIMENTALE PRIVIND SECURITATEA TEHNICĂ A CAPACULUI SEMISFERIC AL UNUI RECIPIENT CILINDRIC DE MARE PRESIUNE. I

A. PAVEL

Institutul de petrol, gaze şi geologie din Bucureşti

Se prezintă rezultatele principale ale unor studii, cercetări, determinări (măsurări) şi analize tehnice, efectuate în scopul precizării condiţiilor de exploatare în continuare a capacului semisferic al unui acumulator (recipient) de mare presiune din cadrul unei centrale hidropneumatice deservind o presă de mare capacitate.
După precizarea principalelor caracteristici constructive, date de proiectare şi date de execuţie pentru agregatul acumulatorului hidropneumatic, sînt expuse cîteva consideraţii privind constatările controalelor tehnice periodice şi rezultatele mai importante ale examinărilor defectoscopice nedistructive.
Se trece apoi la determinarea prin calcul a eforturilor unitare din capacul semisferic şi a coeficienţilor de siguranţă corespunzători, precizîndu-se totodată coeficientul de slăbire al capacului respectiv. Eforturile unitare reale din capacul semisferic se stabilesc prin măsurări tensometrice, efectuate în condiţiile încercării hidraulice de presiune la rece.
Prelucrarea şi interpretarea atentă a rezultatelor obţinute permite determinarea valorilor reale ale coeficientului de slăbire al capacului semisferic, ale coeficienţilor globali de siguranţă corespunzători şi, în final, ale presiunii de lucru maxim admisibile în condiţiile unei depline securităţi tehnice a funcţionării recipientului respectiv.

1. INTRODUCERE

La solicitarea unei mari uzine constructoare de maşini, în cadrul catedrei de Maşini şi utilaj petrolier de la Institutul de petrol, gaze şi geologie din Bucureşti au fost efectuate — prin persoana autorului — o serie de studii, cercetări, determinări (măsurări) şi analize tehnice privind precizarea condiţiilor de exploatare în continuare a unuia dintre acumulatoarele (recipientele) de mare presiune ale centralei hidropneumatice deservind o presă de mare capacitate, în concordanţă cu prevederile prescripţiilor tehnice oficial în vigoare ale I.S.C.I.R. În cele ce urmează vor fi prezentate principalele rezultate care au fost evidenţiate cu această ocazie pentru capacul semisferic al recipientului respectiv, rezultate apli-

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 32, NR. 3, 1973, P. 653–668

cate neîntîrziat în activitatea practică şi confirmate în mod concludent prin exploatarea în continuare fără incidente a presei respective.

2. PRINCIPALELE CARACTERISTICI CONSTRUCTIVE, DATE DE PROIECTARE ŞI DATE DE EXECUŢIE PENTRU AGREGATUL ACUMULATORULUI HIDROPNEUMATIC

Agregatul acumulatorului hidropneumatic, a cărui schemă principială este prezentată în figura 1, constituie parte componentă importantă a centralei hidropneumatice care asigură alimentarea cu fluid de lucru sub presiune ($p_{max} = 320$ kgf/cm^2) a presei.

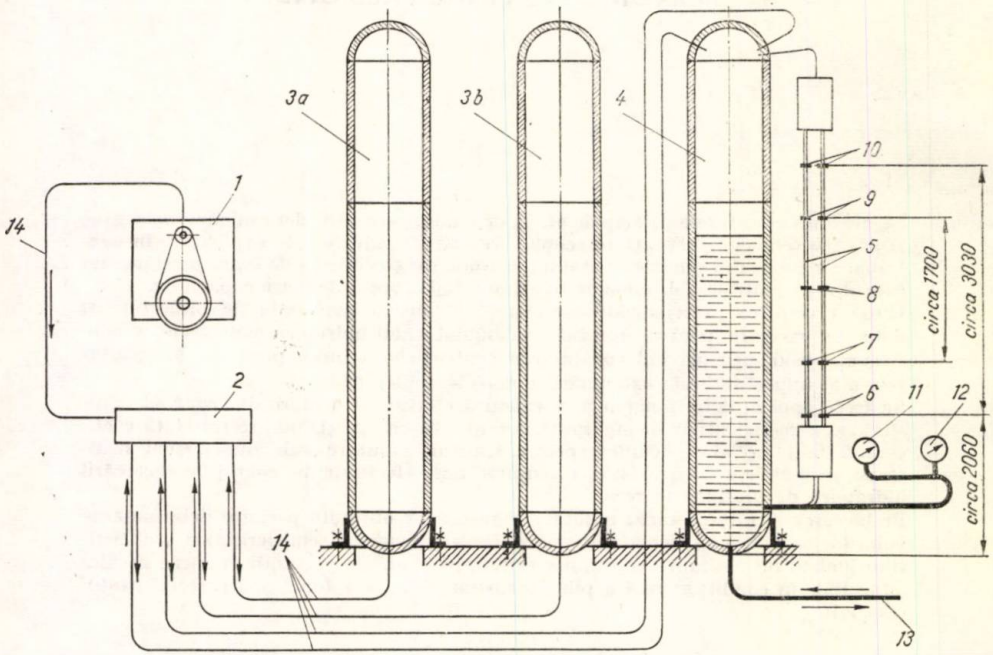


Fig. 1. — Schema principială a acumulatorului hidropneumatic: 1 — compresorul de aer, staţionar, avînd următoarele caracteristici tehnice: debit, 180 m^3/h; presiune maximă, 350 kgf/cm^2; acţionare, motor electric asincron 220/380 V, cu puterea de 75 kW şi turaţia de 980 rot/min; *2* — cutia cu cinci ventile, care serveşte drept colector de aer şi permite deconectarea din sistem a oricăruia dintre recipientele sale; *3a* şi *b* — recipientele cilindrice verticale nr. *1* şi, respectiv, nr. *2* pentru aer comprimat, identice, avînd — fiecare — o capacitate nominală $V = 9{,}9$ m^3 şi o presiune maximă de lucru (presiune nominală) $p_{max} = Pn = 320$ kgf/cm^2; *4* — recipientul cilindric vertical nr. *3* pentru fluidul de lucru (emulsie), avînd de asemenea o capacitate nominală $V = 9{,}9$ m^3 şi o presiune maximă de lucru (presiune nominală) $p_{max} = Pn = 320$ kgf/cm^2; *5* — două coloane tubulare cu contacte electrice, servind pentru controlul şi supravegherea nivelului emulsiei în recipientul nr. *3* şi avînd — fiecare — cîte cinci perechi de contacte electrice; *6* — contactele electrice ale nivelului inferior de avarie (contactele nr. 0); *7* — contactele electrice ale nivelului inferior de lucru (contactele nr. 1); *8* — contactele electrice ale nivelului intermediar de lucru (contactele nr. 2); 9 — contactele electrice ale nivelului superior de lucru (contactele nr. 3); *10* — contactele electrice ale nivelului superior de avarie (contactele nr. 4); *11, 12* — manometrele cu contacte electrice; *13* — circuitul conductelor de înaltă presiune pentru emulsie; *14* — circuitul conductelor de înaltă presiune pentru aer comprimat.

Fluidul de lucru folosit este o emulsie, preparată prin adăugarea a 21 de emulsol la 98 l de apă, în condiţiile neutralizării complete a emulsolului utilizat.

Volumul de lucru (de manevră) real al agregatului acumulatorului hidropneumatic, cuprins între nivelul superior şi cel inferior de lucru al recipientului nr. 3 (fig. 1) pentru emulsie, este de circa 1,86 m³, ceea ce reprezintă circa 18,8% din capacitatea nominală ($V = 9{,}9$ m³) a recipientului respectiv.

Căderea de presiune maxim admisibilă Δp_{max} este de 11%, aceasta însemnînd că $\Delta p_{max} = 0{,}11\ p_{max} \cong 35$ kgf/cm². Presiunea maximă de lucru la care sînt reglate manometrele cu contacte electrice ca dispozitive de securitate tehnică şi protecţie finală este $p_{st} = p_{max} + \Delta p_{max} = 320 + 35 \cong 355$ kgf/cm².

Temperatura maximă a emulsiei, la care este asigurată funcţionarea normală a sistemului, este $t_{max} = +50°C$.

Din punct de vedere constructiv, recipientele nr. *1* şi *2* pentru aer comprimat şi recipientul nr. *3* pentru emulsie sînt recipiente cilindrice verticale identice (fig. 2), echipate cu o scară interioară, care asigură accesul pentru control.

Mantaua cilindrică a celor trei recipiente este realizată din două virole de lungimi diferite, fiecare virolă fiind executată din două semivirole forjate, asamblate între ele prin sudare în baie de zgură. Sudarea virolelor, a fundului şi a capacului semisferice, în vederea realizării corpului recipientelor respective, este executată de asemenea în baie de zgură. Toate celelalte suduri sînt executate fie automat sub un strat de fondant, fie manual (electric).

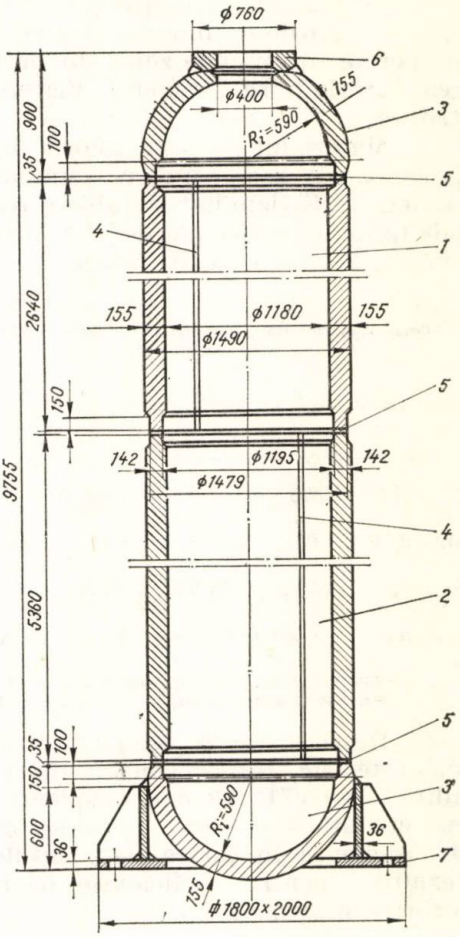


Fig. 2. — Schiţa constructivă a recipientului nr. *2* (secţiunea *A*—*A* în figura 5): *1* — virola superioară a mantalei cilindrice; *2* — virola inferioară a mantalei cilindrice; *3* — capacele (fundurile) semisferice cu parte cilindrică de trecere; *4* — cusăturile sudate longitudinale; *5* — cusăturile sudate inelare; *6* — inelul de consolidare al gurii de vizitare cu capac autoetanşat; *7* — sistemul de rezemare pe fundaţie.

Fundul şi capacul, semisferice, sînt executate prin matriţare.

Valorile proiectate ale principalelor dimensiuni ale recipientelor sînt indicate în figura 2, în care se vede de asemenea că, în dreptul cusăturilor sudate inelare, grosimea de perete proiectată se reduce de la 155 mm la 142 mm.

Valorile reale ale principalelor dimensiuni ale capacului semisferic al recipientului nr. 2, consemnate în cartea recipientului respectiv, sînt următoarele :

— diametrul interior $D_i = 1\,180$ mm ;

— grosimea minimă a peretelui $s_{f\min} = 129$ mm ; această grosime de perete corespunde zonei din jurul polului capacului semisferic, subțierea datorîndu-se „tragerii" materialului în timpul procesului de matrițare.

Materialul de bază folosit în execuția principalelor elemente componente ale recipientelor acumulatorului hidropneumatic a fost oțelul sovietic 22K, laminat în table groase. Compoziția chimică și caracteristicile fizice-mecanice ale șarjelor utilizate, consemnate în cartea recipientului nr. 2, sînt date în tabela 1.

Tabela 1

Compoziția chimică și caracteristicile fizice-mecanice ale oțelului sovietic 22k, laminat în table groase

Compoziția chimică, %		Caracteristicile fizice-mecanice la temperatura standard normală $t = +20°C$							
		σ_r, kgf/mm²		$\sigma_{0,2}$, kgf/mm²		δ_{10}, %		KCU, kgf. m/cm²	
		min.	max.	min.	max.	min.	max.	min.	max.
C = 0,22...0,25 ;	S = 0,018... 0,023								
Mn = 0,76...1,03 ;	Cr = 0,10...0,15								
Si = 0,25...0,35 ;	Ni = 0,17... 0,24								
P = 0,017...0,027 ;	Cu = 0,09...0,15	51,0*	52,0	30,0	33,1	23,4	26,0	7,5	11,9

*Valoarea minimă normată, conform GOST (U.R.S.S.). este $\sigma_{r\,\min}{}^{+20°C} = 44$Kgf/mm².
Observație — Așadar $[\sigma_{0,2}/\sigma_r]^{+20°C} = 0,588 \ldots 0,637$.

După execuție, recipientele respective au fost supuse unui tratament termic, care a constat dintr-o normalizare la 920°C și o revenire adîncă la 650°C. Pentru recipientul nr. 2, după acest tratament termic, caracteristicile mecanice și tehnologice ale cusăturilor sudate, consemnate de asemenea în cartea recipientului, au fost cele indicate în tabela 2, rezultînd pentru coeficientul de rezistență φ al sudurilor următoarea valoare maximă :

$$\varphi_{\max} = \frac{\sigma_{rs\min}}{\sigma_{r\min}} = \frac{44,5}{48,4} = 0,920 < 1,000 \qquad (1)$$

Tabela 2

Caracteristicile mecanice și tehnologice ale cusăturilor sudate după tratamentul termic

Caracteristici mecanice și tehnologice la temperatura standard normală $t = +20°C$				
σ_{rs}, kgf/mm²		KCU ,kgf.m/cm²		Unghiul de îndoire α, grade
min.	max.	min.	max.	
44,5	45,0	14,4	15,9	180

și următoarea valoare minimă :

$$\varphi_{min} = \frac{\sigma_{rs\,max}}{\sigma_{r\,max}} = \frac{45,0}{52,0} = 0,865 < 1,000. \qquad (2)$$

Controlul defectoscopic nedistructiv de casă al cusăturilor sudate s-a făcut prin gammagrafiere în proporție de 25% (în totalitate în nodurile de sudură și prin sondaj în sudurile longitudinale) și cu ultrasunete în proporție de 100%, în certificatul de calitate al recipientului nr. *2* fiind consemnate numai rezultate pozitive. Controlul de casă de macrostructură și de microstructură al cusăturilor sudate, efectuat pe sudurile plăcilor de control, a furnizat de asemenea numai rezultate pozitive, certificatul de calitate al recipientului nr. *2* cuprinzînd o mențiune expresă prin care se atestă inexistența defectelor (primare) de material sau de execuție.

Calculul de rezistență al recipientelor acumulatorului hidropneumatic a fost făcut pentru o presiune de calcul $p_c = p_{max} = 320$ kgf/cm² și pentru o temperatură maximă de calcul $t = +100°C$, temperatura de funcționare în regim considerîndu-se egală cu $+8 \ldots +100°C$. Calculul de dimensionare a fost elaborat și prezentat în două variante, în tabela 3 indicîndu-se, pentru fiecare variantă în parte, formulele și condițiile

Tabela 3

Formule și condiții de calcul pentru capacul semisferic al recipientului nr. 2

Varianta de calcul	Formula de calcul pentru grosimea de perete s_f, cm	Presiunea de calcul p_c, kgf/cm²	Rezistența admisibilă a materialului de bază σ_a, kgf/cm²	Coeficientul de rezistență al sudurii φ	Diametrul interior D_i, cm	Adaosul de grosime (pentru execuție, coroziune etc.) c, cm
1 (1960)	Grosimea de perete s_f nu s-a calculat*	320	1290 (vezi tab. 5)	1,000	118,0	—
2**) (1966)	s_f***) $= \frac{p_c D_i}{4\varphi\psi\sigma_a - p_c} + c$	320	1710	1,000	118,0	0,45

*) Capacul semisferic s-a verificat numai din punctul de vedere al consolidării orificiului central pentru un coeficient de formă $y = 0,893$.

**) Riguros, formula de calcul pentru grosimea de perete s_f, care rezultă din condiția de rezistență formulată în conformitate cu teoria de rezistență I (teoria sau criteriul Galilei-Rankine) sau III (teoria sau criteriul Saint-Venant, pentru $\sigma_3 = 0$), este valabilă numai pentru cazul cînd eforturile unitare principale $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ sînt evaluate cu formulele corespunzătoare învelișurilor semisferice cu perete subțire.

***) Coeficientul de slăbire a capacului semisferic prin practicarea orificiului pentru gura de vizitare s-a considerat ca fiind $\psi = 0,660$.

Observație — Așa cum se va vedea în continuare, capacul semisferic al recipientului nr. *2* nu este de tipul „cu perete subțire" deci utilizarea (greșită a) formulei de calcul menționate nu poate fi justificată.

de calcul pentru capacul semisferic al recipientului nr. *2*. O sinteză a valorilor verificate sau calculate și a celor adoptate în final pentru grosi-

mea de perete s_f a capacului semisferic al recipientului nr. *2* este prezentată în tabela 4.

Tabela 4

Grosimea de perete a capacului semisferic al recipientului nr. 2

Varianta de calcul	Grosimea de perete s_f, mm	
	Calculată sau verificată	Adoptată prin proiect
1 (1960)	140,0*)	155,0
2 (1966)	96,0**)	155,0***

*) Valoare considerată în calculul de verificare (tab.3).
**) Valoare calculată, reprezentînd grosimea minimă a peretelui capacului semisferic în ipoteza luării în considerație a întinderii („tragerii") prin matrițare.
***) Grosimea inițială a tablei.

Recipientul nr. *2*, a cărui masă metalică totală este de 50 550 kg, a fost supus unei încercări hidraulice la rece de casă la suprapresiunea $p_p = 400$ kgf/cm², deci

$$\frac{p_p}{p_c} = \frac{400}{320} = 1{,}25. \tag{3}$$

Observații importante. 1. Întrucît pentru capacul semisferic al recipientului nr. *2* (fig. 2):

— în partea cilindrică de trecere, prelucrată mecanic (strunjită):

$$\beta = \frac{D_e}{D_i} = \frac{1\,479}{1\,195} = 1{,}238 > 1{,}100, \tag{4}$$

— în partea semisferică:

$$\beta = \frac{D_e}{D_i} = \frac{1\,490}{1\,180} = 1{,}262 > 1{,}100, \tag{5}$$

capacul semisferic trebuia calculat ca un înveliș semisferic „cu perete gros", care, din punctul de vedere al calculului de rezistență, este definit prin condiția

$$\beta = \frac{D_e}{D_i} > 1{,}100. \tag{6}$$

Dacă, în plus, se are în vedere că, pentru recipientul nr. *2*, condiţia $\sigma_3 = 0$ nu este şi nici nu poate fi îndeplinită, rezultă indiscutabil că s-a procedat greşit adoptîndu-se formula de dimensionare menţionată în tabela 3.

2. Coeficientul real de rezistenţă φ_{real} al sudurilor este subunitar ($\varphi_{real} < \varphi = 1{,}000$), avînd valorile (vezi formulele 1 şi 2):

$$\varphi_{min} = 0{,}865 \leqslant \varphi_{real} < \varphi_{max} = 0{,}920. \tag{7}$$

deşi la proiectarea recipientului nr. 2 s-a considerat $\varphi = 1{,}000$ (tab. 3).

3. Conform instrucţiunilor I.S.C.I.R. în vigoare, recipientul nr. *2* este un recipient de categoria III şi pentru dimensionarea capacului său semisferic trebuia folosită următoarea (şi singura) rezistenţă admisibilă (tab. 5):

$$\sigma_a = \sigma_{a\,min} = 1\,290 \text{ kgf/cm}^2. \tag{8}$$

Tabela 5

Rezistenţa admisibilă a materialului de bază al capacului semisferic al recipientului nr. 2

Mărimea de referinţă σ_{ref} / Valorile coeficienţilor globali de siguranţă c*)	$\sigma_{ref} = \sigma_{r\,min} = 4840$ kgf/cm²	$\sigma_{ref} = \sigma_{0{,}2\,min} = 2860$ kgf/cm²
În raport cu rezistenţa de rupere, $c = c_r = 3{,}75$	$\sigma_a = \sigma_{a\,min} = 1290$ kgf/cm²	—
În raport cu limita tehnică de curgere, $c = c_c = 1{,}70$	—	$\sigma_a = 1682$ kgf/cm²

*) Pavel A. – Materiale şi rezistenţe admisibile folosite în construcţia de utilaje pentru industria petrolieră prelucrătoare şi petrochimică. Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1967, p. 107.

4. În ambele variante de calcul (tab. 3) nu au fost date nici un fel de indicaţii, justificări sau precizări cu privire la valorile adoptate pentru coeficienţii globali de siguranţă c_c şi c_r. Valorile efective minime, cele mai restrictive, ale coeficienţilor globali de siguranţă, sub care nu este recomandabil să se coboare în condiţiile unei exploatări normale, au fost evaluate de către autor şi sînt indicate în tabela 6. Se precizează însă că valoarea $\sigma_a = 1\,710$ kgf/cm² nu este corect determinată, dacă pentru calculul rezistenţei admisibile respective se are în vedere metoda* la care s-a făcut referirea în varianta de calcul 2 (tab. 3).

5. Durata de serviciu τ_s a recipientului nr. *2* şi deci a capacului său semisferic nu a constituit un criteriu de calcul (dimensionare sau veri-

* Metoda sovietică, oficializată în 1965 prin normele ŢKTI.

Tabela 6

Valorile efective minime c_{rmin} și c_{cmin} ale coeficienților globali de siguranță pentru capacul semisferic al recipientului nr. 2

Rezistența admisibilă σ_a \ Mărimea de referință σ_{ref}	Varianta 1 (1960)			Varianta 2 (1966)		
	Materialul de bază		Suduri	Materialul de bază		Suduri
	$\sigma_{ref} = \sigma_{r\,min} = 5100$ kgf/cm²	$\sigma_{ref} = \sigma_{0,2\,min} = 3000$ kgf/cm²	$\sigma_{ref} = \sigma_{rs\,max} = 4500$ kgf/cm²	$\sigma_{ref} = \sigma_{r\,min} = 5100$ kgf/cm²	$\sigma_{ref} = \sigma_{0,2\,min} = 3000$ kgf/cm²	$\sigma_{ref} = \sigma_{rs\,max} = 4500$ kgf/cm²
Pentru materialul de bază $\sigma_a = 1290$ kgf/cm²	$c_r = 3{,}950$	$c_c = 2{,}325$	—	—	—	—
Pentru materialul de bază $\sigma_a = 1710$ kgf/cm²	—	—	—	$c_r = 2{,}970$**	$c_c = 1{,}755^{22}$**)	—
Pentru suduri*) $\sigma_{as} = \varphi_{min}\sigma_a = 0{,}855 \cdot 1290$ kgf/cm²	—	—	$c_r = 4{,}075$	—	—	
Pentru suduri*) $\sigma_{as} = \varphi_{min}\sigma_a = 0{,}855 \cdot 1710$ kgf/cm²	—	—	—	—	—	$c_r = 3{,}080$***)

*) $\varphi_{min} = \dfrac{\sigma_{rs\,min}}{\sigma_{r\,max}} = \dfrac{4\,450}{5\,200} = 0{,}855$ (vezi tabelele 1 și 2)

**) Aceste valori corespund și pentru mantaua cilindrică a recipientului nr. 2.

***) În acest caz, pentru cusăturile sudate ale mantalei cilindrice a recipientului nr. 2, $c_r = 3{,}220 > 3{,}080$, în continuare urmînd să fie luată în considerație prima valoare (3,220), care situează calculul într-un domeniu acoperitor.

Observație — Coeficientul global de siguranță s-a calculat, corespunzător, cu formula generală:

$$c = \frac{\sigma_{ref}}{\sigma_a} \text{ sau } c = \frac{\sigma_{ref}}{\sigma_{as}}.$$

ficare), din care motiv nu s-au putut prezenta nici un fel de date care să permită aprecierea valorii acesteia în funcție de condițiile de exploatare specifice.

3. CONSIDERAȚII PRIVIND CONSTATĂRILE CONTROALELOR TEHNICE* ȘI PRINCIPALELE REZULTATE ALE EXAMINĂRILOR DEFECTOSCOPICE NEDISTRUCTIVE**

Controalele tehnice periodice, efectuate pentru capacul semisferic al recipientului nr. *2* în conformitate cu prevederile normelor oficiale românești de supraveghere tehnică, au evidențiat în principal următoarele :

— existența unei neconcordanțe flagrante între grosimea de perete ($s_f = 140$ mm, tab. 4) avută în vedere în calculele de verificare efectuate în varianta 1, grosimea de perete ($s_f = 155$ mm, tab. 4) menționată pe schițe și desene ca fiind o grosime adoptată prin proiect și grosimea de perete ($s_f = 129$ mm, tab. 7) rezultată în urma execuției ;

Tabela 7

Grosimea de perete s_f, în mm, a capacului semisferic al recipientului nr. nr. 2

Grosimea de perete s_f este cea / Zona de capac	Calculată		Adoptată prin proiect		Rezultată în urma execuției (valori minime)	Măsurată
	Varianta 1 (1960)	Varianta 2 (1966)	Varianta 1 (1960)	Varianta 2 (1966)		
Partea cilindrică de trecere	146,5	130,0	142,0	142,0	142,0	140,0
Partea bombată (semisferică)	140,0*)	96,0	155,0	155,0	129,0**	128,0**)

*) Valoare necalculată, dar avută în vedere la efectuarea calculelor de verificare.
**) În partea superioară a porțiunii bombate (semisferice).

— nejustificarea prin calcul a grosimii de perete s_f în prima variantă (tab. 7) și a grosimii de perete a porțiunii cilindrice de trecere în ambele variante ;

— existența unor neconcordanțe îngrijorătoare între grosimea de perete ($s_f = 140{,}0$ mm, tab. 7) verificată prin calcul în prima variantă și cea minimă, menționată în documentația tehnică însoțitoare ca rezultată în urma execuției ($s_f = 129{,}0$ mm, tab. 7), sau măsurată în mod efectiv cu ajutorul ultrasunetelor ($s_f = 128{,}0$ mm, tab. 7) ;

— reducerea față de $s_0 = s_f = 155$ mm a grosimii de perete a părții cilindrice de trecere, subțiate prin strunjire în apropierea sudurii

* Efectuate de către organele oficiale de supraveghere tehnică I.S.C.I.R.
** Examinarea defectoscopică nedistructivă s-a făcut cu ajutorul ultrasunetelor de către colective de operatori conduse de ing. Ioan Bălan.

de îmbinare cu mantaua cilindrică, cu 6...10 mm pe fiecare parte (interioară şi exterioară) a peretelui.

În aceste condiţii, rezultatele calculelor de proiectare (varianta 1) şi menţiunile favorabile din certificatul de calitate al recipientului nr. *2* nu s-au mai putut — în mod serios — lua în consideraţie şi, la cererea expresă şi pe deplin justificată a organelor oficiale de supraveghere tehnică I.S.C.I.R., uzina constructoare a elaborat un calcul de rezistenţă „aranjat" (varianta 2), fără a fi fost elucidate corespunzător problemele de fond aflate în suspensie.

De aceea, în baza observaţiilor şi a consideraţiilor expuse anterior, pentru a se putea preciza condiţiile de exploatare în continuare a recipientului nr. *2*, în concordanţă cu prevederile prescripţiilor tehnice oficiale privind supravegherea tehnică, la sugestia autorului, s-au considerat necesare următoarele :

— elaborarea de către un institut de proiectări, autorizat în acest sens, a unui studiu tehnic privind calculul de rezistenţă al corpului (manta, capac, fund) recipientului respectiv ;

— elaborarea unui studiu tensometric în condiţiile încercării (hidraulice) de presiune la rece a recipientului nr. *2*, urmată de prelucrarea şi interpretarea competentă a rezultatelor obţinute ;

— precizarea şi interpretarea condiţiilor concrete, cvasistatice, de lucru ale agregatului acumulatorului hidropneumatic şi deci ale recipientului nr. *2* în scopul orientării asupra limitei periculoase a duratei de serviciu ;

— urmărirea sistematică, în timp, a comportării sub sarcină a capacului semisferic al recipientului nr. *2* prin organizarea unui control dimensional şi defectoscopic nedistructiv concludent, periodic şi exigent.

În cele ce urmează vor fi prezentate numai principalele rezultate în baza cărora au putut fi precizate condiţiile deplinei securităţi tehnice a funcţionării în continuare a capacului semisferic al recipientului nr. *2*.

4. DETERMINAREA PRIN CALCUL A EFORTURILOR UNITARE DIN CAPACUL SEMISFERIC ŞI A COEFICIENŢILOR DE SIGURANŢĂ CORESFUNZĂTORI

Determinarea prin calcul a eforturilor unitare din capacul semisferic s-a făcut pentru următoarele grosimi de perete, considerate concludente :

$s_f = s_0 = 155$ mm, reprezentînd valoarea *maximă* a grosimii de perete proiectate (fig. 2) ;

$s_f = 142$ mm, reprezentînd valoarea *minimă* a grosimii de perete proiectate pentru partea cilindrică de trecere în zona de îmbinare prin sudare cu mantaua cilindrică (fig. 2) ;

$s_f = 120$ mm, reprezentînd valoarea *ipotetică* (presupusă)→ *maximă* a grosimii de perete (eventual) reduse (slăbite) prin natura procedeului de execuţie folosit (matriţare) şi prin existenţa unor defecte de material sau de execuţie ;

$s_f = 100$ mm, reprezentînd valoarea *ipotetică* (presupusă)→ *minimă* a grosimii de perete (eventual) reduse (slăbite) prin existenţa unor defecte de material sau din alte cauze (concentrări locale de eforturi unitare etc.).

În scopul evaluării maximale a eforturilor unitare, s-au adoptat schemele de calcul cele mai defavorabile, indicate în figura 3, corespunzătoare grosimilor de perete precizate. În vederea efectuării unor studii

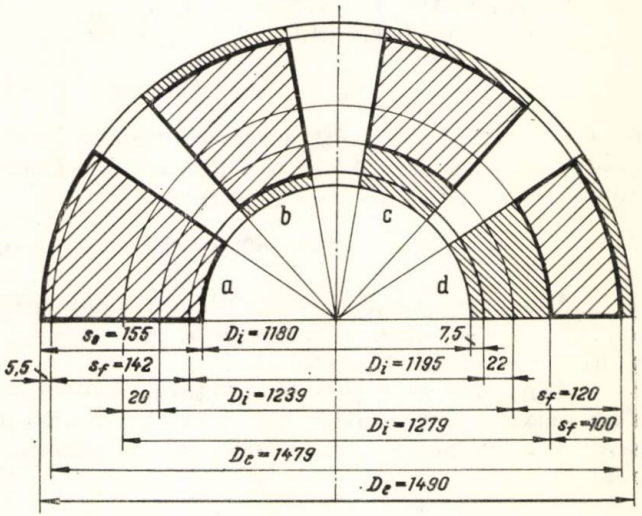


Fig. 3. — Scheme de calcul pentru capacul semisferic al recipientului nr. 2 : *a*— $s_f = s_0 = 155$ mm ; *b*— $s_f = 142$ mm ; *c*— $s_f =$ =120mm ; *d*— s_f=100mm.

comparative şi a formulării unor precizări convingătoare, calculul eforturilor unitare s-a făcut atît în ipoteza învelişului semisferic cu perete subţire, cît şi în ipoteza învelişului semisferic cu perete gros.

Pentru stabilirea eforturilor unitare echivalente σ_{ech} s-au folosit următoarele teorii (criterii) de rezistenţă :

— teoria I (teoria Galilei-Rankine), în conformitate cu care :

$$\sigma_{ech\ I} = \sigma_1 ; \tag{9}$$

utilizarea acestei teorii se justifică prin existenţa unor pericole potenţiale de rupere *fragilă* în alternativa unei eventuale explodări a recipientului nr. *2* ;

— teoria III (teoria Coulomb-Guest), în conformitate cu care

$$\sigma_{ech\ III} = \sigma_1 - \sigma_3, \tag{10}$$

utilizarea acestei teorii se justifică prin posibilitatea efectuării unor calcule acoperitoare*) ;

* După Seely şi Smith, teoria III dă o eroare în plus de circa 15 % (Seely F. B., Smith J. O. — Advanced mechanics of materials. New York, John Wiley and Sons, Inc., 1955).

— teoria IV (teoria Mises-Huber), în conformitate cu care

$$\sigma_{\text{ech IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}, \tag{11}$$

utilizarea acestei teorii se justifică prin aceea că, pentru materialele tenace (oţeluri etc.), ea este foarte bine *confirmată* de rezultatele experimentale.

Formulele de calcul folosite pentru determinarea eforturilor unitare în cazul capacului semisferic al recipientului nr. *2* sînt prezentate, centralizat şi comparativ, în tabelele 8 şi 9.

Din tabela 9 rezultă

$$k_{ti}^{pg} - k_{te}^{pg} = k_{mi}^{pg} - k_{me}^{pg} = 0{,}5, \tag{12}$$

deci $k_{ti}^{pg} = k_{mi}^{pg} > k_{te}^{pg} = k_{me}^{pg}$, ceea ce înseamnă că eforturile unitare principale $\sigma_1 = \sigma_2$ sînt maxime la suprafaţa interioară a capacului semisferic, adică $\sigma_{ti}^{pg} = \sigma_{mi}^{pg} > \sigma_{te}^{pg} = \sigma_{me}^{pg}$, respectiv

$$\sigma_{ti}^{pg} - \sigma_{te}^{pg} = \sigma_{mi}^{pg} - \sigma_{me}^{pg} = 0{,}5 \text{ p}. \tag{13}$$

Din aceeaşi tabelă 9 rezultă de asemenea că eforturile unitare σ_t σ_m şi σ_r sînt — toate — variabile pe grosimea de perete în cazul capacului semisferic cu perete gros.

Din tabelele 8 şi 9 se constată că eforturile unitare principale σ_3, sînt maxime (în valoare absolută) la suprafaţa interioară a capacului semisferic cu perete gros şi sînt nule la suprafaţa exterioară a acestuia, rezultînd :

$$\sigma_{ri}^{pg} - \sigma_{re}^{pg} = -p. \tag{14}$$

Întrucît $k_{\text{ech } i \text{ III}}^{pg} = k_{\text{ech } i \text{ IV}}^{pg}$ şi $k_{\text{ech } e \text{ I}}^{pg} = k_{\text{ech } e \text{ III}}^{pg} = k_{\text{ech } e \text{ IV}}^{ag}$ (tab.9), rezultă că, pentru capacul semisferic cu perete gros, eforturile unitare echivalente sînt aceleaşi după teoriile de rezistenţă III şi IV la suprafaţa interioară şi, corespunzătoar, după teoriile de rezistenţă I, III şi IV la suprafaţa exterioară.

Aşa cum rezultă din tabelele 8 şi 9, în ipoteza învelişului semisferic cu perete gros, cele mai mari eforturi unitare echivalente sînt cele calculate la suprafaţa interioară a capacului semisferic, adică

$$\sigma_{\max}^{pg} = \sigma_{\text{ech } i}^{pg}. \tag{15}$$

Deşi, pentru cazul de faţă, se poate verifica fără dificultate că $\sigma_{\text{ech } i}^{pg} < \sigma_{\text{ech}}^{ps}$, deci $\sigma_{\max}^{pg} < \sigma_{\max}^{ps}$, din motive de ordin practic în cele ce urmează se va considera că

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\max}^{pg}. \tag{16}$$

Se poate observa, de asemenea, fără dificultăţi deosebite, că eforturile unitare echivalente $\sigma_{\text{ech } e}^{pg}$ sînt *cu mult mai mici* decît eforturile unitare echivalente σ_{ech}^{ps}, ceea ce permite să se conchidă apriori că, întrucît capacul semisferic al recipientului nr. *2* a fost calculat ca un înveliş semisferic cu perete subţire, în mod teoretic el trebuie să prezinte o apreciabilă rezervă din punctul de vedere al capacităţii sale portante.

Tabela 8

Formule de calcul folosite pentru determinarea eforturilor unitare în cazul capacului semisferic al recipientului nr. 2 în domeniul $\sigma < \sigma_{0,2}$

Ipoteza de calcul		Eforturile unitare, kgf/cm²								
		Inelare σ_t	Meridiane σ_m	Radiale σ_r	Principale			Echivalente		
					σ_1	σ_2	σ_3	Teoria I	Teoria III	Teoria IV
Înveliș semisferic cu perete subțire *) ($\beta = \frac{D_e}{D_i} \leqslant 1{,}1$)		$k_t^{ps}\, p$	$k_m^{ps}\, p$	$-k_r^{ps}\, p$	σ_t^{ps}	σ_m^{ps}	σ_r^{ps}	$k_{\text{ech I}}^{ps}\, p$	$k_{\text{ech III}}^{ps}\, p$	$k_{\text{ech IV}}^{ps}\, p$
Înveliș semisferic cu perete gros ($\beta = \frac{D_e}{D_i} > 1{,}1$)	la suprafața interioară**)	$k_{ti}^{pg}\, p$	$k_{mi}^{pg}\, p$	$-k_{ri}^{pg}\, p$	σ_{ti}^{pg}	σ_{mi}^{pg}	σ_{ri}^{pg}	$k_{\text{ech } i \text{ I}}^{pg}\, p$	$k_{\text{ech } i \text{ III}}^{pg}\, p$	$k_{\text{ech } i \text{ IV}}^{pg}\, p$
	la suprafața exterioară***)	$k_{te}^{pg}\, p$	$k_{me}^{pg}\, p$	$k_{re}^{pg}\, p$	σ_{te}^{pg}	σ_{me}^{pg}	σ_{re}^{pg}	$k_{\text{ech } e \text{ I}}^{pg}\, p$	$k_{\text{ech } e \text{ III}}^{pg}\, p$	$k_{\text{ech } e \text{ IV}}^{pg}\, p$

*) În acest caz: $\sigma_t = \sigma_t^{ps} = \sigma_m = \sigma_m^{ps}$; $\sigma_r = \sigma_r^{ps}$; $\sigma_{\text{ech I}} = \sigma_{\text{ech I}}^{ps}$; $\sigma_{\text{ech III}} = \sigma_{\text{ech III}}^{ps} = \sigma_{\text{ech IV}} = \sigma_{\text{ech IV}}^{ps}$.

**) În acest caz: $\sigma_t = \sigma_{ti}^{pg} = \sigma_m = \sigma_{mi}^{pg}$; $\sigma_r = \sigma_{ri}^{pg}$; $\sigma_{\text{ech I}} = \sigma_{\text{ech } i \text{ I}}^{pg}$; $\sigma_{\text{ech III}} = \sigma_{\text{ech } i \text{ III}}^{pg} = \sigma_{\text{ech IV}} = \sigma_{\text{ech } i \text{ IV}}^{pg}$.

***) În acest caz: $\sigma_t = \sigma_{te}^{pg} = \sigma_m = \sigma_{me}^{pg}$; $\sigma_r = \sigma_{re}^{pg}$; $\sigma_{\text{ech I}} = \sigma_{\text{ech } i \text{ I}}^{pg} = \sigma_{\text{ech III}} = \sigma_{\text{ech } e \text{ III}}^{pg} = \sigma_{\text{ech IV}} = \sigma_{\text{ech } e \text{ IV}}^{pg}$.

Tabela 9

Formule de calcul folosite pentru determinarea coeficienților de proporționalitate incluși în expresiile din tabela 8.

Ipoteza de calcul		Coeficienții de proporționalitate k					
		k_t	k_m	k_r	$k_{\text{ech I}}$	$k_{\text{ech III}}$	$k_{\text{ech IV}}$
Înveliș semisferic cu perete subțire*) ($\beta = \frac{D_e}{D_i} \leqslant 1{,}1$)		$\frac{D_m}{4_s}$	$\frac{D_m}{4_s}$	1	$k_t^{ps} = k_m^{ps}$	$k_t^{ps} + k_r^{ps} = k_m^{ps} + k_r^{ps}$	
Înveliș semisferic cu perete gros ($\beta = \frac{D_e}{D_i} > 1{,}1$)	la suprafața interioară**)	$\frac{\beta^3 + 2}{2(\beta^3 - 1)}$	$\frac{\beta^3 + 2}{2(\beta^3 - 1)}$	1	$k_{ti}^{pg} = k_{mi}^{pg}$	$k_{ti}^{pg} + k_{ri}^{pg} = k_{mi}^{pg} + k_{ri}^{pg}$	
	la suprafața exterioară ***)	$\frac{3}{2(\beta^3 - 1)}$	$\frac{3}{2(\beta^3 - 1)}$	0	$k_{te}^{pg} = k_{me}^{pg}$		

*) În acest caz: $k_t = k_t^{ps} = k_m = k_m^{ps}$; $k_r = k_r^{ps}$; $k_{\text{ech I}} = k_{\text{eah I}}^{ps}$; $k_{\text{ech III}} = k_{\text{ech III}}^{ps} = k_{\text{ech IV}} = k_{\text{ech IV}}^{ps}$.

**) În acest caz: $k_t = k_{ti}^{pg} = k_m = k_{mi}^{pg}$; $k_r = k_{ri}^{pg}$; $k_{\text{ech I}} = k_{\text{ech } i\ \text{I}}^{pg}$; $k_{\text{ech III}} = k_{\text{ech } i\ \text{III}}^{pg} = k_{\text{ech IV}} = k_{\text{ech } i\ \text{IV}}^{pg}$.

***) În acest caz: $k_t = k_{te}^{pg} = k_m = k_{me}^{pg}$; $k_r = k_{re}^{pg}$; $k_{\text{ech I}} = k_{\text{ech } e\ \text{I}}^{pg} = k_{\text{ech III}} = k_{\text{ech } e\ \text{III}}^{pg} = k_{\text{ech IV}} = k_{\text{ech } e\ \text{IV}}^{pg}$.

Observație – Diametrul mediu D_m al capacului semisferic s-a calculat cu următoarea formulă evidentă:

$$D_m = \frac{1}{2}(D_e + D_i).$$

Formulele prezentate în tabela 8 atestă fără echivoc că dependența (în domeniul comportării elastice a materialului) dintre eforturile unitare σ și presiunea interioară $p = p_c$ este o *dependență liniară* (fig. 4).

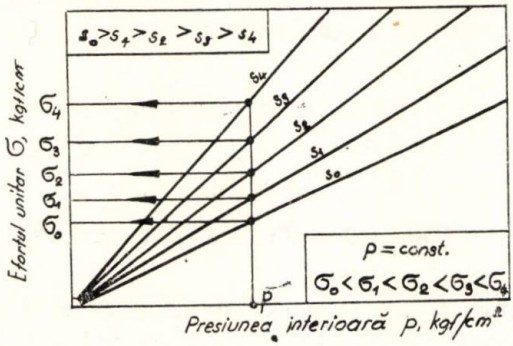


Fig. 4. — Dependența generală dintre eforturile unitare σ și presiunea interioară $p = p_c$.

Observații. 1. Prin s_0, s_1, s_2, s_3, și s_4 au fost notate, în general, valorile grosimii de perete a capacului semisferic.

2. Dependența precizată este valabilă numai în domeniul comportării elastice a materialului capacului semisferic al recipientului nr. 2.

Tabela 10

Valorile teoretice (calculate) ale coeficienților de proporționalitate k (vezi tabela 9 și fig. 3)

Coeficientul de proporționalitate k			Grosimea peretelui capacului semisferic s_f, mm. 155*	142	120	100
În ipoteza învelișului semisferic cu perete subțire	k_t^{ps}		2,153	2,354	2,831	3,448
	k_m^{ps}		2,153	2,354	2,831	3,448
	k_r^{ps}		1,000	1,000	1,000	1,000
În ipoteza învelișului semisferic cu perete gros	$k_t^{pg} = k_m^{pg}$	la suprafața interioară, $k_{ti}^{pg} = k_{mi}^{pg}$	1,978	2,167	2,637	3,257
		la suprafața exterioară, $k_{te}^{pg} = k_{me}^{pg}$	1,478	1,667	2,137	2,757
	k_r^{pg}	la suprafața interioară, k_{ri}^{pg}	1,000	1,000	1,000	1,000
		la suprafața exterioară, k_{re}^{pg}	0,000	0,000	0,000	0,000

* $s_0 = 155$ mm

În tabela 10 sînt date valorile teoretice (calculate) ale coeficienților de proporționalitate k^{ps} și k^{pg} pentru diferitele scheme de calcul adoptate (fig. 3).

Coeficienții globali de siguranță c_r și c_c s-au calculat, în mod corespunzător, cu următoarele formule generale:

$$c_r = \frac{\sigma_{r\min}}{\sigma_{\max}} \; ; \; c_c = \frac{\sigma_{0,2\min}}{\sigma_{\max}} . \tag{17}$$

5. COEFICIENTUL DE SLĂBIRE (REDUCERE) AL PERETELUI CAPACULUI SEMISFERIC

Dacă lungimea totală a meridianului median al capacului semisferic (fig. 2) se notează cu L_f, atunci se poate defini o *arie brută* $A_{f\,\text{brut}}$ a secțiunii meridiane a capacului respectiv:

$$A_{f\,\text{brut}} = s_0 L_f \tag{18}$$

și o *arie netă* $A_{f\,\text{net}}$ a aceleiași secțiuni:

$$A_{f\,\text{net}} = s_f L_f . \tag{19}$$

Coeficientul de slăbire (reducere) ψ_f al peretelui capacului semisferic, prin intermediul căruia se poate aprecia sau caracteriza capacitatea portantă reală a capacului respectiv, se poate defini, în aceste condiții, ca fiind:

$$\psi_f = \frac{A_{f\,\text{net}}}{A_{f\,\text{brut}}} = \frac{s_f}{s_0} \leqslant 1,00. \tag{20}$$

Valorile teoretice ale acestui coeficient, corespunzătoare diferitelor valori ale grosimii de perete s_f a capacului semisferic, sînt date în tabela 11.

Tabela 11

Valorile teoretice ale coeficientului de slăbire ψ_f al peretelui capacului semisferic al recipientului nr. 2

Grosimea de perete s_f (fig. 3), mm	155*)	142	120	100
Valorile teoretice ale coeficientului de slăbire ψ_f	1,000 (100,0 %)	0,916 (91,6 %)	0,775 (77,5 %)	0,645 (64,5 %)

*) s_0 = 155 mm.

Primită la redacție la 12 ianuarie 1973

ANALIZA UNOR PARAMETRI FUNCȚIONALI AI MOTOARELOR HIDROSTATICE ROTATIVE ÎN REGIM DINAMIC PRIN MODELARE PE CALCULATOR

de A. OPREAN și FL. IONESCU
Institutul politehnic București

Lucrarea are ca scop stabilirea unei metodologii de calcul și analiză a principalilor parametri ai motoarelor hidrostatice în regim tranzitoriu. Este vorba de studiul variației în timp a turațiilor, a presiunii și a cuplului motor în funcție de o anumită sarcină la axul motor. Pe baza modelului fizic, folosind analogia electro-hidraulică, s-a elaborat un model analogic de calcul și variantele posibile de încărcare. Se prezintă, de asemenea o analiză, comparativă a caracteristicilor diverselor tipuri de motoare folosite curent în sistemele hidraulice de automatizare ale mașinilor unelte.
Pentru exemplificarea metodei de analiză s-a elaborat o schemă analogică pentru un caz concret, realizîndu-se modelarea acestuia pe un calculator analogic. Concluzia generală care se desprinde pe baza rezultatelor obținute constă în aceea, că metoda de analiză prezentată în lucrare are caracter de generalitate permițînd un studiu complex al comportării dinamice la motoarele hidrostatice rotative folosite în lanțurile cinematice de acționare a mașinilor-unelte.

1. STABILIREA MODELULUI FIZIC

1.1. STABILIREA ECUAȚIEI DE ECHILIBRU A MOTORULUI HIDRAULIC

Studiul de față își propune să stabilească legătura nemijlocită între parametrii cinematici și cei hidrostatici precum și modul în care aceștia sînt influențați de sarcina aplicată la motor.

În consecință, rezultă că este vorba de un studiu dinamic al acționării lanțurilor cinematice cu motoare hidraulice rotative, unde, pe lîngă mărimile care caracterizează vectorii forțe și momente aplicați sistemului fizic considerat, intervin și caracteristici cinematice ale sistemului (viteze unghiulare, accelerații unghiulare, unghi de rotație), precum și diferite caracteristici mecanice (mase, momente de inerție).

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 32, NR. 3, 1973, P. 669–683

După cum se poate constata în figura 2, modelul fizic care va fi folosit pentru studiul propus este caracterizat de prezența mai multor elemente hidraulice, prezență care poate fi transpusă matematic prin analogia electrohidraulică așa cum se poate vedea în figura 1, care reprezintă schema tehnologică a motorului de curent continuu.

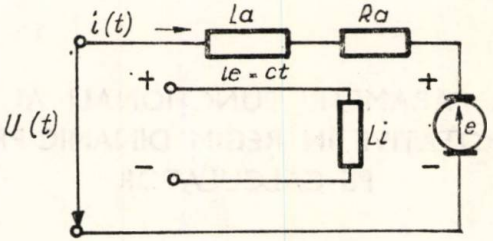


Fig. 1

În care s-au notat :

$i(t)$ — curentul din circuitul indusului,
R_a — rezistența indusului,
L_a — inductanța indusului,
e — tensiunea contraelectromotoare,
L_i — inductanța înfășurării inductoare,
i_e — curentul de excitație,
$U(t)$ — tensiunea aplicată.

Modelul matematic al motorului de curent continuu va fi reprezentat, pentru mărimile care-l descriu din punct de vedere electric, scriindu-se teorema a II-a a lui Kirchhoff în circuitul indus al motorului sub forma

$$U(t) = R_a \cdot i(t) + L_a \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + e(t), \tag{1}$$

în care tensiunea contraelectromotoare $e(t)$ este proporțională cu :
— turația motorului electric $n(t)$,
— fluxul de excitație Φ (presupus constant), putîndu-se scrie deci

$$e(t) = k'_e \cdot \Phi \cdot n(t). \tag{2}$$

Făcîndu-se înlocuirea relației (2) în (1) din cele două ecuații amintite rezultă :

$$U(t) = R_a \cdot i(t) + L_a \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + k_e \cdot n(t), \tag{3}$$

în care

$$k_e = k'_e \cdot \Phi.$$

Pentru stabilirea unei ecuații care să caracterizeze acum funcționarea motorului hidraulic este suficient să amintim analogia care există între mărimile electrice și cele hidraulice (1) și anume :

$i(t) \Rightarrow p_m(t)$ presiunea fluidului în motorul hidraulic,

$U(t) \Rightarrow Q_p(t)$ debitul pompei care alimentează cu fluid sub presiune instalația,

$k_e \Rightarrow q_m$ capacitatea specifică a motorului hidraulic

$R_a \Rightarrow \eta_e$ coeficientul de pierderi prin scăpări,

$L_a \Rightarrow \frac{V}{E'}$ coeficientul de compresibilitate al lichidului [1],

unde V este volumul de ulei

E' — modulul de elasticitate al uleiului mineral.

Ținîndu-se cont de toate notațiile anterior descrise, relația (3) devine :

$$Q_p(t) = \eta_e \cdot p_m(t) + \frac{V}{E'} \frac{dp_m(t)}{dt} + q_m \cdot n(t). \tag{4}$$

1.2. STABILIREA ECHILIBRULUI SARCINILOR DIN SISTEM

Pentru studiu este necesar a fi scrisă și ecuația de echilibru dinamic al cuplurilor motor, rezistent și inerțial, care, spre ilustrare, sînt reprezentate intuitiv în figura 2.

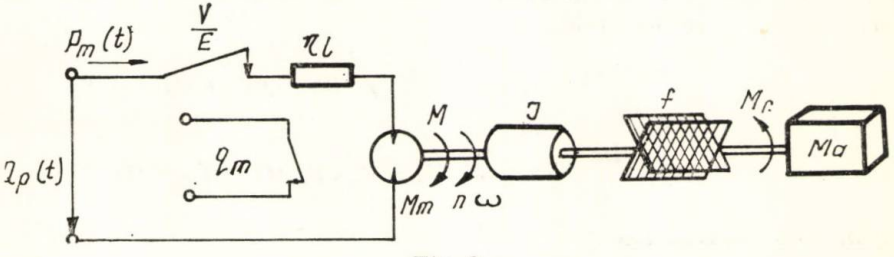


Fig. 2

În afara simbolurilor anterior explicate s-au mai notat prin :

M — cuplul motor o funcție $f_1(t)$,

J — momentul de inerție al motorului,

f — coeficient de frecare vîscoasă al axului motorului și al altor elemente mobile în sistem,

n_1 — turația axului motorului hidraulic, o funcție $f_2(t)$,

ω — viteza unghiulară a axului motorului hidraulic,

M_r — momentul rezistent al mecanismului antrenat, o funcție $f_3(t)$.

Sistemul fizic elaborat și prezentat în figura 2 este caracterizat atît de ecuația (4) pentru partea motoare, cît și de o altă ecuație (5), care va fi dedusă în cele ce urmează.

Scriindu-se ecuația de echilibru dinamic a axului motorului conform principiului al II-lea al dinamicii, se obține următoarea ecuație de echilibru :

$$M(t) - M_f(t) - M_r(t) = M_i(t), \tag{5}$$

în care

$M(t)$ este cuplul motor $[M(t) = k_m p_m(t)]$,
$M_f(t)$ — cuplul de frecare vîscoasă $[M_f(t) = f \cdot n(t)]$,
$M_r(t)$ — cuplul rezistent al mecanismului antrenat,
$M_i(t)$ — cuplul de inerție $\left[M_i(t) = J \frac{dn(t)}{dt} \right]$.

Ecuația exprimă egalitatea dintre cuplul de accelerare al motorului reprezentat de primul membru al ecuației și cuplul de inerție care se află în membrul al doilea.
Făcînd înlocuirile, ecuația (5) se mai poate scrie :

$$k_m \cdot p_m(t) = I \frac{dn(t)}{dt} + f \cdot n(t) + M_r(t). \tag{6}$$

2. STABILIREA SCHEMEI ANALOGICE DE CALCUL

Ecuațiile (4) și (6) constituie modelul matematic al motorului hidraulic rotativ care în vederea realizării unei scheme de calcul pentru calculatorul analogic se va scrie :

$$\frac{V}{E'} \frac{dp_m(t)}{dt} = Q_p(t) - \eta_l \cdot p_m(t) - q_m \cdot n(t),$$

$$I \frac{dn(t)}{dt} = -M_r(t) + k_m \cdot p_m(t) - f \cdot n(t). \tag{7}$$

Considerînd constantele

$$\frac{V}{E'} \frac{1}{\eta_l} = T_a,$$

$$\frac{I}{f} = T_m, \tag{8}$$

care au dimensiunile unor timpi, sistemul de ecuații (7) devine prin urmare

$$-T_a \frac{dp_m(t)}{dt} = -\frac{1}{\eta_l} Q_p(t) + p_m(t) + \frac{q_m}{\eta_l} \cdot n(t),$$

$$-T_m \frac{dn(t)}{dt} = \frac{1}{f} M_r(t) - k_m \frac{p_m(t)}{f} + n(t). \tag{9}$$

Pe baza acestor ecuații (9) rezultă o primă variantă a de schemă de calcul care constituie un model electronic al motorului hidraulic (vezi fig. 3).

Din ecuațiile (9) efectuînd integrarea în raport cu timpul se obțin ecuațiile :

$$p_m(t) = -\frac{1}{T_a}\int_0^t \left[-\frac{1}{\eta_l} Q_p(t) + p_m(t) + \frac{q_m}{\eta_l} n(t) \right] dt,$$

$$n(t) = -\frac{1}{T_m}\int_0^t \left[\frac{1}{f} M_p(t) - \frac{k_m}{f} p_m(t) + n(t) \right] dt. \qquad (10)$$

În baza acestora se obține o a doua variantă de schemă de calcul vezi (fig. 4) care constituie de asemenea un model electronic al motorului hidraulic rotativ.

Se impune o discuție a celor două modele posibile pentru a se putea alege, în funcție de necesitățile studiului, o schemă de calcul sau alta.

Se observă că modelul de calcul din figura 4, scris pe baza ecuațiilor (10), necesită doar trei elemente operaționale (două sumatoare integratoare și un inversor), comparativ cu cele șase elemente operaționale ale schemei din figura 3 (două sumatoare, două integratoare și două inver-

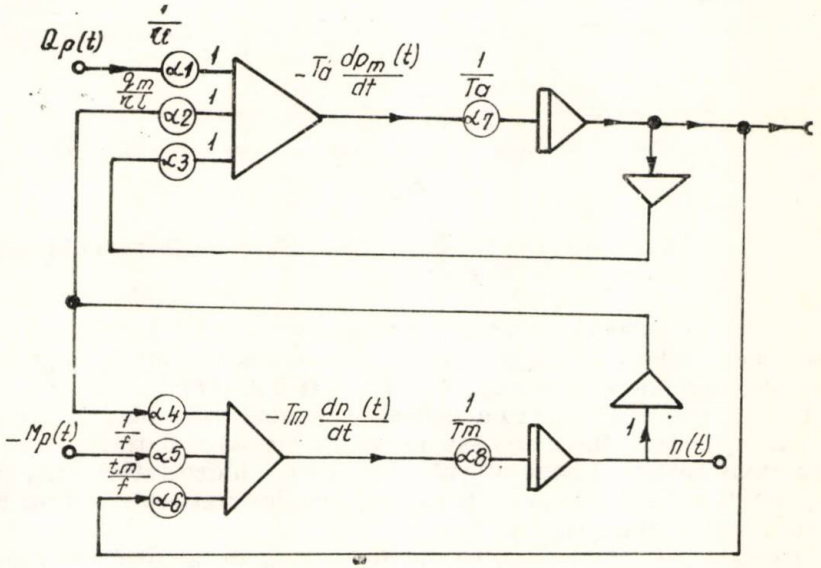


Fig. 3

soare). Întrucît pentru utilizare simplitatea schemei prezintă mai puțină importanță raportată la avantajele de studiu prin intermediul ei a fenomenelor fizice pe care le-am modelat, considerăm comentariile ce urmează de o mai mare necesitate.

Astfel, dacă vom avea de urmărit doar evoluția în timp a presiunii $p_m(t)$ și a turației $n(t)$ atunci cînd debitul pompei hidraulice care alimen-

teză motorul hidraulic rotativ $Q_p(t)$ şi cuplul rezistent $M_r(t)$ au forme precizate de variaţie în timp, se va folosi modelul din figura 4, iar dacă va fi nevoie şi de variaţia în timp şi a derivatelor $\frac{dp_m(t)}{dt}$ şi $\frac{dn(t)}{dt}$ atunci se va utiliza modelul din figura 3.

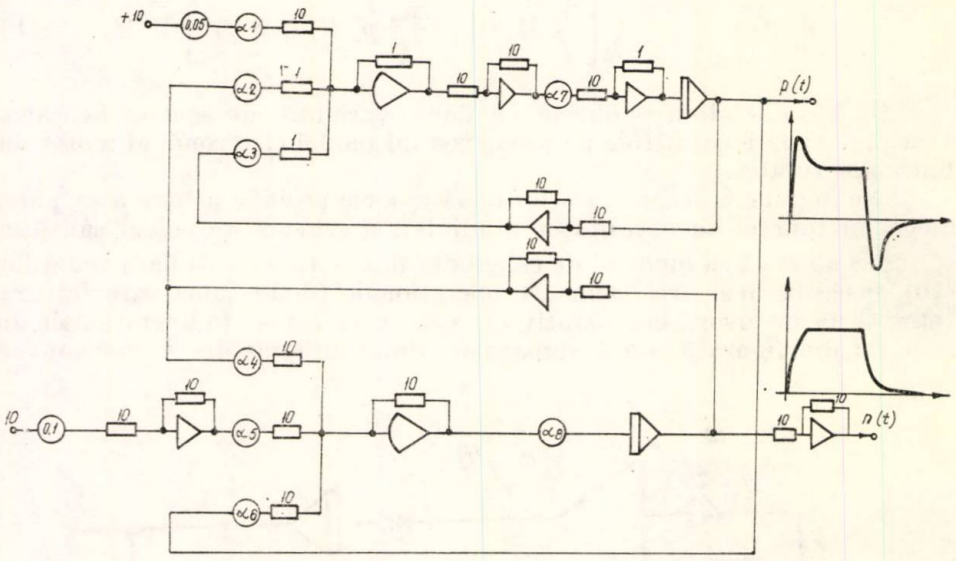


Fig. 4

2.1. CONCLUZII ASUPRA POSIBILITĂŢILOR DE STUDIU OFERITE DE MODELUL ANALOGIC REALIZAT

2.1.1. *Consideraţii generale.* Modelul sistemului fizic prezentat în figura 2 evidenţiază variaţia în timp a parametrilor $n(t)$ şi $p_m(t)$ (turaţia motorului hidraulic şi presiunea în instalaţia hidraulică) datorită acţiunii simultane a variaţiei în timp a debitului pompei hidraulice $Q_p(t)$ care este ştiut că nu poate fi liniarizat sau menţinut constant datorită însăşi principiului constructiv al generatorului de energie hidrostatică ales, precum şi a variaţiei în timp (cînd este cazul) a sarcinilor rezistente reduse la axul motorului hidraulic prin $M_r(t)$.

Îşi face loc cu această ocazie un studiu de analiză al diferitelor variante posibile de încărcare pentru diferite evoluţii $Q_p(t)$ astfel încît să se poată alege pentru studiu cazul cel mai complex urmînd ca prin particularizare să se poată concluziona şi asupra fiecărui caz în parte.

Modelul permite un amplu studiu al fenomenelor care au loc în instalaţia hidraulică precum şi al parametrilor cinematici şi dinamici, cu considerarea tuturor cauzelor care concură la aceste fenomene complexe.

2.1.2. *Studiul variantelor posibile de încărcare.* Se observă că întrucît cei doi parametri consideraţi la ieşire : $n(t)$ şi $p_m(t)$ sînt determinaţi de

cei doi parametri consideraţi la intrare : $Q_p(t)$, $M_r(t)$, caz specific motoarelor hidraulice, stabilirea unor interdependenţe precise nu se poate realiza decît dacă studiul abordează etape detaliate şi anume :

I $\quad Q = \text{const.}, \quad M_r = \text{const.}$, rezultă $\dfrac{dQ}{dt} = 0$; $Q = Q_1$; $M_r = M_1$,

II) $\quad Q = \text{const.}, \quad M_r \neq \text{const.}$, rezultă $\dfrac{dQ}{dt} = 0$; $Q = Q_2$; $M_r = M_2(t)$,

III) $\quad Q \neq \text{const.}, \quad M_r = \text{const.}$, rezultă $\dfrac{dQ}{dt} \neq 0$; $Q = Q_3(t)$; $M_r = M_3$,

IV) $\quad Q \neq \text{const.}, \quad M_r \neq \text{const.}$, rezultă $\dfrac{dQ}{dt} \neq 0$; $Q = Q_4(t)$; $M_r = M_4(t)$.

Prin rezolvarea sistemului de ecuaţii (7) se ajunge la ecuaţiile următoare :

$$E_1 = I\frac{V}{E'}\frac{d^2p_m}{dt^2} + \left(I\cdot\eta_l + f\cdot\frac{V}{E'}\right)\frac{dp_m}{dt} + (k_m q_m + f\eta_l)\,p_m -$$

$$-I\frac{dQ_p}{dt} - M_r(t)\cdot q_m - fQ_p = 0, \tag{11}$$

$$E_2 = I\frac{V}{E'}\frac{d^2n}{dt^2} + \left(f\frac{V}{E'} + \eta_l I\right)\frac{dn}{dt} + (\eta_l f + q_m\cdot k_m)\cdot n +$$

$$+\frac{V}{E'}\frac{dM_p}{dt} + \eta_l M_r - Q_p\cdot k_m = 0. \tag{12}$$

Ţinînd cont de cele patru posibilităţi ce pot fi întîlnite în practică (cazurile I, II, III, IV), expresiile E_1, respectiv E_2, devin :
pentru expresia E_1 în cele patru cazuri se obţin relaţiile :

I) $\quad A_1\dfrac{d^2p}{dt^2} + B_1\dfrac{dp}{dt} + C_1p = D_{11}$,

II) $\quad A_1\dfrac{d^2p}{dt^2} + B_1\dfrac{dp}{dt} + C_1\cdot p = f_1(t) + D_{21}$,

III) $\quad A_1\dfrac{d^2p}{dt^2} + B_1\dfrac{dp}{dt} + C_1p = f_2(t) + f_3(t) + D_{31}$, (13)

IV) $\quad A_1\dfrac{d^2p}{dt^2} + B_1\dfrac{dp}{dt} + C_1p = f_4(t) + f_6(t)$,

iar pentru expresia E_2 se obţin următoarele relaţii:

$$\text{I)}\quad A_2\frac{d^2n}{dt^2}+B_2\frac{dn}{dt}+C_2\cdot n=D_{12},$$

$$\text{II)}\quad A_2\frac{d^2n}{dt^2}+B_2\frac{dn}{dt}+C_2\cdot n=D_{22}-f_1'(t)-f_2'(t),\tag{14}$$

$$\text{III)}\quad A_2\frac{d^2n}{dt^2}+B_2\frac{dn}{dt}+C_2\cdot n=f_3'(t)-D_{32}$$

$$\text{IV)}\quad A_2\frac{d^2n}{dt^2}+B_2\frac{dn}{dt}+C_2\cdot n=f_4'(t)+f_5'(t)+f_5'(t),$$

în care A_1, B_1 şi C_1, A_2, B_2 şi C_2 sînt coeficienţi constanţi.

D_{ij} — valorile numerice constante ale debitului şi momentului,

f_i şi f_i' — funcţii variabile de timp.

3. ANALIZA COMPARATIVĂ A CARACTERISTICILOR $Q_p(t)$ ŞI $M_r(t)$ PENTRU DIFERITE TIPURI DE MOTOARE HIDRAULICE

3.1. STABILIREA LUI $Q_p(t)$

Debitul sursei de presiune hidrostatică, $Q_p(t)$, are diferite expresii [1], în funcţie de tipul acesteia, după cum urmează:

3.1.1. *Pompe cu pistonaşe radiale*

$$Q_{\text{inst}}=s.e.\ \omega\sum_{i=1}^{n}\sin\varphi\ i,\tag{15}$$

unde

s este secţiunea pistonaşului,

e — excentricitatea pompei,

φ_i — unghiul curent al pistonaşului $[\varphi_i\leqslant\pi]$,

n — numărul maxim de pistonaşe în perioada de refulare $\left[n\leqslant\frac{z+1}{2}\right]$,

z — numărul total de pistonaşe al pompei.

Considerîndu-se că turaţia motorului electric de antrenare a pompei hidraulice este constantă, rezultă

$$\omega=2\pi n=\text{const.},$$

şi notînd $A'=se\omega=2\pi\ s.e.n$,

relația (15) devine

$$Q_{inst} = A' \sum_{i=1}^{n} \sin \varphi_i. \tag{16}$$

3.1.2. *Pompe cu pistonașe axiale.* Debitul instantaneu al acestor pompe se exprimă astfel:

$$Q_{inst} = S\omega R \sin \alpha \sum_{i=1}^{n} \sin \varphi_i. \tag{17}$$

Dacă se consideră $\omega = \text{const}$, din considerentele menționate la paragraful 3.1.1., și se notează $A = s\omega R \sin \alpha$, expresia debitului devine o relație asemănătoare relației (16), astfel

$$Q_{inst} = A \sum_{i=1}^{n} \sin \varphi_i. \tag{17'}$$

3.1.3. *Concluzii asupra* Q_{inst} (*debitul instantaneu*). După cum s-a putut remarca în cadrul expunerilor din § 3.1.1. și 3.1.2., debitul majorității surselor de debit, exceptînd pompele cu șurub și cele cu palete cu acțiune multiplă, se prezintă sub formă pulsatorie. Privind din acest punct de vedere, sursa de debit va fi corect și suficient caracterizată de relațiile E_1 și E_2, în cazul că obiectul studiului va fi acela de a urmări evoluția parametrilor $n = n(t)$ și $P_m = p(t)$.

Pentru obținerea răspunsului instalației hidraulice pentru $Q = \text{const}$ este necesar să considerăm drept sursă de debit o pompă cu șurub, de exemplu.

3.2. STABILIREA CUPLULUI MOTOR *M* (*t*)

La scrierea ecuației de echilibru a momentelor care apar la axul motorului hidraulic, au fost precizate cuplurile motoare și rezistente care se echilibrează dinamic la rotirea axului cu o turație $n(t)$ și o accelerație $\varepsilon(t)$ sub acțiunea presiunii $p(t)$. Este necesară o prezentare a expresiilor analitice ale momentelor motoare pentru cîteva tipuri constructive utilizate în acționarea mașinilor-unelte.

3.2.1. *Motoare cu pistonașe radiale.* Pentru motoarele cu pistonașe radiale, în literatura de specialitate [1] se indică următoarea expresie pentru calculul momentului de răsucire al unui pistonaș:

$$M_{mlp} = F(e \operatorname{tg} \beta \cos \varphi + R \cos \beta \cdot \operatorname{tg} \beta). \tag{18}$$

Momentul de răsucire pentru toate pistonașele neglijîndu-se frecările interioare, pentru domeniul $0° \leqslant \varphi \leqslant 180°$ este

$$M_{mtot} = \sum_{i=1}^{\frac{z+1}{2}} M_{rlpi},$$

în care F este forța de presiune pe un pistonaș $\left[F = \frac{\pi d^2}{4} p_m(t)\right]$,

e — excentricitatea,

β — unghiul dintre poziția pistonașului față de centrele rotorului și statorului,

φ — unghiul curent de poziție a unui pistonaș,

z — numărul de pistonașe.

După o serie de calcule intermediare se ajunge la expresia finală a momentului motor total pentru z pistonașe

$$M_{mtot} = F\left\{\frac{e^2}{2R}\sum_{i=1}^{\frac{z+1}{2}} \sin 2\left[\varphi+(i-1)\frac{2\pi}{z}\right]+e\sum_{i=1}^{\frac{z+1}{2}} \sin\left[\varphi+(i-1)\frac{2\pi}{z}\right]\right\}. \quad (19)$$

Relația (19) nu ține cont de momentul rezistent datorită contrapresiunii pe conducta de ieșire.

Expresia care evidențiază variația momentului total util, ținînd cont de presiunea de intrare $p_m(t)$, și de presiunea de ieșire p_e = const., are forma următoare:

$$M_{m.tot.u.} = \frac{\pi d^2}{4} e\left\{p_m(t)\left[\frac{e}{2R}\sum_{i=1}^{\frac{z+1}{2}} \sin 2\left[\varphi+(i-1)\frac{2\pi}{z}\right]+\sum_{i=1}^{\frac{z+1}{2}} \sin\left[\varphi+(i-1)\frac{2\pi}{z}\right]\right]-\right.$$

$$\left.-p_e\left[\frac{e}{2R}\sum_{i=1}^{\frac{z-1}{2}} \sin 2\left[\varphi+(i-1)\frac{2\pi}{z}\right]+\sum_{i=1}^{\frac{z-1}{2}} \sin\left[\varphi+(i-1)\frac{2\pi}{z}\right]\right]\right\}. \quad (19')$$

Este important de remarcat caracterul pulsatoriu al momentului motor ce constituie o sursă de vibrații întreținute în instalație, căci, întrucît presiunea din instalația hidraulică este cea care determină forța axială F asupra unui pistonaș, variația pulsatorie a acesteia din urmă se repercutează și asupra presiunii, imprimîndu-i acesteia un caracter pulsatoriu.

Iată deci că la motoarele hidraulice rotative cu pistonașe radiale o altă cauză a pulsațiilor de presiune o constituie, pe lîngă pulsațiile de debit, și pulsațiile de moment motor.

3.2.2. *Motoare cu pistonașe axiale.* Literatura de specialitate [1] indică drept moment motor pentru un pistonaș:

$$M_{m1p} = F \cdot r \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi, \quad (20)$$

în care

F este forța de presiune pe un pistonaș $\left[F = \frac{\pi d^2}{4} p_m(t)\right]$,

r — raza de dispunere a pistonașelor față de axa de rotație [r = const.,]

α — unghiul de reglare [poate fi și constant],

φ — unghiul curent de rotație [$\varphi = \text{const.}$].

Momentul motor total pentru pistonașele motoare se determină plecînd de la aceleași considerente ca și în capitolul precedent:

$$M_{m\,\text{tot}} = F \cdot r \cdot \sin \alpha \sum_{i=1}^{\frac{z+1}{2}} \sin \left[\varphi + (i-1) \frac{2\pi}{z} \right], \tag{21}$$

neglijînd forțele de frecare ce au fost introduse în relația de echilibru (5).

Momentul motor total util se va determina scăzînd din momentul total, momentul necesar învingerii presiunii pe conducta de ieșire. Între cele două momente există un raport care este direct proporțional cu raportul între presiunea p_m pe conducta de admisie și presiunea p_e pe conducta de evacuare.

$$M_{m.\text{tot}.\,u.} = \frac{\pi d^2}{4} \cdot r \cdot \sin \alpha \left\{ p_m(t) \sum_{i=1}^{\frac{z+1}{2}} \sin \left[\varphi + (i-1) \frac{2\pi}{z} \right] - \right.$$

$$\left. - p_e \sum_{i=1}^{\frac{z-1}{2}} \sin \left[\varphi + (i-1) \frac{2\pi}{z} \right] \right\}. \tag{22}$$

Considerîndu-se relația (22) se poate concluziona că și la acest tip de motor hidraulic momentul motor are un caracter pulsatoriu, deci el va constitui și aici o a doua sursă de vibrații.

3.2.3. *Concluzii asupra momentului motor.* O trecere în revistă a expresiilor analitice ale momentului motor ce caracterizează motoarele hidraulice rotative uzuale permite observația că acestea au o formă pulsatorie, fapt ce a fost demonstrat în cadrul paragrafelor 3.2.1. și 3.2.2. Astfel, considerăm justificat ca în studiul aprofundat al fenomenelor din instalațiile hidraulice să se țină cont și de influența caracterului pulsatoriu al momentului motor.

4. REALIZAREA SCHEMEI ANALOGICE DE CALCUL

4.1. PREGĂTIREA DATELOR PENTRU CALCULATOR

Schema logică modelată pe calculatorul analogic a fost transformată și completată în vederea modelării.

Pentru modelare s-au considerat drept valori experimentale pentru un caz uzual, următoarele:

$p_{\max} = 20 \cdot 10^2$ daN/dm^2 = 20 at,

$Q_{\max} = 10$ l/min.

$n_{max} = 30$ rot/s, $T_m = 17{,}3$ (s),

$M_{rezist\,max} = 20$ kgf·dm, $q = \frac{9{,}7}{950}$ dm³,

$Q = 9{,}7$ 1/min, $f = 0{,}15$,

$T_a = 4(s)$, $M_r = 15$ kgf·dm.

$\eta_l = 0{,}478$ dm³/kgf s,

Scările diferitelor mărimi au fost determinate după cum urmează:

$$k_p = \frac{\overline{p}_{max}}{p_{max}} = \frac{10}{20 \cdot 10^2} = \frac{1}{200}\left[\frac{V}{\text{kgf/dm}^2}\right],$$

$$k_Q = \frac{\overline{Q}_{max}}{Q_{max}} = \frac{10}{1/6} = \frac{60}{1}\left[\frac{V}{\text{dm}^3/s}\right],$$

$$k_n = \frac{\overline{n}_{max}}{n_{max}} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}\left[\frac{V}{\text{rot/s}}\right],$$

$$k_M = \frac{\overline{M}_{max}}{M_{max}} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}\left[\frac{V}{\text{kgf}\cdot\text{d}\omega}\right].$$

Coeficienţii introduşi de potenţiometri au fost determinaţi prin identificarea relaţiilor din sistemele (23) (24).

Sistemul (23) conţine prima ecuaţie a sistemului fizic şi transpusa sa pentru calculator, iar sistemul (24) conţine a doua ecuaţie a sistemului fizic şi transpusa sa.

$$\frac{dp_m(t)}{dt} = \frac{Q}{\eta_l T_a} - \frac{p_m(t)}{T_a} - \frac{q}{\eta_l T_a} \cdot n(t),$$

(23)

$$\frac{dp_m(t)}{dt} - -0{,}5\alpha_1\alpha_7\frac{k_t}{k_p} + \alpha_2\alpha_7\frac{k_n k_t}{k_p} n(t) + \alpha_3\alpha_7 k_t p_m(t)$$

$$\frac{dn(t)}{dt} = -\frac{1}{f \cdot T_m} M_r + \frac{k_m}{f \cdot T_m} p_m(t) - \frac{1}{T_m} n(t),$$

(24)

$$\frac{dn(t)}{dt} = -\alpha_4 \cdot \alpha_8 k_t \cdot n(t) + 5\alpha_5\alpha_8\frac{k_t}{k_n} - \alpha_5\alpha_8\frac{k_p}{k_n} k_t \cdot p_m(t).$$

În urma identificărilor au fost obținute grupele de sisteme (25) (26).

$$
\begin{aligned}
&-0{,}5\alpha_1\alpha_7\frac{k_t}{k_p}=\frac{Q}{\eta_l T_a},\\
&\alpha_2\alpha_7\frac{k_t}{k_p}k_n=-\frac{1}{T_a},\\
&\alpha_3\alpha_7 k_t=-\frac{q}{\eta_l\cdot T_a};\\
&-\alpha_4\alpha_8 k_t=-\frac{1}{T_m},
\end{aligned}
\tag{25}
$$

$$
\begin{aligned}
&5\alpha_5\alpha_8\frac{k_t}{k_n}=-\frac{M_r}{f\cdot T_m},\\
&\alpha_6\alpha_8\frac{k_p}{k_n}k_t=\frac{k'_m}{f\cdot T_m}.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Rezolvarea sistemelor (25) și (26) a condus la obținerea următoarelor valori $\alpha_1,\ldots,\alpha_8$ introduse în calcul de petențiometri, pentru cazul concret ales:

$\alpha_1 = 0{,}161$; $\alpha_5 = 0{,}198\cdot 10^1$,

$\alpha_2 = 0{,}205$; $\alpha_6 = 0{,}1101$,

$\alpha_3 = 0{,}151$; $\alpha_7 = 0{,}7\cdot 10^{-1}$,

$\alpha_4 = 0{,}0825$; $\alpha_8 = 0{,}7$.

4.2. REZULTATELE FURNIZATE DE CALCULATOR

Pentru verificarea și exemplificarea metodicii de calcul propuse au fost înregistrate alurile curbelor $p = p\ (t)$ și $n = n\ (t)$ în perioadele de accelerare și de regim. În ceea ce privește regimul de frînare acesta s-a realizat prin întreruperea alimentării, deci prin autofrînare.

5. CONCLUZII

1. Lucrarea stabilește o metodă practică de analiză a performanțelor funcționale în regim dinamic pentru motoarele hidrostatice rotative, plecînd de la analogia dintre motorul hidraulic rotativ și motorul de curent continuu.

2. Metoda prezintă un mai mare grad de generalitate decît metodele clasice de studiu pe baza ecuaţiei lui Lagrange [2], permiţînd abordarea întregului complex de fenomene care au loc în motoarele hidraulice rotative din care în lucrarea de faţă s-au realizat doar o parte.

3. Din analiza alurei curbelor $p = p\ (t)$ şi $n = n\ (t)$ pot fi desprinse următoarele :

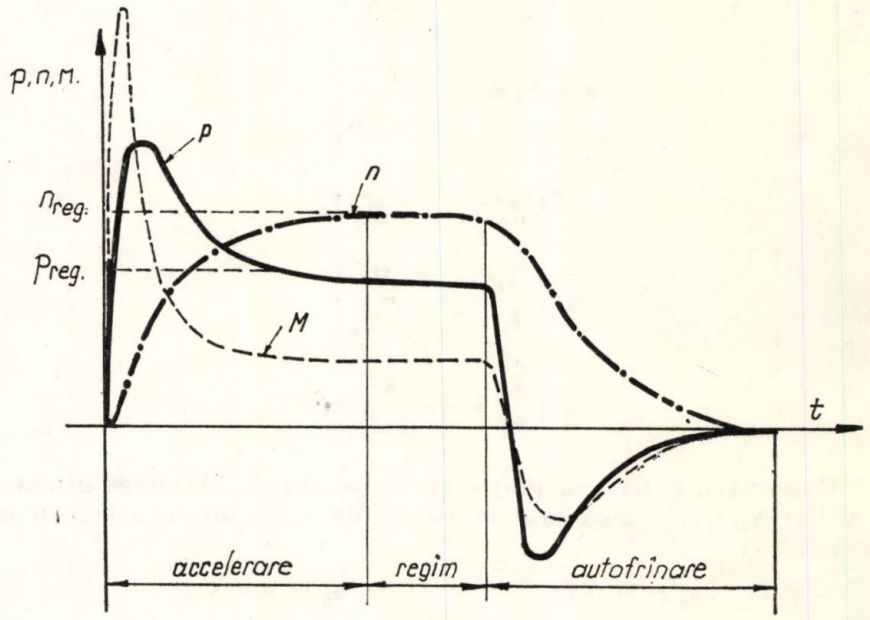


Fig. 5

a) Curba de variaţie $n = n(t)$ porneşte tangentă la axa t în perioada de accelerare, ceea ce este avantajos din punct de vedere dinamic, reducînd şocurile în mecanismele dintre axul motorului şi sania activă. Turaţia de regim de 1800 rot/min se atinge după un interval de 6,4 s, valoare ce în condiţiile încărcării cu un $M_r = 1{,}5$ kgfm reprezintă o performanţă însemnată comparativ cu motoarele electrice. În perioada de frînare, curba $n = n(t)$ evoluează după aceeaşi lege ca în perioada de accelerare, menţinîndu-se avantajele arătate.

b) Presiunea din instalaţie prezintă la începutul perioadelor de accelerare şi frînare salturi ce ating maxime într-un interval de $\simeq 0{,}3 - -0{,}4$ s, după care revine la presiunea de regim (jumătate din maximul atins anterior) într-un timp de 6 s.

În consecinţă, este necesar ca la proiectare să se ţină cont în fiecare caz în parte de prezenţa şocurilor de presiune în instalaţie.

Se poate aprecia că şocurile de presiune aduc totuşi o micşorare a duratei perioadelor tranzitorii. Este necesar însă studierea mai aprofundată a influenţelor reciproce dintre $p = p(t)$ şi durata lui $n = n(t)$ pentru perioada saltului. În general, se neglijează aceste influenţe, limitîndu-se presiunea prin reglare a supapei de siguranţă, fapt ce viciază rezultatele preconizate.

4. Momentul motor are o valoare mare la început de accelerare, datorată dealtfel, ca și în cazul presiunii, necesității de învingere a forțelor de frecare statică din sistemul propus, forțe ce au o valoare mult mai mare comparativ cu forțele dinamice necesare menținerii mișcării.

Cuplul mare la pornire este totodată o caracteristică avantajoasă

Primită la redacție la 22 martie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. A. Oprean, *Hidraulica mașinilor-unelte*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1968.
2. A. Oprean, Fl. Ionescu, L. Măsălar, M. Dobre, *Studiul dinamicii motoarelor hidrostatice rotative*, St. cerc. mec. apl., *2* (1972).
3. T. D. Truitt, E. A. Rogers, *Inițiere în calculatoare analogice*, București, Edit. tehnică, 1969.
4. E. E. Lewis, H. Stern, *Sisteme hidraulice automate*, București, Edit. tehnică, 1968.

CONSIDERAȚII ASUPRA UNGERII ANGRENAJELOR

de T. MLADINESCU
Institutul politehnic București

Se prezintă unele considerații asupra formării, întreruperii și ruperii peliculei de lubrifiant dintre flancurile dinților angrenajelor aflați în angrenare, atît sub aspect teoretic, cît și experimental.

Observarea funcționării roților dințate unse a dus la constatarea că și în condiții deosebit de severe de încărcare și viteză, uzura este atît de mică, încît a trebuit să se admită că ungerea flancurilor dinților este surprinzător de bună. Acest proces de ungere și influența sa asupra capacității portante a angrenajelor are însă un caracter complex și încă nu poate fi complet exprimat prin legi sau formule din care să rezulte concluzii sigure pentru practică.

Într-adevăr, fenomenul formării peliculei de lubrifiant între flancurile dinților conjugați este mai complex decît la lagărele cu alunecare, datorită pe de o parte faptului că flancurile dinților sînt echivalate cu cilindrii tangenți exteriori, față de cilindrii tangenți interior la lagăre, iar pe de alta datorită unui mai mare număr de factori influenți, mulți dintre ei de valori variabile în timpul angrenării (razele de curbură ale flancurilor, încărcarea dinților, vitezele de alunecare, viscozitatea lubrifiantului, toate variabile cu poziția punctului de contact, rugozitatea flancurilor etc.).

Totuși există multe elemente pentru înțelegerea calitativă și parțial cantitativă a fenomenului, care permit recomandări pentru alegerea și utilizarea lubrifianților, ca și pentru construcția și funcționarea angrenajelor. Astfel, în ceea ce privește formarea peliculei de lubrifiant și portanța se deosebesc următoarele cazuri :

1. FORMAREA ȘI MENȚINEREA PELICULEI DE LUBRIFIANT ÎNTRE FLANCURILE DINȚILOR NEDEFORMABILE, CU CONSIDERAREA VISCOZITĂȚII CONSTANTE A LUBRIFIANTULUI PE TIMPUL ANGRENĂRII

Primul cercetător care și-a pus această problemă aplicînd teoria hidrodinamică a ungerii a fost H. Martin [12] în 1916. Modelul său este format din două role cilindrice rigide cu joc între ele, avînd viteze peri-

ferice diferite v_1 şi v_2, iar în jocul dintre role aflîndu-se ulei cu viscozitate constantă (fig. 1).

Admiţînd aceleaşi ipoteze de bază ca şi în cazul lagărelor radiale cu alunecare funcţionînd în regim hidrodinamic şi avînd lungime infinită, a scris ecuaţia lui Reynolds pentru problema plană :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d^2v}{dy^2}\eta. \tag{1}$$

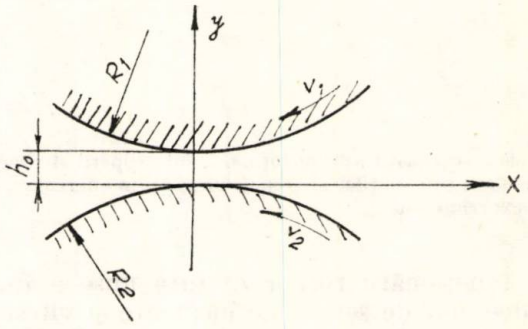


Fig. 1

De notat este că în cazul angrenajelor lăţimea zonei de contact a dinţilor fiind foarte mică în raport cu lungimea de contact (lăţimea coroanei dinţate), ipoteza lungimii infinite este mai justificată decît la lagăre.

Cazul cel mai simplu este cînd vitezele v_1 şi v_2 sînt egale, adică $v_1 = v_2 = v_0$.

Atunci, după integrare, ecuaţia (1) devine :

$$v = \frac{1}{2\eta}(y^2 - hy)\frac{dp}{dx} + v_0, \tag{2}$$

în care s-a notat cu h grosimea peliculei de lubrifiant.

Din condiţia de continuitate a curgerii se poate scrie :

$$\int_0^h v\,dy = C = -\frac{1}{12\eta}\frac{dp}{dx}h^3 + v_0 h \tag{3}$$

sau

$$\frac{1}{12\eta}\frac{dp}{dx} = \frac{v_0}{h^2} - \frac{C}{h^3}. \tag{4}$$

Constanta de integrare $C = v_0 h'$, în care h' este grosimea peliculei de lubrifiant în punctul unde $\frac{dp}{dx} = 0$.

Legea de variație a grosimii h la distanță mică de punctul cu $h = h_{min} = h_0$ (deoarece presiuni foarte mari pot să existe numai în această zonă îngustă) atît pentru cilindrii circulari, cît și pentru cilindrii evolventici se poate exprima prin relația:

$$h = h_0\left(1 + \frac{x^2}{2\rho h_0}\right), \tag{5}$$

unde h_0 este grosimea peliculei în locul apropierii maxime a flancurilor (grosimea minimă);

$$\rho = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \text{ — raza de curbură redusă a cilindrilor.} \tag{5'}$$

Pentru integrarea ecuației (4) se face înlocuirea

$$\frac{x}{\sqrt{2\rho h_0}} = \operatorname{tg}\gamma. \tag{6}$$

Atunci

$$h = h_0(1 + \operatorname{tg}^2\gamma) = \frac{h_0}{\cos^2\gamma} \tag{7}$$

și

$$\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\rho h_0}}{\cos^2\gamma}\,\mathrm{d}\gamma. \tag{8}$$

Înlocuind aceste expresii în ecuația (4) se obține:

$$\frac{\cos^2\gamma}{\sqrt{2\rho h_0}}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\gamma} = 12\eta\left(\frac{v_0}{h_0^2}\cos^4\gamma - \frac{v_0 h'}{h_0^3}\cos^6\gamma\right) =$$

$$= 12\eta\,\frac{v_0}{h_0^2}\left(\cos^2\gamma - \frac{h'}{h_0}\cos^4\gamma\right)\cos^2\gamma\,. \tag{9}$$

Înlocuind în expresia (7) $\frac{h'}{h_0}$ prin $\frac{1}{\cos^2\gamma'}$, fiind γ' valoarea lui γ în punctul unde $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$, se găsește

$$\frac{h_0^2\,\mathrm{d}p}{12\eta v_0\sqrt{2\rho h_0}} = \left(\cos^2\gamma - \frac{1}{\cos^2\gamma'}\cos^4\gamma\right)\mathrm{d}\gamma, \tag{10}$$

iar după integrare:

$$\frac{h_0^2}{12\eta v_0\sqrt{2\rho h_0}}p=\frac{\gamma}{2}+\frac{\sin 2\gamma}{4}+C_1-\frac{1}{\cos^2\gamma'}\times$$

$$\times\left(\frac{3\gamma}{8}+\frac{\sin 2\gamma}{4}+\frac{\sin 4\gamma}{32}\right). \tag{11}$$

În ecuația 11 sînt două constante: C_1 și γ'

Pentru C_1, presiunea $p=0$ la $x=-\infty\left(\gamma=-\frac{\pi}{2}\right)$, astfel că

$$C_1=\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{16\cos^2\gamma'}. \tag{12}$$

Pentru γ', ca și în cazul lagărelor, se poate porni de la condiții la limită diferite: condiția lui Sommerfeld, conform căreia $p=0$ la $x=+\infty\left(\gamma=+\frac{\pi}{2}\right)$ și la $x=0$; condiția lui Reynolds, care admite că $p=0$ acolo unde $\frac{dp}{dx}=0$ și la $x=+\infty$. A. Cameron și W. Wood [22] au arătat că condiția lui Sommerfed nu este reală. De aceea s-a propus a doua condiție care corespunde sensului fizic și se verifică experimental atît pentru lagăre, cît și pentru role. Astfel, înlocuind relația (12) în (11) se obține la $p=0$:

$$0=\frac{\gamma'}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\sin 2\gamma'}{4}-\frac{1}{\cos^2\gamma'}\left[\frac{3}{8}\left(\gamma'+\frac{\pi}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin 2\gamma'}{2}+\frac{\sin 4\gamma'}{32}\right]. \tag{13}$$

Din această ecuație se găsește că $\gamma'=0{,}44352$, iar

$$\frac{1}{\cos^2\gamma'}=1{,}2258, \text{ respectiv } h'=1{,}2258\ h_0.$$

De aci în final:

$$\frac{h_0^2}{12\eta v_0\sqrt{2\rho h_0}}p=\frac{\gamma}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\sin 2\gamma}{4}-1{,}2258\left[\frac{3}{8}\left(\gamma+\frac{\pi}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin 2\gamma}{4}+\frac{\sin 4\gamma}{32}\right]. \tag{14}$$

Din ecuația (6), rezultă

$$x' = \sqrt{2\rho h_0}\,\mathrm{tg}\,\gamma' = 0{,}47517\sqrt{2\rho h_0}. \tag{15}$$

Repartiția presiunii în funcție de γ (11), se poate exprima astfel:

$$p\,\frac{h_0^2}{12\eta v_0\sqrt{2\rho h_0}} = p^*, \tag{16}$$

în care, ca și la lagăre, p^* înseamnă o presiune adimensională.

Capacitatea portantă a peliculei de ulei pe unitatea de lungime a cilindrilor este

$$P_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p\,\mathrm{d}x, \tag{17}$$

în care p este presiunea dată de relația (14). Înlocuind pe p cu valoarea din (16) în funcție de p^* și făcînd schimbarea

$$\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\rho h_0}}{\cos^2\gamma}\,\mathrm{d}\gamma,$$

se determină P_1:

$$P_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\gamma'} \frac{2.12\eta v_0\rho}{h_0\cos^2\gamma}\,p^*\mathrm{d}\gamma. \tag{18}$$

Forța P_1^* adimensională este

$$P_1^* = \frac{h_0}{2.12\eta v_0\rho}\,P_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\gamma'} \frac{p^*}{\cos^2\gamma}\,\mathrm{d}\gamma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\gamma'} \left\{\frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\sin 2\gamma}{4} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\cos^2\gamma'}\left[\frac{3}{8}\left(\gamma + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\sin 2\gamma}{4} + \frac{\sin 4\gamma}{32}\right]\right\}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\cos^2\gamma}. \tag{19}$$

După o serie de transformări și simplificări se obține

$$P_1^* = \frac{1}{2}\left[\mathrm{tg}\,\gamma\left(\gamma + \frac{\pi}{2}\right)\left(1 - \frac{3}{4\cos^2\gamma'}\right) + \frac{\cos 2\gamma}{8\cos^2\gamma'}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\gamma'}. \tag{20}$$

Înlocuind limitele rezultă

$$P_1^* = \frac{1}{2}\left\{\left[1 + \mathrm{tg}\,\gamma'\left(\gamma' + \frac{\pi}{2}\right)\right]\left(1 - \frac{3}{4\cos^2\gamma'}\right) + \frac{1}{4}\right\}. \tag{21}$$

La $\gamma' = 0{,}44352$, $\frac{1}{\cos^2\gamma'} = 1{,}2258$ şi $\operatorname{tg}\gamma' = 0{,}47517$, se obţine portanţa adimensională $P_1^* = 0{,}20392$ şi apoi portanţa pe unitatea de lungime.

$$P_1 = \frac{2.12\eta v_0 \rho}{h_0} P_1^* = 4{,}896 \frac{\eta v_0 \rho}{h_0}. \tag{22}$$

La viteze v_1, v_2 neegale ale cilindrilor, în formula (22) se introduce $v_0 = \frac{v_1 + v_2}{2}$, astfel că se obţine, în final,

$$P_1 = 2{,}448 \frac{\eta(v_1 + v_2)\rho}{h_0}, \quad \text{respectiv} \tag{23}$$

$$h_0 = 2{,}448 \frac{\eta(v_1 + v_2)\rho}{P_1} \cong 2{,}45\,\eta \frac{(v_1 + v_2)\rho}{P_1}. \tag{24}$$

Presiunea maximă hidrodinamică are loc în punctul $x = 0{,}475\sqrt{2\rho h_0}$,

$$p_{\max} = \frac{1{,}521}{2} \frac{\eta(v_1 + v_2)}{h_0^2} \sqrt{2\rho h_0} = 0{,}76\,\eta(v_1 + v_2) \frac{\sqrt{2\rho h_0}}{h_0^2}. \tag{25}$$

Această teorie, în această formă sau alta apropiată, este expusă şi în lucrările lui A. Cameron, Mc. Ewen, W. Peppler; G. Niemann şi Weber, E. Gatcombe, A. Erteli, A. Petrusevici şi alţii.

O variantă care admite ca model iniţial două suprafeţe curbe oarecare se datorează lui R. Giovanozzi [6].

Utilizarea rolelor ca model teoretic şi chiar experimental este justificată prin faptul că în oricare poziţie de contact a dinţilor pe linia de angrenare, flancurile acestora pot fi considerate ca porţiuni de role cu razele R_1 şi R_2. Aplicarea acestei teorii la cazul concret a unui angrenaj a fost făcută de G. Niemann în 1955 [13]. Pe figura 2 se arată angrenajul considerat şi variaţia mărimilor ρ, v, v_a, h_0, p, p_H, N_p şi f_A pe lungimea segmentului de angrenare. Parametrii $y_1, y_2, \ldots, y_3, \ldots, y_7$ sînt funcţii de unghiul de angrenare α, poziţia punctului pe linia de angrenare x şi raportul de transmitere i.

De exemplu:

$$\rho = R_{r_1} y_1 \quad \text{cu} \quad y_1 = (i + 1)x \sin(1 - x), \tag{26}$$

$$v = v_{t_1} + v_{t_2} = \omega_1 \rho_1 y_2; \quad \text{cu} \quad y_2 = \frac{i + 1}{i} \cdot \sin\alpha\,[x - (i - 1) + 1], \tag{27}$$

$$h_0 = 2{,}45\,\eta \frac{\omega_1}{M_{t_1}} R_{r_1}^3 y_4; \quad y_4 = y_1 y_2 \cos\alpha. \tag{28}$$

Prin f_A s-a notat caracteristica de gripaj după Almen:

$$f_A = p_{H_{max}} v_a q, \tag{29}$$

în care q reprezintă distanța de la punctul de contact al dinților la punctul de rostogolire (P).

Se constată că:

— ρ variază după o sinusoidă simetrică,

— v crește liniar; v_a de asemenea, dar cu schimbare de semn în polul P,

— h_0 crește pînă la o valoare maximă și scade la zero la extremități deși aci vitezele de alunecare sînt maxime, deoarece $\rho = 0$. În punctul de rostogolire, h_0 este suficient de mare, deși viteza de alunecare este zero. Deci formarea peliculei lubrifiant și a presiunilor hidrodinamice p are loc nu numai datorită mișcărilor relative de alunecare ci și a mișcărilor relative de rostogolire. La extremități vitezele mari de alunecare produc încălziri micșorînd astfel viscozitatea uleiului și o dată cu ea pe h_0,

— presiunile hidrodinamice mari la extremități sînt datorate vitezelor de alunecare mari,

— presiunea herțiană p_H crește mai mult ca p în zona mijlocie ($x = 0{,}2 \ldots 0{,}8$).

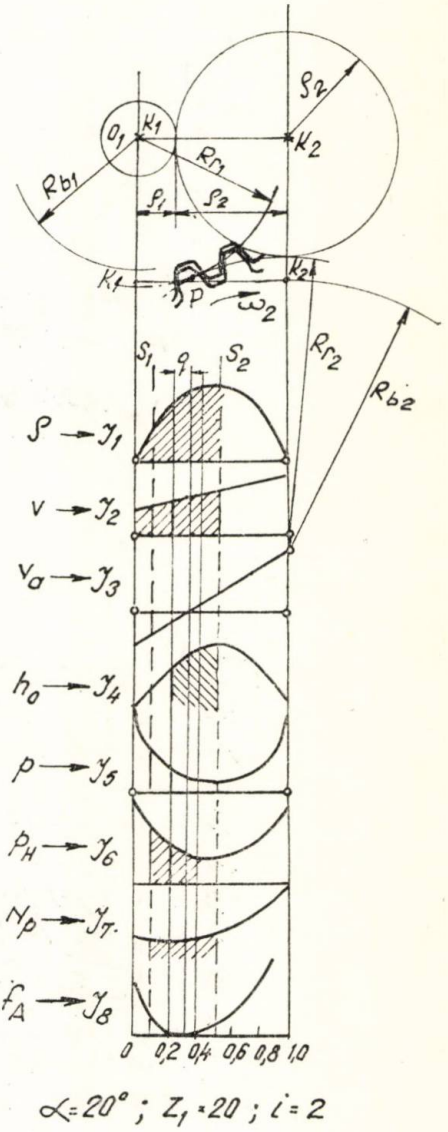


Fig. 2

În final, Niemann conchide că ungerea fluidă poate fi asigurată numai la viteze relative mari (în cazul considerat la peste 15 m/s). Sub aceste valori ungerea (frecarea) este mixtă.

În ceea ce privește verificarea experimentală, spre deosebire de lagăre, unde teoria clasică se verifică în domenii largi, la angrenaje se constată că teoria expusă mai sus nu este aplicabilă la sarcini mari în

special din cauza deformațiilor elastice ale dinților și a variației mari a viscozității uleiului cu presiunea. A.W. Crook [3] a găsit pe un stand cu role cilindrice că influența încărcării asupra lui h_0 se verifică numai la valori mici ale acesteia (fig. 3). La încărcări de peste 50 $\frac{daN}{cm}$ nu se

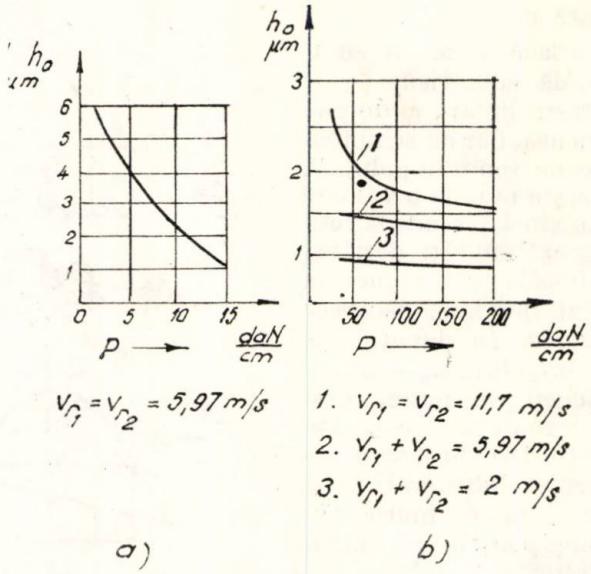


Fig. 3

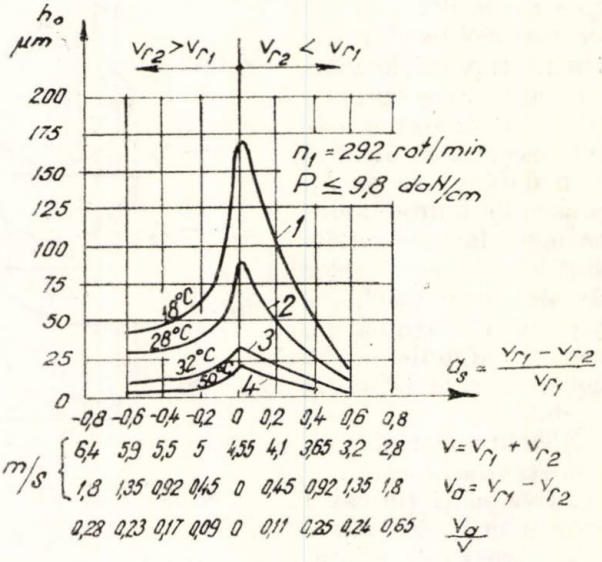


Fig. 4

mai observă influența ei asupra lui h_0. Rezultate similare au obținut și Mc. Conachie și A. Cammeron [2] pe un stand de roți dințate. Crește-

rea lui h_0 cu suma vitezelor de asemenea se verifică numai pentru încărcări mici $\left(3{,}15\,\frac{\text{daN}}{\text{cm}}\right)$. Sisi — El SI și A. Shawki [19] au constatat că grosimea maximă a filmului de lubrifiant se obține în condiții de rostogolire pură (fig. 4). N. Borsoff [1] a găsit că în regiunea punctului de rostogolire există totdeauna o peliculă continuă de lubrifiant, pe cînd în afara lui poate lipsi. Tot experimental se arată că în cazul cînd $v_1 + v_2 = 0$ (rotații inverse ale rolelor cu viteze egale), deși teoretic ar rezulta $h_0 = 0$ și deci rolele nu ar putea prelua sarcina, practic rolele funcționează bine chiar la sarcini mari.

Toate încercările experimentale au confirmat creșterea lui h_0 cu viscozitatea.

Grosimile h_0 rezultate din calcul sînt de cele mai multe ori mai mici decît 1 μm, ceea ce nu se verifică practic.

2. FORMAREA PELICULEI DE LUBRIFIANT ÎNTRE FLANCURI NEDEFORMABILE, CÎND VISCOZITATEA LUBRIFIANTULUI VARIAZĂ CU PRESIUNEA ÎN TIMPUL ANGRENĂRII

Pentru exprimarea variației viscozității cu presiunea s-au propus unele relații bazate pe date experimentale. Cele mai utilizate sînt:

$$\eta_p = \eta_0 \left(1 + \frac{p}{K}\right)^n, \tag{30}$$

în care constantele K și n depind de felul uleiului

$$\eta_p = \eta_0 e^{\alpha p}, \tag{31}$$

unde α este parametrul de variație a viscozității cu presiunea avînd valori dependente de felul uleiului și de temperatură, iar e reprezintă baza logaritmilor neperieni (unii cercetători au luat însă e = 10). Utilizarea primei relații a dus la concluzia că ungerea hidrodinamică încetează la o anumită valoare critică a grosimii h_0:

$$h_{0cr} = 1{,}05 \left\{ \rho \left[\frac{(n-1)\,\eta_0 (v_1 + v_2)}{K} \right]^2 \right\}^{1/3}. \tag{32}$$

După cea de a doua relație s-a găsit

$$h_{0cr} = 1{,}05 \{ \rho [\alpha \eta_0 (v_1 + v_2)]^2 \}^{1/3}. \tag{33}$$

Se constată că grosimea minimă a peliculei de ulei rezultă mai mare decît în cazul considerării viscozității constante.

3. FORMAREA PELICULEI DE LUBRIFIANT ÎNTRE FLANCURI NEDEFORMABILE CÎND VISCOZITATEA VARIAZĂ CU TEMPERATURA

Temperatura uleiului şi viscozitatea sa variază atît în direcţia mişcării, cît şi pe grosimea peliculei datorită frecării vîscoase şi comprimării adiabatice. Pentru variaţia viscozităţii pe grosimea peliculei s-au admis ca legi: legea liniară şi legea parabolică. La angrenajele metalice influenţa temperaturii asupra viscozităţii este mai puţin importantă decît la lagăre şi cu efect mult mai mic decît presiunea de contact. La angrenajele formate din roţi metalice angrenate cu roţi din mase plastice influenţa temperaturii asupra viscozităţii nu mai poate fi însă neglijată, urmînd a fi studiată mai de aproape.

4. FORMAREA PELICULEI DE LUBRIFIANT ÎNTRE FLANCURI DEFORMABILE ŞI CÎND VISCOZITATEA ULEIULUI VARIAZĂ CU PRESIUNEA (TEORIA ELASTOHIDRODINAMICĂ A UNGERII)

Luarea în considerare a deformaţiei elastice a dinţilor angrenajelor şi a variaţiei viscozităţii lubrifiantului cu presiunea a dus la teoria elastohidrodinamică a ungerii, care a fost adusă într-o formă acceptabilă pentru practică în 1949 de N. Grubin [10]; apoi de A. Petrusevici [17], iar în ultimii ani de către D. Dowson şi colectivul său [4], [5].

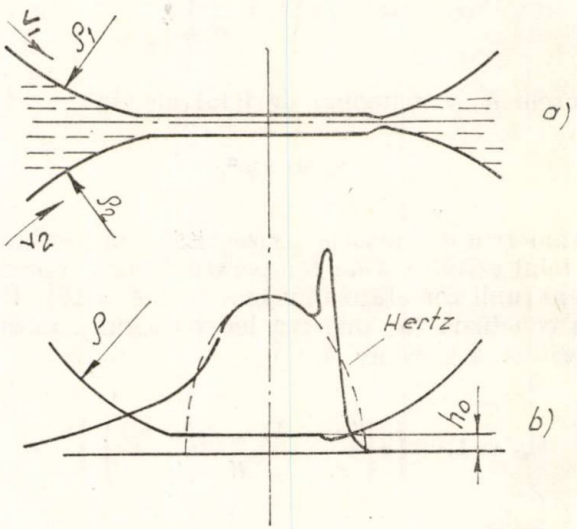


Fig. 5

Conform acestei teorii pelicula de ulei ce se formează între suprafeţele deformate a două role cilindrice rotitoare aflate în contact are aspectul din figura 5*a*. Cînd rolele nu se rotesc prezenţa sau absenţa uleiului nu influenţează repartiţia presiunilor în zona de contact care rămîne de

forma cunoscută de la teoria contactului uscat a lui Hertz (semielipsa trasată punctat) figura 5 *b*. Cînd rolele se rotesc fără alunecare cu vitezele suficient de mari v_1 și v_2, iar celelalte condiții ale teoriei hidrodinamice a ungerii sînt satisfăcute, apar presiuni hidrodinamice de forma reprezentată cu linie continuă pe figura 5 *b*.

Modelul inițial folosit de Grubin pentru simplificarea calculelor se prezintă pe figura 6 obținut prin înlocuirea celor două role cilindrice de

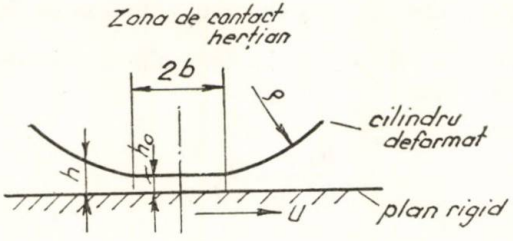


Fig. 6

raze ρ_1 și ρ_2 cu un cilindru echivalent cu raza ρ dată de relația (5'), avînd modulul de elasticitate E'

$$E' = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}\right), \tag{34}$$

în care E_1 și E_2 sînt modulele de elasticitate ale materialelor rolelor, iar μ_1 și μ_2 coeficienții lui Poisson pentru aceste materiale. Prin aceasta, în locul contactului celor două role deformate a introdus contactul cilindrului echivalent deformabil cu un plan perfect rigid.

Introducînd mărimile adimensionale $H = \frac{h}{\rho}$; $H_0 = \frac{h_0}{\rho}$ și $W = \frac{P}{E'\rho}$, iar variația viscozității cu presiunea după relația (31) alături de ipoteza lungimii infinite a cilindrului și planului de contact a putut integra ecuația diferențială a presiunilor a lui Reynolds (problema plana), ajungînd la

$$H_0 = \frac{h_0}{\rho} = \frac{1{,}95\,(G\overline{U})^{8/11}}{W^{1/11}}, \tag{35}$$

în care $G = \alpha E'$, iar $\overline{U} = \frac{\eta_0 U}{E'\rho}$, U fiind viteza relativă dintre plan și cilindru.

Sau, sub formă dimensională,

$$h_0 = 1{,}95\,(\eta_0 U\alpha)^{8/11}(E')^{\frac{1}{11}} P^{-\frac{1}{11}} \rho^{\frac{4}{11}}. \tag{36}$$

A. Petrusevici a găsit pentru grosimea minimă a peliculei de lubrifiant relaţia

$$h_0 = \frac{[\eta(v_1 + v_2)]^{0.625}\rho^{0.375}p_{max}^{0.125}}{13a^{0.5}} \text{ (cm)}, \tag{37}$$

în care p_{max} este presiunea herţiană maximă în $\frac{\text{da N}}{\text{cm}^2}$, iar a o constantă care pentru uleiurile minerale uzuale are valoarea de (350...500) $\frac{\text{da N}}{\text{cm}^2}$.

D. Dowson [5] a plecat de la formula găsită de Martin pe care a pus-o iniţial sub forma

$$\frac{h_0}{\rho} = 4{,}9\frac{V^*}{F^*}, \tag{38}$$

în care

$$V^* = \frac{\eta_0(v_{t_1} + v_{t_2})}{2E'\rho}; \qquad F^* = \frac{P}{BE'\rho},$$

unde E' are sensul dat de relaţia (34), P este forţa de apăsare a rolelor (după linia de angrenare), iar B lăţimea de contact.

Considerînd apoi variaţia viscozităţii cu presiunea după relaţia (31) şi unele rezultate experimentale, a ajuns la formula

$$\frac{h_0}{\rho} = \frac{1{,}6(\alpha E')^{0.6}(V^*)^{0.7}}{(F^*)^{0.13}}. \tag{39}$$

Apoi au pus această relaţie sub formele:

$$h_0 = 1{,}65(\alpha E')^{0.6}\left[\eta_0\left(\frac{v_1 + v_2}{2E'\rho}\right)\right]^{0.7}\left(\frac{\frac{P}{B}}{E'\rho}\right)^{-0.13}\cdot\rho \text{ pentru role}; \tag{40}$$

$$h_0 = \frac{1{,}6\alpha^{0.6}\left(\eta_0\frac{v_{t_1} + v_{t_2}}{2}\right)^{0.7}E'^{0.03}\rho^{0.43}}{\left(\frac{P_n}{B}\right)^{0.13}} \quad \text{pentru angrenaje} \tag{41}$$

într-un punct pe linia de angrenare.

Pentru α se recomandă la uleiuri minerale valoarea $2{,}2\cdot10^{-3}\ \frac{\text{cm}^2}{\text{daN}}$.

De asemenea, se propune şi o relaţie pentru grosimea peliculei chiar în punctul de rostogolire.

O dezvoltare mai mare a problemei se găsește în lucrarea [20]. Grosimea peliculei de lubrifiant calculată cu formulele de mai sus este de 10 pînă la 100 de ori mai mare decît în cazul utilizării relației lui Martin. Cu toate acestea experiențele nu verifică valorile calculate, dar diferențele sînt evident mai mici decît în cazul ungerii hidrodinamice. Nu se

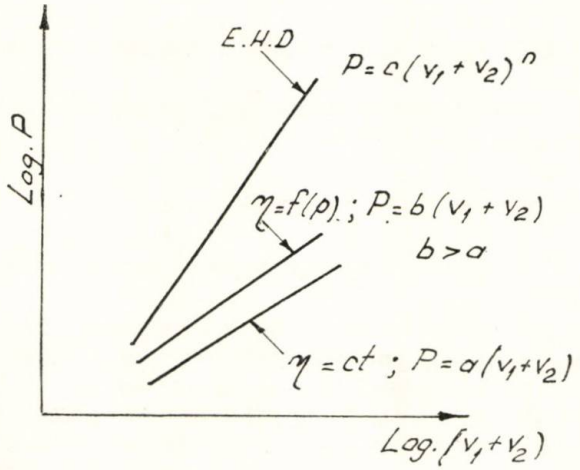


Fig. 7

constată experimental vîrfurile de presiune găsite teoretic și redate pe figura 5 *b*.

O comparație sugestivă a portanței obținută în cele trei cazuri de ungere: hidrodinamică clasică, cu considerarea variației viscozității uleiului cu presiunea și elastohidrodinamică, se dă pe figura 7 după M. Godet [7].

5. UNGEREA LIMITĂ

Atunci cînd cantitatea de ulei este insuficientă sau nu sînt satisfăcute condițiile ungerii hidrodinamice sau elastohidrodinamice se poate ajunge la ungerea limită (contactul între straturile monomoleculare de lubrifiant de pe flancuri). Aceste straturi se mențin datorită adsorbției sau chemisorbției lor de către suprafețele flancurilor — Dereaghin Kuticov, Fuchs și alții au stabilit că aceste straturi-limită sînt capabile să suporte presiuni de contact pînă la 2000 $\frac{\text{da N}}{\text{cm}^2}$ fără a putea fi expulzate din microfisuri sau rosturi. Alți autori sînt de părere că în condițiile limită și sub acțiunea presiunilor mari, hidrocarburile se comportă ca un mediu solid, sporind astfel rezistența la forfecare. A treia categorie de cercetători contestă însă continuitatea peliculei de ulei la ungerea limită atît din cauza înălțimii microasperităților suprafețelor, cît și a erorilor de profil ale dinților.

6. UNGEREA MIXTĂ (ÎNTRERUPEREA PELICULEI DE ULEI)

Continuitatea peliculei de ulei este asigurată în condiţiile ungerii hidrodinamice numai dacă

$$h_0 > R_{\max_1} + R_{\max_2}, \tag{42}$$

în care $R_{\max_1}$ şi $R_{\max_2}$ reprezintă înălţimile maxime ale asperităţilor flancurilor.

În cazul ungerii elastohidrodinamice, cercetările bazate pe statistica matematică au ajuns la condiţia

$$h_0 > 4\sigma \tag{43}$$

în care $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$; σ_1 şi σ_2 reprezentînd mediile patratice ale înălţimilor asperităţilor.

Cînd condiţiile de mai sus nu sînt îndeplinite, unele din asperităţile unei suprafeţe (flanc) pătrund prin pelicula subţire de lubrifiant şi vin în contact cu asperităţile de pe suprafaţa opusă. Are loc astfel întreruperea peliculei de lubrifiant, iar ungerea devine mixtă. Din cauza erorilor de formă a flancurilor dinţilor şi a razelor de curbură continu variabile de-a lungul segmentului de angrenare străpungerile locale ale peliculei de lubrifiant au loc în special în afara punctului de rostogolire. În orice caz, în comparaţie cu lagărele cu alunecare, pelicula de lubrifiant în timpul perioadei de angrenare este foarte labilă. La aceeaşi pereche de dinţi şi acelaşi ulei se pot întîlni toate formele de ungere dacă are loc o variaţie

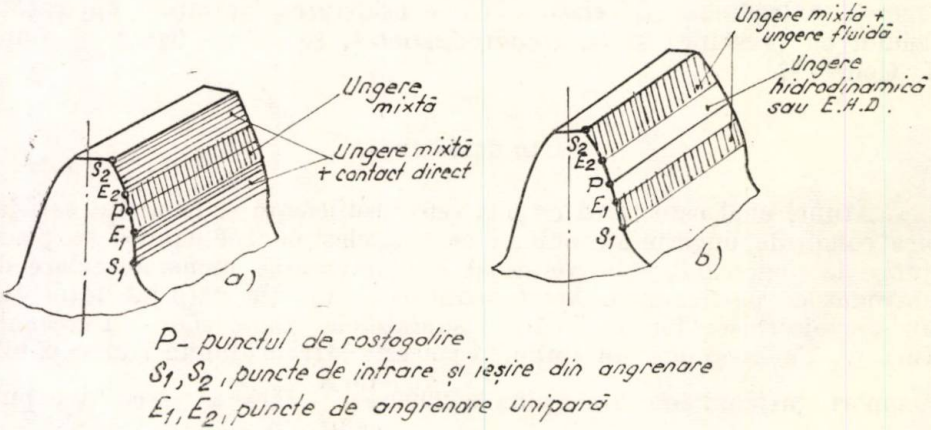


Fig. 8

de viteză şi sarcină. Astfel, la viteze mici sau încărcări mari pe flancul dinţilor poate fi realizată ungere mixtă şi contact direct (fig. 8*a*); după cum la viteze mari sau încărcări mici poate să apară ungere fluidă şi ungere mixtă (fig. 8 *b*).

Ungerea mixtă a angrenajelor a făcut obiectul cercetărilor lui Niemann și Rettig [14], Niemann și Gartner [15], Borsoff [1] și alții.

S-a constatat că o parte a sarcinii (P_h) se transmite prin pelicula de lubrifiant, iar partea rămasă (P_d) prin contactul direct al asperităților, astfel că

$$P = P_h + P_d. \tag{44}$$

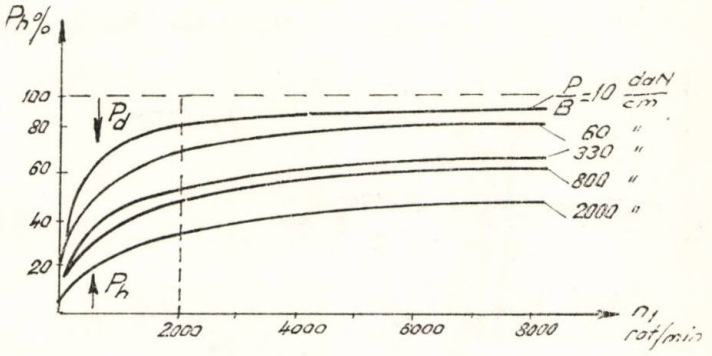


Fig. 9

Pe figura 9 se redă după experiențele lui Niemann procentul din încărcarea angrenajelor cilindrice cu dinți drepți transmis prin pelicula de ulei și prin contact direct. Acest procent este influențat și de felul materialului (oțeluri sau neferoase), de structura materialului (conținutul mare de austenită este de exemplu defavorabil), cît și de turație. Un rol deosebit are, evident, felul lubrifiantului și rugozitatea flancurilor.

7. RUPEREA PELICULEI DE LUBRIFIANT

Problema ruperii peliculei de lubrifiant are atît aspect hidrodinamic sau elastohidrodinamic, cît și aspect termic.

După primul aspect, ruperea are loc cînd grosimea peliculei devine inferioară unei valori critice, ca urmare a creșterii sarcinii sau schimbării vitezei în timpul funcționării (verificare făcută pe mașina cu patru bile). Aspectul termic datorează ruperea peliculei micșorării viscozității uleiului sau chiar evaporării lui ca urmare a supraîncălzirii produsă de mediu sau de schimbarea cinematicii angrenării.

Ruperea peliculei de ulei fiind strîns legată de fenomenul de gripaj, se reamintește că există mai multe criterii de gripaj. Unii cercetători consideră o sarcină critica de gripaj (Almen, Niemann), alții o temperatură critică (Bloc, Dudley-Kelley). Borsoff a arătat experimental că sarcina de gripaj scade cu creșterea vitezei, dar numai pînă la o anumită valoare, după care începe să crească (fig. 10).

În ultimul timp R. Wydler de la firma Maag [21] propune o relație simplă pentru calculul temperaturii instantanee limită:

$$T_{B\lim} = W_{tw}^{p} n^{q} \text{ în } °C, \tag{45}$$

în care W_{tw} este raportul dintre forţa tangenţială şi diametrul de rostogolire al pinionului ($W_{tw} = P_t/D_{r1}$) în: kf/cm, iar n turaţia. Exponenţii p şi q au, respectiv, valorile $p = 1$; $q = 0{,}25$.

Pentru verificare trebuie ca $T_{B\lim}$ să fie mai mică decît o temperatură instantanee admisibilă, care se calculează cu relaţia

$$T_{BP} = 140\ C\eta\ C_R \text{ în } °C, \tag{46}$$

unde $C\eta$ este un factor de viscozitate: $C_\eta = 1{,}5\ °E_{50}/(2 + °E_{50})$,

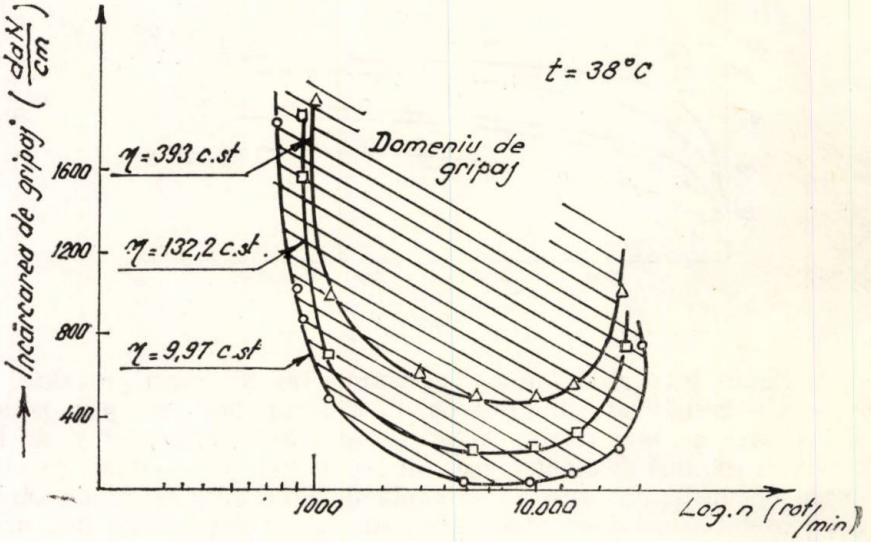


Fig. 10

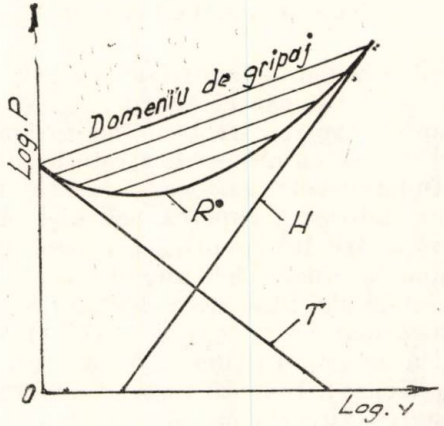


Fig. 11

C_R, factor de rugozitate: $C_R = \sqrt{(75 + R_{am})/4R_{am}}$; R_{am} fiind: $R_{am} = 2R_{a1}R_{a2}/(R_{a1} + R_{a2})$; iar R_{a1} şi R_{a2} rugozităţile flancurilor pinionului, respectiv roţii.

Legătura între criteriul hidro sau $E\ H\ D$ și cel termic este redată sugestiv în teoria celor două linii a lui Godet [8], care delimitează domeniul de gripaj (fig. 11). Linia notată cu H corespunde criteriului hidro sau $E\ H\ D$, iar cea notată cu T criteriului termic.

În încheiere se precizează că toate considerațiile făcute sînt valabile pentru angrenaje cilindrice și conice. La angrenajele încrucișate de tipul melc-roată melcată, alunecarea în lungul flancurilor complică problema. Deși există unele încercări de studiere a ungerii lor, rezultatele obținute nu au încă caracter de generalitate.

Primită la redacție la 14 septembrie 1972.

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. Borsoff, *Gear Lubrication*, În Lubrification Engineering, *6* (1962).
2. O . Mc Conachie, A. Cameron, *The Measurement of Oil Film Thickness*, In Gear Teeth in Transactions of the ASME, Serie D, 1960 martie.
3. A. W. Crook, *The lubrication of rollers*, In Philosophical Transaction, Seria A, vol. 250 (1958).
4. D. Dowson. R. Higginson, *Elasto-Hydrodynamic Lubrication*, Pergamon Press, London, 1966.
5. D. Dowson, R. Higginson, *Theorie der Evolventzahnradschmierung*, In Maschinenbautechnik, *4* (1971).
6. R. Giovanozzi, *Studio teoria della lubrificazione nelle danture cilindriche*, Memorie della Accademia Reale delle Scienze di Torino, Tom I, P I, 1940—41.
7. M. Godet, *Hydrodynamique et thermique dans la lubrification des engrenages*, În Revue M. Mécanique, **11**, *1* (1965).
8. M. Godet, *La théorie de deux lignes dans la lubrification des engrenages*, În Le génie civil, 15 octombrie 1963.
9. D. M. Genkin și colab., *Vaprosî zaedania zubceatîh koles*, Moscova, Izd. Akademia Nauk SSSR, 1959.
10. A. N. Grubin, *Osnovî ghidrodinamiceskoi teorii zmaski tiajelona grujenîh țilindriceskih poverhnotei*, Tnitmașgniga 30, Mașgiz 1949.
11. Gh. Manea, T. Mladinescu și colab., *Influența lubrificației și a vitezei periferice asupra capacității portante a roților dințate cilindrice cu dantura dreaptă din poliamidă indigenă*, În Materiale plastice, *10* (1970).
12. H. M. Martin, *The Lubrication of Gear Teeth*, In Engineering, *102* (1916).
13. G. Niemann, *Schmierfilmbildung, Verlusleistung und Schadensgrenzen bei Zahnrädern mit Evolventenverzahnung*, VDI—Z, *10* (1955).
14. G. Niemann, H. Rettig, *Schmierungsfragen bei Zahnrädern, Zahnflankenschäden und deren Beeinflussung durch das Schmiermittel*, In Maschinenschaden, *3—4* (1965).
15. G. Niemann, F. Gartner, *Die Mischreibung bei Linienberuhrung*, VDI-z, *6* (1966).
16. D. Pavelescu, *Concepții noi, calcul și aplicații în frecarea și uzarea solidelor deformabile*, Edit. Academiei, 1971.
17. A. Petrusevici, *Kontactnie napriajenia deformații i contactnoghidrodinamiceskaia teoria smazki*, Disertație, Inst. Mașinovedenia A. N.S.S.S.R., 1950.
18. V. M. Raico, *Smazka zubceatîh peredaci*, Izd. Tehnica, Kiev, 1970.
19. Si-El-Sisi, A. Shawki, *Measurement of Oil Film*, Thickness between, Transactions of the ASME, Seria D, martie 1960.
20. H. Theise, *Elastohydrodynamik*, In Schmiertechnik, *1* (1967).
21. R. Wydler, *Voraussage über die Öltragfähigkeit von Hochleistungsgetrieben*, In Konstruktion (Zürich), Heft *3*, März 1972.
22. W. Wood, A. Cameron, Proc. Journal of Mech. Engineers, 1949, 161, 59.

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE

LUCRĂRILE CONFERINŢEI DE MAŞINI HIDRAULICE ŞI PNEUMATICE DE LA BUDAPESTA, 1972

de ŞTEFAN ZAREA
Institutul politehnic Bucureşti

Organizate cu regularitate, la intervale de trei ani, conferinţele, cu participare internaţională, pe teme de mecanica fluidelor şi de maşini hidraulice şi pneumatice, care se desfăşoară la Budapesta sub egida Asociaţiei ştiinţifice a inginerilor mecanici din Ungaria şi a secţiei de ştiinţe tehnice a Academiei de ştiinţe din aceeaşi ţară, s-au impus ca o manifestare ştiinţifică şi tehnică de prestigiu. A patra ediţie a acestei conferinţe a fost organizată tot la Budapesta, în intervalul 11—16 sept. 1972 şi a reunit specialişti din 23 de ţări pentru a participa la expunerea celor 104 lucrări, care au fost publicate într-un volum de 1570 de pagini, în condiţii grafice foarte bune.

Lucrările prezentate la conferinţă au fost elaborate de specialişti din 16 ţări, cu următoarea repartiţie, în ordine descrescătoare: Ungaria — 19, România — 15, Cehoslovacia — 13, Polonia — 9, Italia — 8, Anglia şi R.D.G. — cîte 7, R.F.G. — 6, Iugoslavia şi U.R.S.S — cîte 5, S.U.A — 4, Franţa, Suedia — cîte 2, Austria, Japonia, — cîte o lucrare.

În volumul oferit participanţilor la Conferinţă, lucrările sînt orînduite în ordinea alfabetică a autorilor. În cele ce urmează vom face o foarte succintă prezentare a lucrărilor, în ordinea în care apar acestea în volum. Astfel, O. Acton (Italia) descrie încercările de laborator ale unui sistem original de preluare a variaţiilor de sarcină pentru compresoarele axiale şi centrifuge acţionate de turbine cu abur sau gaze. D. Altman (R.D.G.) prezintă un procedeu pentru deducerea expresiei aproximative a distribuţiei vitezei în spaţiul dintre rotor şi carcasa spirală a unei pompe centrifuge. J. Amecke (R.F.G.) extinde similitudinea Prandtl-Glauert şi pentru mişcarea neizentropică printr-o reţea de profile. V. Ancuşa şi I. Anton (România) au stabilit o formulă nouă pentru perioada succesiunii nucleilor de cavitaţie în stratul-limită al unui profil

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 32, NR. 3, 1973, P. 703—708

Clark. I. Anton şi V. Dobîndă au întreprins un studiu critic asupra a două tipuri de convertizoare hidraulice de cuplu pentru locomotivele electrice. I. Anton şi M. Popoviciu au efectuat un studiu experimental sistematic asupra comportării bulelor semisferice generate prin procedee electrice şi efectele lor cavitaţionale asupra suprafeţelor solide. I. Anton şi L. Vékás au studiat teoretic şi au verificat experimental influenţa neregularităţilor suprafeţelor solide în sensul sporirii vitezei de formare a nucleelor de cavitaţie precum şi corelarea cu conţinutul de gaze a lichidului respectiv. K.H. Baade (R.D.G.) a întreprins un interesant studiu analitic şi experimental asupra mişcării unui gaz în zona de la ieşirea din rotorul unui compresor centrifug şi în difuzorul fără palete al maşinii respective. E. Bak (Polonia) stabileşte expresiile înălţimii de pompare şi a puterii unei pompe centrifuge în funcţie de dimensiunile şi concentraţia granulelor de cărbune pe care le conţine fluidul bifazat pompat. M. Bărglăzan (România) şi C. Buza (Iugoslavia) au studiat interacţiunea dintre o pompă diagonală şi sistemul hidraulic pe care-l deserveşte variind forma şi poziţia muchiei de intrare a paletei rotorului şi prerotaţia din conducta de aspiraţie. A. Benanti şi U. Pighini (Italia) utilizînd analiza dimensională au dedus o corelaţie între proprietăţile lichidului şi cele ale materialului suprafeţei solide cu care este în contact şi respectiv ale aparaturii care generează vibraţiile ce produc cavitaţie. F. Bencze (Ungaria) propune o metodă pentru determinarea caracteristicilor gazului în mişcarea tranzitorie provocată de punerea în funcţiune a unui ventilator. D. L. Bhole, B.Y. Murthy, Subir Kar (India) au elaborat un procedeu de micşorare a vitezei cu care apa părăseşte rotorul unei turbine Pelton. Bobok L. (Ungaria) propune determinarea globală a disipării de energie ca diferenţa între energia transferată între rotor şi curentul de fluid pentru un fluid ideal şi un fluid real (măsurată). W.A. Bullough (Anglia) a elaborat o teorie pentru pompa cu sabot în ipoteza mişcării laminare şi compară rezultatele teoretice cu cele experimentale. J. Camek (Cehoslovacia) expune o metodă pentru determinarea prin calcul, cu ajutorul unui calculator, a curbei caracteristice a unei turbine cu gaz. R. Comolet şi L. Fernez (Franţa) prezintă teoria şi verificarea ei experimentală pentru un debitmetru cu elice. Aceiaşi autori dau o scurtă descriere a unui rotoscop, aparat pentru vizualizarea mişcării în rotorul unei turbomaşini. G. Corbellini (Italia) analizează comportarea unui sertăraş funcţionînd ca element de automatizare proporţional în regulatorul unei turbine. Împreună cu A. Silvestri studiază răspunsul la ieşire al unui sistem de reglare a grupurilor hidroelectrice de mare putere. J. Csemniczky (Ungaria) a efectuat un studiu experimental şi teoretic al comportării hidraulice a clapetelor de reţinere şi al unei vane fluture. Împreună cu A. Fáy a determinat cuplurile produse de forţele hidrodinamice, centrifuge, de frecare şi al greutăţii proprii pe paletele pompelor axiale. W.K. Deeprose şi P.J. Mc. Nulty (Anglia) au efectuat un studiu sistematic al zgomotului produs de pompele uzuale în regim de cavitaţie. V. Dobîndă, G. Gavrilă (România) analizează modul de rezolvare a compatibilităţii între posibilităţile unui stand de încercare şi necesităţile impuse de modelul turbinei care trebuie studiate. Cs. Fáy (Ungaria) analizează modalităţile de proiectare a unei pompe centrifuge de rapiditate mică pentru a realiza un randament optim, T.B. Ferguson (Anglia) pune în evidenţă că pentru

măsurătorile distribuției de presiuni și de viteze este indicat un tub Pitot cu capul în formă de pană. I. Fitero (România) prezintă rezultatele măsurătorilor asupra turbulenței într-o carcasă spirală a unei turbine Kaplan. I. Fitero și I. Anton analizează pierderile de sarcină într-o carcasă spirală de secțiune trapezoidală. P. Fleischner (Cehoslovacia) a elaborat o metodă de tasare a spectrului mișcării în planul meridian al unei turbomașini în ipoteza mișcării potențiale, utilizînd o distribuție de singularități și reducînd problema la o ecuație integrală. S. Gahin (Anglia) preconizează calculul presiunii statice, de stagnare și a celei totale într-o turbomașină, ținînd seama de distribuția energiei, A.A. Gasiunas (Anglia) pune în evidență că perturbațiile curentului de apă la ieșirea din rotorul unei pompe centrifuge se resimt departe în aval, unde pot produce cavitație. M. Gottschalk (Anglia) a demonstrat prin încercări experimentale că pentru a se realiza un ventilator centrifug cu caracteristica stabilă, una dintre modalități constă în a micșora numărul de palete al rotorului. G. Grabow (R.D.G.) compară rezultatele experimentale pentru o pompă cu canal periferic cu cele obținute pe cale teoretică, în diferite ipoteze. O altă lucrare a aceluiași autor analizează influența formei paletelor asupra caracteristicilor pompelor cu inel de lichid, a celor cu vîrtej și a cuplajelor hidraulice. Fr. P. Guli (Italia) realizează o analiză a turbinelor-pompe din uzinele hidroelectrice cu acumulare prin pompare din Europa, care au înălțimi de aspirație minime. B.A. Gustafson (Suedia) prezintă rezultatele experimentării diferitelor variante pentru o pompă — turbină reversibilă. F. Gyulai (România) expune o metodă proprie pentru predeterminarea locului în care apare cavitația secundară într-o mașină hidraulică. K. Haindl (Cehoslovacia) analizează condițiile în care nu este corect să se neglijeze variația nivelului apei în amortizoarele de șoc hidraulic de pe conductele de refulare ale pompelor. G. Halász (Ungaria) prelucrează datele experimentale pentru determinarea împingerii axiale la o pompă centrifugă, aplicînd teoria similitudinii. P. Hergt și P. Krieger (R.F.G.) calculează teoretic și verifică experimental forțele radiale și momentele generate de prezența carcasei spirale asupra rotorului unei pompe centrifuge. Y.C. Huang, F.G. Hammit și W.J. Yang (S.U.A) au studiat fenomenele hidrodinamice datorate impactului unei picături sferice pe un plan rigid. F.J. Hegman (S.U.A) critică unele din concluziile din articolul precedent iar autorii își însușesc parțial observațiile. D-tru Ionescu (România) stabilește o nouă expresie a repartiției vitezei în stratul-limită turbulent. J. Janalik (Cehoslovacia) aplică un procedeu magnetohidrodinamic pentru măsurarea fluctuațiilor vitezei și determinarea spectrului energiei într-un fluid bun conducător de electricitate. P. Kavanagh și M.J. Miller (S.U.A) au studiat pe două cazuri de pompe (compresoare) axiale condițiile în care nu se păstrează echilibrul radial. S.P. Kozîrev și K.K. Șalnev (U.R.S.S) pun în evidență că ipoteza relaxării permite explicarea comportării speciale a impactului unei mase mici de lichid cu o suprafață solidă. L. Krsmanović (Iugoslavia) studiază rezolvarea pe un calculator electronic a problemei șocului hidraulic în instalațiile unui reactor nuclear. I. Kurutz și L. Preszler (Ungaria) studiază pe model condițiile de ventilare a unui tunel rutier. T. Lajos și L. Preszler (Ungaria) prezintă o metodă de calcul hidrodinamic a ventilatorului transversal. B.R. Lazarenko și colab. (U.R.S.S) analizează rezul-

tatele experienţelor de eroziune cavitaţională şi interacţiunea cu trecerea unui curent electric prin lichidul respectiv. R.I. Lewis (Anglia) dezvoltă o metodă iterativă, aplicabilă pe calculator, pentru proiectarea ventilatoarelor. E. Litvai (Ungaria) propune o nouă relaţie pentru calculul stratului-limită turbulent pe paletele unei turbomaşini. U. Manfrass (R.D.G.) studiază teoretic şi experimental efectul carcasei spirale asupra rotorului unei pompe centrifuge. H. Marcinowski (R.F.G.) analizează condiţiile în care determinarea pe cale experimentală a curbelor caracteristice a unui ventilator este corectă. Z. Moravec (Cehoslovacia) propune relaţii de calcul a zgomotului produs de un compresor axial. J. Noskievič (Cehoslovacia) completează cu încă doi termeni expresia NPSH la pompe centrifuge, din care unul ţine seama de pierderile de sarcină datorite devierii curentului de lichid şi al doilea de variaţia vitezei. Acelaşi autor analizează condiţiile de aspiraţie într-o pompă cu piston. De asemenea, împreună cu un colaborator, calculează mişcarea laminară prin fante circulare. J.K. Nowakovski (Polonia) a determinat pe cale experimentală influenţa turaţiei asupra randamentului şi curbei caracteristice a unei turbosuflante. A. Nyiri şi colab. (Ungaria) au efectuat experienţe pentru eliminarea prerotaţiei la o pompă pentru apa de răcire a unei centrale termoelectrice. D. Obradovici (Iugoslavia) a dezvoltat o metodă de calcul hidrodinamic a reţelelor de profile aşezate în serie. B. Oddving (Suedia) prezintă rezultatele experimentale ale unui injector în regim supersonic. J. Osterwalder (R.F.G) propune dimensionarea carcasei spirale a unei turbine în ipoteza pierderilor de sarcină minime. A. Paciga (Cehoslovacia) a elaborat o metodă pentru stabilirea regimului optim de funcţionare a pompelor dintr-un sistem hidraulic. U. Pighini şi A. Benanti (Italia) întreprind un studiu critic comparativ al procedeelor de producere a cavitaţiei. În alte două lucrări analizează critic tipurile de instalaţii utilizate în investigaţiile asupra eroziunii cavitaţionale. O. Popa (România) propune o relaţie generală între proprietăţile aerodinamice ale unui profil izolat şi ale aceluiaşi profil situat într-o reţea oarecare. M. Popoviciu (România) prezintă studiul evoluţiei bulelor sferice, efectuat prin fotografiere. R. Prager (R.D.G) determină influenţa conţinutului în gaz a unui lichid vehiculat de o pompă asupra capacităţii de aspiraţie. L. Preda (România) pune în evidenţă modul raţional de alegere a scării modelului pentru o turbină axială, ţinînd seama de domeniul de aplicabilitate al standului experimental disponibil. L. Preszler şi T. Lájos (Ungaria) prezintă rezultatele încercării unui ventilator transversal. Z. Protić (Iugoslavia) preconizează o metodă de predeterminare a curbei caracteristice a unei maşini de lucru axiale pe baza experimentării unui rotor încercat într-un stand cu vână liberă. D. Rachman şi R. Connel (Anglia) au studiat experimental eroziunea cavitaţională a compoziţiei unui cuzinet de oţel lubrificat cu ulei. M. Rais (Cehoslovacia) arată rezultatele obţinute la rezolvarea pe calculator a problemei mişcării potenţiale printr-o reţea de profile. B. Rákosy (Ungaria) pune în evidenţă că intensitatea uzurii pompelor pentru hidrotransport este proporţională cu turaţia şi înălţimea de pompare. B. Rebernik (Austria) realizează o cercetare teoretică şi experimentală a structurii cinematice a mişcării în difuzorul pompelor centrifuge. R. Kohatynski şi A. Wajda (Polonia) au verificat experimental influenţa unghiului de ieşire din rotorul unei pompe cen-

trifuge asupra curbei caracteristice. M. Ružička (Cehoslovacia) studiază repartiția vitezelor pe trei tipuri de profile destinate turbinelor cu gaze. S. Saito și colab. (Japonia) prezintă cercetările asupra amortizării componentei tangențiale într-o conductă cilindrică circulară. W. Schöneberger (R.F.G) studiază influența conductei de aspirație asupra apariției cavitației în pompele centrifuge. G. Sebestyen și Strteczky F. (Ungaria) întreprind o analiză experimentală a caracteristicilor de eroziune cavitațională în pompele centrifuge. K.P. Seleznev și Șkrabul S.N. (U.R.S.S) au studiat evoluția stratului-limită pe paletele rotorului unei pompe centrifuge. K.K. Șalnev și B.A. Cerniavski (URSS) analizează rezultatele experimentale ale comportării unui sertăraș cu și fără regim de cavitație. K.K. Șalnev și F.A. Șalobasov au determinat eroziunea cavitațională a coturilor conductelor. E. Șișak, I. Preda și E. Kiss (România) au experimentat o metodă de mărire a capacității de înghițire a unei turbine Kaplan. L. Somlyódy (Ungaria) propune o nouă metodă aproximativă pentru calculul curbelor caracteristice ale ventilatoarelor axiale. K. Steller (Polonia) stabilește o corelație între simptomele apariției cavitației observate la încercarea turbinelor Kaplan și pompelor centrifuge. Împreună cu Z. Reymann au cercetat influența gradului de finisare al suprafeței asupra eroziunii cavitaționale. Ž. Stojanović (Iugoslavia) precizează prin experimentări efectele unghiului de intrare asupra curbelor caracteristice ale pompelor de dragaj. O. Stryček (Cehoslovacia) compară rezultatele teoretice și experimentale referitoare la curenții secundari în pompele axiale. Szewalski (Polonia) propune o variantă de sporire a randamentului ciclurilor mașinilor cu abur. D. Szüle (Ungaria) stabilește relații generale care permit calculul caracteristicilor convertizoarelor hidraulice de cuplu. Într-o altă lucrare, aceeași problemă autorul o rezolvă folosind teoria rețelelor de profile. Vala și Noskievici (Cehoslovacia) studiază cavitația cu dispozitive magnetostrictive. I. Varga și colab. (Ungaria) au cercetat experimental eroziunea și caracteristicile acustice ale cavitației pentru un disc în rotație. A. Verba și A. Szabó (Ungaria) au elaborat o metodă de stabilire a caracteristicilor unei pompe care vehiculează un fluid vîscos, cunoscute fiind caracteristicile pentru apă curată. I. Vušković și D. Obradović (Iugoslavia) propun o metodă de optimizare a calculului hidrodinamic al rotorului Kaplan. S. Wilk (Polonia) studiază experimental efectul paletelor radiale de pe extradosul rotorului unei pompe centrifuge asupra împingerii axiale. G. Will (R.D.G) studiază analitic mișcarea bidimensională într-o rețea de profile. A. Witowski (Polonia) a experimentat un compresor axial cu accelerarea curentului în plan meridian. Șt. Zarea (România) prezintă o clasă de mișcări elicoidale axial-simetrice care pot fi utilizate la trasarea spectrului hidrodinamic în planul meridian al turbinei Francis. I. Zobory (Ungaria) studiază pe cale teoretică mișcarea lichidului într-un convertizor hidraulic de cuplu.

Numărul mare de lucrări și varietatea temelor abordate dovedesc interesul manifestat de specialiști pentru reuniunea de la Budapesta,

care, prin modul remarcabil în care a fost organizată, a dat posibilitatea participanților să efectueze un rodnic schimb de opinii.

Din partea țării noastre au fost prezenți la conferință: prof. Șt. Zarea, prof. O. Popa, conf. dr. ing. I. Preda, dr. ing. D. Ionescu, ing. M. Bărglăzan și ing. Șt. Kinizsy.

Președintele comitetului de organizare, prof. dr. doc. J.J. Varga și colaboratorii săi au efectuat o minuțioasă și utilă muncă de rezolvare a numeroaselor probleme care au apărut și au asigurat o desfășurare optimă a lucrărilor conferinței, a cazării oaspeților și a vizitelor cu caracter tehnic și turistic. Redactorii volumului conținînd lucrările conferinței, ing. I. Kisbocsoi și A. Szabó, au asigurat editarea acestuia în condiții grafice bune.

SIMPOZIONUL ASUPRA MAŞINILOR HIDRAULICE REVERSIBILE, ROMA, 1972

de ŞTEFAN ZAREA
Institutul politehnic Bucureşti

Dezvoltarea construcţiei de uzine hidroelectrice cu acumulare prin pompare (UHEAP) a ridicat la rang prioritar problema maşinilor hidraulice reversibile (turbine-pompe). Ţinînd seama de această cerinţă actuală a tehnicii, Asociaţia internaţională de cercetări hidraulice (AIRH), prin secţia de maşini hidraulice, echipamente şi cavitaţie, a organizat la Roma, în intervalul 25—27 sept. 1972, un simpozion consacrat maşinilor care pot funcţiona atît în regim de turbinare, cît şi în regim de pompare.

Simpozionul, al VI-lea pe o temă restrînsă, organizat de AIRH în ultimii ani, a reunit 47 lucrări elaborate de specialişti din 15 ţări. Lucrările au fost clasificate în zece grupe, după tematică, iar simpozionul s-a desfăşurat în zece şedinţe de lucru, fiecare dintre acestea avînd ca obiectiv prezentarea lucrărilor dintr-o astfel de grupă. Fiecare şedinţă a fost condusă de către un birou, avînd ca preşedinte pe unul din specialiştii recunoscuţi în domeniul temei dezbătute. Preşedintele fiecăreia dintre secţii a prezentat cîte un raport general conţinînd o analiză a lucrărilor cuprinse în grupa respectivă, menţionînd totodată aspectele care n-au fost abordate sau care au rămas deschise.

În cele ce urmează se prezintă o succintă analiză a lucrărilor, în ordinea în care au fost sistematizate de organizatorii simpozionului în volumul publicat.

Grupa I conţine trei lucrări referitoare la schemele UHEAP. S. Louie (S.U.A) prezintă rezultatele cercetărilor de laborator asupra prizelor de apă, interioară şi superioară, asupra grătarelor de protecţie, a vibraţiilor acestora precum şi date privind exploatarea UHEAP Seneca cu o putere instalată de 342 MW. G.L. Buchnan şi colab. (U.S.A) expune o succintă descriere a planului de amenajare şi a echipamentului hidromecanic şi a celui electric al UHEAP Raccoon Mountain, cu o putere instalată de 1530 MW, avînd patru agregate energetice cu o putere de

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 32, NR. 3, 1973, P. 709—713

391,4 MW fiecare, ceea ce reprezintă un nou record pentru astfel de mașini. Centrala este subterană și va intra în exploatare în 1975.

E. Petrini (Italia) analizează influența grupurilor reversibile ale UHEAP Suivana Brasimone asupra funcționării sistemului energetic al Italiei centrale, ținînd seama de sistemul de automatizare.

Grupa a II-a este consacrată turbomașinilor reversibile clasice și cuprinde cinci lucrări. I. Anton (România) stabilește relații pentru calculul parametrilor principali (Q,H) ai mașinilor reversibile și analizează influența diferiților parametri asupra construcției și funcționării acestor mașini. M. Medici (Italia) întreprinde o sinteză a dezvoltării istorice a mașinilor reversibile și subliniază avantajele acestor agregate și tendințele dezvoltării lor ulterioare. W.G. Whippen (S.U.A) analizează factorii de care se ține seama la alegerea unei turbine-pompe radial-axiale (Francis) în cadrul tendinței actuale de mărire a rapidității la căderile mari.

P. Spitaler (Austria) analizează influența unor modificări constructive ale rotoarelor radial-axiale ale mașinilor reversibile utilizînd rezultatele încercărilor pe modele. R. Vivanelli (Italia) sugerează utilizarea unui nou coeficient de cavitație, care ar spori siguranța proiectării formelor geometrice ale rotorului mașinilor reversibile.

Grupa a III-a cuprinde patru lucrări referitoare la noile tendințe în construcția turbomașinilor. M. Nechleba (Cehoslovacia) prezintă rezultatele experimentate pe model ale uneia din variantele noului tip de mașină reversibilă HONE, cu rotor radial-axial. J. Perrier (Franța) întreprinde o analiză a tipurilor de agregate pentru UHEAP de căderi mari și pune în evidență avantajele utilizării de mașini hidraulice reversibile multietajate cuplate cu mașini electrice reversibile, pentru $H = 500...$ 1000 m. O. Ceravoda (Italia) examinează posibilitatea utilizării în UHEAP a turbinelor Pelton funcționînd cu contrapresiune, iar pe baza unor încercări de laborator a stabilit influența factorilor principali asupra comportării agregatului. G. Beducci (Italia) compară rezultatele încercărilor pe model pentru o turbină Francis bietajată cu una monoetajată, la care a obținut randamente practic egale, recomandînd folosirea în UHEAP pentru căderi mari a turbinelor Francis cu două etaje.

Grupa a IV-a include patru lucrări despre organele principale ale turbomașinilor. Astfel, G. Borciani (Italia) compară rezultatele obținute pe model și la o mașină industrială pentru un lagăr axial cu camere de echilibrare hidraulică, în regim permanent și tranzitoriu. T.R. Millar (Anglia) descrie un sistem de etanșare perfecționat utilizat la etanșarea arborilor mașinilor reversibile de căderi mari. M. Zajdlik (Cehoslovacia) stabilește pe cale experimentală corelația între profilul unei vane conice și caracteristicile ei energetice și cavitaționale. G. Angelo (Italia) a explorat cîmpul de viteze într-un aspirator curb al unei turbine Francis punînd în evidență efectul favorabil al reducerii extensiunii pe verticală la o valoare de aproximativ 2,6 D, ceea ce conduce la importante economii pentru blocul submersibil al UHEAP.

Grupa a V-a reunește cinci lucrări consacrate mișcării apei în organele mașinilor reversibile exclusiv rotorul. H. Kopp (R.F.G.) analizează influența energiei statice, a debitului, a poziției rotorului unei pompe centrifuge și a formei și dimensiunilor conductei de aspirație asupra regimului de funcționare în condițiile pătrunderii aerului în rotor T. Tokoyura

și colab. (Japonia) au pus în evidență experimental efectul pozitiv al unor palete așezate în zona de aspirație a rotorului unei pompe centrifuge manifestat prin îmbunătățirea caracteristicilor de cavitație. I. Vușković (Iugoslavia) a stabilit o expresie generală pentru coeficienții pierderilor de sarcină liniară și locală într-o carcasă spirală a unei mașini reversibile și corelația între dimensiunile carcasei și pierderile de sarcină. I. Vușković și colab. (Iugoslavia) au determinat pierderile de sarcină și expresiile forței și cuplului hidraulic care acționează pe paletele aparatului director considerînd mișcarea potențială printr-o rețea circulară de profile și aplicînd teoria stratului-limită. B. Rebernik (Austria) analizează corelațiile între structura cinematică a curentului de apă la ieșirea din rotor și aparatul director, punînd în evidență prin măsurători caracterul nepermanent al mișcării absolute și a determinat spectrul hidrodinamic în regimul de pompare al unei mașini reversibile.

Grupa a VI-a cuprinde patru lucrări asupra mișcării apei în rotorul turbomașinilor. H. Fachbach (Elveția) demonstrează că la proiectarea paletelor turbomașinilor reversibile un criteriu important îl reprezintă repartiția presiunii pe palete, care se calculează în funcție de ipoteza admisă asupra structurii cinematice a mișcării. I.V. Teame (U.R.S.S) a studiat analitic mișcarea potențială a apei printr-o rețea spațială de palete și a determinat punctul de desprindere al stratului-limită pentru $n_s = 250...$ 300. J. Klein (Austria) analizează comparativ distribuția pierderilor de sarcină într-o mașină reversibilă funcționînd în regim de turbinare și într-o turbină Francis obișnuită indicînd cauzele diferențelor constatate. Șt. Zarea (România) prezintă o metodă de calcul hidraulic a rotoarelor turbomașinilor radial-axiale considerînd că mișcarea neperturbată de prezența palelor este elicoidală.

Grupa a VII-a reunește patru lucrări asupra regimurilor tranzitorii ale mașinilor reversibile. S.T. Hsu și colab. (S.U.A) expune o analiză a rezultatelor calculului șocului hidraulic în sistemul conductă forțată — castel de echilibru al UHEAP Raccoon Mountain pentru diferite manevre asupra agregatelor reversibile. J. Vucetić (Iugoslavia) analizează stabilitatea hidraulică a UHEAP pentru cele mai defavorabile manevre ale agregatelor reversibile căutînd o soluție optimă în funcție de caracteristicile mașinilor, construcțiilor hidrotehnice și ale rețelei electrice. M. Fanelli (Italia) întreprinde o analiză dinamică a rețelelor hidraulice atrăgînd atenția asupra calculului impedanței hidraulice cu aplicație la mașinile reversibile. E.M. Stroganov și colab. (U.R.S.S) studiază funcționarea grupurilor reversibile în regimuri nestaționare și posibilitățile de modelare a fenomenului, ținînd seama și de conducta forțată.

Grupa a VIII-a, consacrată funcționării turbomașinilor în regim nestaționar, reunește cinci lucrări. H. Grein (Elveția) interpretează rezultatele măsurătorilor fluctuațiilor de presiune în pompele centrifuge de presiune ridicată și în mașinile reversibile radial-axiale pe baza cercetărilor pe model și pe mașini industriale în regim nestaționar. A.S. Abelev și colab. (U.R.S.S) a studiat pe modelul agregatelor de la UHE Krasnoiarsk vibrațiile care apar, stabilind că regimurile optime de funcționare corespund puterilor $P = (0{,}87...0{,}92)\ P_{max}$. G. Schlemmer și colab. (R.F.G). au prelucrat și interpretat rezultatele unui mare număr de măsurători de viteze privind funcționarea turbinelor Francis la sarcini parțiale și

la suprasarcini, inclusiv în regim nepermanent. M. Fanelli și colab. (Italia) au efectuat încercări la UHEAP Lete Sava pentru determinarea rezonanței hidraulice induse, la diferite frecvențe, în regim de turbinare, respectiv de pompare, la pornirea, respectiv oprirea bruscă a agregatelor. E. Malquori și colab. (Italia) au examinat condițiile de curgere în agregatele unor UHEAP din Italia urmărind în special oscilațiile de presiune, vibrațiile și zgomotele produse la regimuri de funcționare variabile.

Grupa a IX-a cuprinde șapte lucrări ,avînd ca subiect încercările pe modele ale mașinilor hidraulice. J. Osterwalder (R.F.G.) analizează posibilitățile de transpunere a randamentului de la model la mașina hidraulică industrială. J. Chevalier (Franța) analizează problemele specifice ale concepției, execuției și efectuării măsurătorilor pe modele ale mașinilor hidraulice. R.E. Orndt și colab. (S.U.A) au studiat condițiile de modelare a fenomenului de cavitație pe suprafețe cu rugozități de forme precizate, stabilindu-se o formulă nouă pentru coeficientul σ. J.J. Aspuru și colab. (Spania) au efectuat măsurători pe model și pe o mașină reversibilă industrială punînd în evidență că formula utilizată pentru transpunerea randamentului este bună. V. Zanetti (Italia) analizează efectul de scară la funcționarea în regim de turbinare, respectiv de pompare a unei mașini reversibile. K.K. Șalnev și colab. (U.R.S.S) stabilește o formulă pentru coeficientul de cavitație în funcție de parametrii hidraulici și geometrici ai robinetelor și vanelor fluture. I.S. Pearsall și colab. (Anglia) studiază efectul de scară asupra modelării fenomenului de cavitație la pompe.

Grupa a X-a este alcătuită din șase lucrări consacrate cavitației. F. Thuss (R.F.G.) analizează elementele necesare pentru definirea coeficientului de cavitație și condițiile de modelare a acestui fenomen la pompele centrifuge pentru presiuni mari. U. Pighini și colab. (Italia) au studiat efectul unor elemente chimice și fizice ale apei asupra condițiilor de apariție a cavitației obținută cu un vibrator. C.B. Vreugdenhil și colab. (Olanda) descriu două modele matematice și prezintă rezultatele experimentale referitoare la cavitația provocată de lovitura de berbec în conducte lungi, orizontale. Gy. Sebestyen și colab. (Ungaria) explică rezultatele obținute la încercările acustice și de eroziune prin cavitație la o pompă cu rotor semideschis. V.C. Kulandaiswamy și colab. (India) propune o metodă de determinare a începutului cavitației în turbomașini, folosind un analizor de zgomot. G. Federici și colab. (Italia) analizînd funcționarea unei pompe centrifuge ca generator de zgomot propune un indicator instrumental pentru începutul cavitației prin măsurarea debitului pe conducta de aspirație, respectiv de refulare, a pompei respective.

Prezența majorității autorilor lucrărilor, precum și a unui număr mare de specialiști a pus în evidență atenția de care s-a bucurat simpozionul și a înlesnit un util schimb de opinii atît în cadrul dezbaterilor, cît și în afara acestora.

Organizatorii au rezolvat cu succes problemele pe care le ridică o manifestare științifică internațională cu numeroși participanți.

Repartizarea pe țări a numărului de lucrări prezentate este următoarea : Italia — 12 ; S.U.A — 5 ; R.F.G, U.R.S.S cîte 4 ; Austria, Iugoslavia

— cîte 3; Anglia, Cehoslovacia, Elveția, Franța, România — cîte 2; India, Japonia, Olanda, Spania, Ungaria — cîte o lucrare.

Atît din țările din care s-au trimis lucrări, precum și din alte țări europene și din S.U.A și Canada au participat aproximativ 130 de specialiști, care nu erau înscriși cu lucrări, majoritatea aducînd contribuții în cadrul discuțiilor.

Din partea țării noastre au luat parte la Simpozion acad. D. Dumitrescu, prof. Șt. Zarea, dr. ing. C. Iancu.

Comitetul de organizare sub conducerea prof. Teo Leardini și conducerea Societății italiene pentru energie electrică, merită toată recunoștința pentru eforturile făcute de a asigura buna desfășurare a lucrărilor simpozionului, așa cum s-a subliniat de unii participanți în ședința de încheiere a lucrărilor.

Volumul cuprinzînd lucrările prezentate la Simpozion însumează 612 pag., este editat în bune condiții și reflectă preocupările actuale pe plan mondial în domeniul mașinilor hidraulice reversibile conținînd contribuții utile pentru cercetare, proiectare și exploatare, dintre care multe au calitatea de a stimula noi cercetări.

F 2557

4
TOMUL 32
1973

1973 NOV 20

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacție

Acad. E. CARAFOLI, *redactor responsabil,*
Acad. D. DUMITRESCU, *redactor responsabil adjunct,*
Prof. I. ANTON, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. CONSTANTIN AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. ȘTEFAN BĂLAN,
Prof. GH. MANEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. RADU VOINEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste, România,
Prof. RADU C. BOGDAN,
Conf. DAN PAVELESCU,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacție.*

În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Revistele se pot procura (direct sau prin poștă) și prin PUNCTUL DE DESFACERE din cadrul EDITURII ACADEMIEI. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la Întreprinderea Rompresfilatelia, căsuța poștală 2001, București, România, sau la reprezentanții săi din străinătate.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice corespondență, se trimit pe adresa Comitetului de redacție al revistei, Str. Cont. Mille nr. 15, tel. 13.83.26

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
str. Gutenberg nr. 3 bis, sectorul 6, București.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 32, nr. 4 1973

SUMAR

STUDII

Pag.

MARIA ARSENIE, D. ARSENIE, Asupra legilor de curgere staţionară a lichidelor newtoniene în regim turbulent, prin conducte rectilinii de secţiune pătrată, hidraulic netede 717

S. GĂLETUŞE, Asupra evaluării tensiunilor turbulente de frecare folosind lungimea de amestec 731

D. ARSENIE, Studiul oscilaţiilor în masă ce apar în sistemul galerie de aducţiune-castel de echilibru la schimbarea bruscă a puterii centralei hidroelectrice, avînd la bază principiul lui Hamilton 749

A. P. STOICESCU, Asupra stabilităţii mişcării nestaţionare a automobilului 761

T. PANĂ, Stabilitatea dinamică a barelor cu pereţi subţiri, avînd profilul închis, solicitate la compresiune centrică 779

G. V. VASILIEV, Studiul flutterului supersonic al învelitorilor cilindrice ortotrope şi eterogene. Influenţa parametrilor constructivi şi fizico-mecanici 813

A. PAVEL, Studii şi cercetări teoretice-experimentale privind securitatea tehnică a capacului semisferic al unui recipient cilindric de mare presiune. II 851

NOTE

G. M. BÂRSAN, Un procedeu numeric pentru calculul plăcilor ortotrope poligonale. . 877

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

R. MARINOV, Utilizarea elementului finit toroidal pentru structurile masive cu geometrie axial-simetrică şi încărcare neaxial-simetrică 889

RECENZII 899

ASUPRA LEGILOR DE CURGERE STAȚIONARĂ A LICHIDELOR NEWTONIENE ÎN REGIM TURBULENT, PRIN CONDUCTE RECTILINII DE SECȚIUNE PĂTRATĂ, HIDRAULIC NETEDE

de MARIA ARSENIE și D. ARSENIE

Institutul politehnic Timișoara

În lucrare se studiază curgerea staționară a lichidelor prin conducte de secțiune pătrată, considerînd pentru viteză mărimea medie în timp.
Se folosește un principiu variațional derivat din principiul lui Hamilton.
Se dau relații pentru lungimile de amestec după cele două direcții perpendiculare, se dă expresia legii de distribuție a vitezei pe secțiunea transversală, se dau ecuațiile curbelor izotahe și se dă o formulă de calcul a lui λ, avînd aceeași structură ca și ecuația Kármán-Prandtl de la conductele circulare netede. În lipsa unor cercetări experimentale proprii se folosesc rezultatele unor cercetări efectuate la Timișoara de către profesorul emerit ing. Victor Gheorghiu și publicate în anul 1958.

1. CONSIDERAȚII PREGĂTITOARE

În cîteva lucrări anterioare [1]—[3] s-a arătat că se pot obține legile de mișcare ale lichidelor newtoniene în regim laminar prin tuburi cilindrice de secțiuni diferite, utilizîndu-se doar principiul variațional conform căruia distribuția vitezelor în secțiunea transversală se produce astfel încît conduce la un minim al puterii disipate prin frecare vîscoasă la un debit constant, dat.

Principiul variațional de mai sus poate fi formulat și sub forma echivalentă: distribuția vitezelor în secțiunea transversală se produce astfel încît conduce la un debit maxim pentru o putere disipată prin frecare vîscoasă constantă, dată.

În fond, principiul de mai sus este o formă specifică în hidraulică a principiului general a lui Hamilton sau a principiului lui Maupertuis aplicabil sistemelor scalare, la care se cunoaște expresia pierderii de energie. Bineînțeles, pentru a ajunge de la principiul lui Hamilton la formularea dată mai sus este nevoie de considerarea unui model adecvat al mișcării.

Metoda de studiu care foloseşte principiul variaţional enunţat mai sus a condus la rezultate foarte bune în cazul mişcării laminare şi anume a permis determinarea soluţiei exacte pentru distribuţia vitezelor în cazul conductelor de secţiune circulară, iar în cazul conductelor de secţiune dreptunghiulară a permis atît determinarea soluţiei exacte sub formă de serie, cît şi determinarea unei soluţii aproximative (suficient de precisă pentru scopuri practice), formată dintr-o sumă cu un număr mic de termeni.

Avînd în vedere aceste rezultate încurajatoare obţinute în cazul regimului laminar, era firesc a se folosi aceeaşi metodică şi pentru regimul turbulent de mişcare, prin adoptarea unui model corespunzător al mişcării.

Un început în această direcţie a fost realizat prin lucrarea [4]. Acolo s-a arătat că prin aplicarea aceluiaşi principiu variaţional a rezultat că efortul tangenţial apărut între straturile izolate trebuie să aibă o variaţie liniară pe secţiune în cazul mişcării între doi pereţi plan-paraleli sau a mişcării într-o conductă circulară. Este interesant de menţionat că, folosind cu totul alte baze, la aceeaşi concluzie se ajunge şi în alte teorii, între care menţionez pe cea a lui Theodor V. Kármán, bazată pe teoria similitudinii.

Pe de altă parte, efortul tangenţial aparent se consideră dat de o expresie de tip Prandtl:

$$\overline{\tau}_{turb} = \rho f^2(y) \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}, \tag{1}$$

în care funcţia $f(y)$ avînd dimensiunea unei lungimi este denumită după Prandtl lungime de amestec, $\overline{u}$ fiind viteza medie în timp. Spre deosebire însă de teoria clasică a lui Prandtl, în lucrarea [4], ca şi în prezenta lucrare, nu se consideră expresia dată de Prandtl pentru lungimea de amestec ca fiind valabilă în cazul conductelor de secţiune circulară sau pătrată. În lucrarea [4] s-a arătat că expresia dată de Prantdl, după care lungimea de amestec este egală cu produsul constantei universale $\varkappa$ cu distanţa y de la perete, este în concordanţă cu consideraţiile teoretice şi chiar experimentale pentru mişcarea în lungul unui singur perete plan, pentru care de altfel ea a şi fost considerată de către Prandtl.

În [4] s-a arătat cum această expresie trebuie adoptată pentru cazul mai complex al mişcării între doi pereţi plani, situaţi la distanţa h, ajungîndu-se la

$$f(y) = \varkappa y \sqrt{1 - \frac{4y}{3h}}, \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{h}{2}. \tag{2}$$

Factorul care conţine radicalul reprezintă tocmai efectul celui de-al doilea perete asupra lungimii de amestec. Valorile calculate cu expresia de mai sus a lungimii de amestec sînt destul de apropiate de valorile experimentale ale lui Nikuradze şi în orice caz mult mai apropiate decît valorile calculate cu relaţia lui Prandtl.

Folosind expresia (2) a lungimii de amestec, admiţîndu-se variaţia liniară a efortului tangenţial turbulent pe secţiunea transversală şi consi-

derîndu-se valabil principiul variațional enunțat, se regăsește legea universală de distribuție a vitezei dată de Prandtl, pentru mișcarea între doi pereți plani paraleli sau în conducta circulară, lege care este verificată prin multiple cercetări experimentale.

2. DETERMINAREA EXPRESIEI LUNGIMII DE AMESTEC

Mergînd pe linia arătată mai sus, în prezenta lucrare se caută să se găsească legea de distribuție a vitezei pe secțiunea transversală a unei conducte pătrate, considerîndu-se că pentru acest tip de mișcare funcția $f(y)$ a lungimii de amestec va trebui să aibă o altă expresie, care să țină cont și de acțiunea celorlalți doi pereți.

Avînd în vedere rezultatele obținute la mișcarea dintre doi pereți plani și la mișcarea în conducta circulară cu formula de tipul (2) se va accepta o lege de o structură asemănătoare pentru lungimea de amestec. În plus se va mai introduce un factor multiplicativ care să țină cont de efectul celorlalți doi pereți, situați după direcția respectiv perpendiculară. S-a impus ca acest factor să fie proporțional cu suma distanțelor la cei doi pereți mai apropiați. După mai multe încercări care au condus la situații de incompatibilitate, s-au ales în final pentru lungimea de amestec expresiile de mai jos cu constantele a și b nedeterminate încă:

$$l(x) = \varkappa x a \sqrt{1 - b\frac{x}{l}}\ \frac{x+y}{\frac{x}{2}+y}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2},$$

$$l(y) = \varkappa y a \sqrt{1 - b\frac{y}{l}}\ \frac{x+y}{x+\frac{y}{2}}, \qquad 0 \leqslant y \leqslant \frac{l}{2}. \tag{3}$$

Evident, din cauza proprietăților de simetrie ale pătratului, constantele a și b care intervin în prima ecuație a sistemului (3) sînt aceleași cu constantele a și b care intervin în a doua ecuație a aceluiași sistem.

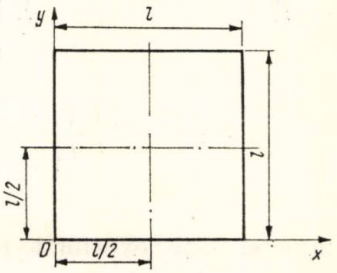


Fig. 1. — Sistem de referință.

Sistemul de coordonate utilizat este conform cu notațiile din figura 1.

Din cauza simetriei pătratului este suficient a considera mișcarea în sfertul de pătrat $\{0 \leqslant x \leqslant 1/2\,;\ 0 \leqslant y \leqslant 1/2\}$.

3. LEGEA DE DISTRIBUȚIE A VITEZEI ȘI ECUAȚIA CURBELOR IZOTAHE

Se poate trece acum la aplicarea metodicei utilizate în cazul regimului laminar pentru determinarea legii de distribuție a vitezelor medii în timp $\overline{u}$ în secțiunea transversală a conductei pătrate.

Utilizarea unei metodici comune pentru determinarea legilor de repartiție a vitezelor în cazul regimului laminar de mișcare și în cazul regimului turbulent este un avantaj de necontestat al metodei variaționale.

Tensorul tensiunilor tangențiale aparente turbulente este

$$\overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \overline{\tau}_{xz} \\ 0 & 0 & \overline{\tau}_{yz} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

cu relațiile suplimentare :

$$\overline{\tau}_{xz} = \rho l^2(x) \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} \right| \frac{\partial \overline{u}}{\partial x},$$

$$\overline{\tau}_{yz} = \rho l^2(y) \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}. \tag{5}$$

Tensorul deformațiilor are forma

$$\overline{\overline{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial x} & \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Pe unitatea de lungime a conductei, puterea disipată prin frecare turbulentă este exprimată cu ajutorul funcționalei

$$\mathscr{P}^{(1)}_{\text{turb}}(\overline{u}) = 4 \iint_s \overline{\overline{T}} : \overline{\overline{D}} \mathrm{d}s = 4\rho a^2 \varkappa^2 \iint_s \left[x^2 \left(1 - b\frac{x}{l}\right) \left(\frac{x+y}{\frac{x}{2}+y}\right)^2 \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}\right)^3 + \right.$$

$$\left. + y^2 \left(1 - b\frac{y}{l}\right) \left(\frac{x+y}{x+\frac{y}{2}}\right)^2 \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right)^3 \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7}$$

Debitul conductei este exprimat prin funcționala

$$Q(\overline{u}) = 4 \iint_s \overline{u} \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{8}$$

În funcționalele (8) și (9) S este sfertul de pătrat $\left\{\delta_0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2};\ \delta_0 \leqslant y \leqslant \frac{l}{2}\right\}$, aproximativ egal cu sfertul de pătrat $\left\{0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2};\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{l}{2}\right\}$, cu δ_0 valoare marginală a variabilelor, de ordin de mărime infinit mic în raport cu celelalte lungimi care intervin în problemă. Din punct de vedere fizic, existența acestei valori marginale δ_0 este datorată existenței filmului laminar care se formează în imediata apropiere a pereților solizi.

Se caută acea distribuție a vitezei $\overline{u}(x, y)$ care face extremă (minimă) funcționala pierderii de putere pe unitatea de lungime (7) cu condiția realizării unui debit (8) constant sau, ceea ce este echivalent, acea distribuție a vitezei care conduce la un debit extrem (maxim) cu condiția realizării unei pierderi de putere constante, date, pe unitatea de lungime a conductei.

Această problemă de extrem condiționat se rezolvă scriind ecuația lui Euler pentru funcționala $\mathscr{P}^{(1)}_{\text{turb}}\overline{u} - \mu Q(\overline{u})$:

$$\mu + 3\rho a^2 \varkappa^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^2\left(1 - b\frac{x}{l}\right)\left(\frac{x+y}{\frac{x}{2}+y}\right)^2\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}\right)^2\right] +$$

$$+ 3\rho^2 \varkappa^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[y^2\left(1 - b\frac{y}{l}\right)\left(\frac{x+y}{x+\frac{y}{2}}\right)^2\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right)^2\right] = 0. \tag{9}$$

Din cauza proprietăților de simetrie ale pătratului trebuie să avem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^2\left(1 - b\frac{x}{l}\right)\left(\frac{x+y}{x+2y}\right)^2\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[y^2\left(1 - b\frac{y}{l}\right)\left(\frac{x+y}{2x+y}\right)^2\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right)^2\right] = \text{const.} \tag{10}$$

Din relațiile (9) și (10) rezultă imediat

$$24\rho a^2 \varkappa^2 x^2\left(1 - b\frac{x}{l}\right)\left(\frac{x+y}{x+2y}\right)^2\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}\right)^2 = -\mu x + C_1,$$

$$24\rho a^2 \varkappa^2 y^2\left(1 - b\frac{y}{l}\right)\left(\frac{x+y}{2x+y}\right)^2\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right)^2 = -\mu y + C_2. \tag{11}$$

Deoarece membrul drept al ambelor ecuații din (11) se anulează pentru $x = \frac{1}{b}$, respectiv $y = \frac{1}{b}$, rezultă că și membrul stîng al lor va trebui să se anuleze, astfel că rezultă

$$C_1 = C_2 = \mu \frac{l}{b}. \tag{12}$$

Cu aceasta, după cîteva calcule algebrice sistemul (11) se poate pune sub forma normală (13):

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \sqrt{\frac{l}{6\mu b \rho}} \frac{1}{a\varkappa} \frac{x+2y}{2x(x+y)},$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \sqrt{\frac{l}{6\mu b \rho}} \frac{1}{a\varkappa} \frac{2x+y}{2y(x+y)}. \tag{13}$$

Se observă că este îndeplinită condiția de compatibilitate:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y \partial x} = \sqrt{\frac{l}{6\mu b \rho}} \frac{1}{a\varkappa} \frac{1}{2(x+y)^2}. \tag{14}$$

Sistemul (13) se mai poate scrie:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \sqrt{\frac{l}{6\mu b \rho}} \frac{1}{a\varkappa} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2(x+y)}\right],$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \sqrt{\frac{l}{6\mu b \rho}} \frac{1}{a\varkappa} \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{2(x+y)}\right]. \tag{15}$$

Formăm diferențiala totală:

$$\mathrm{d}\bar{u} = \sqrt{\frac{l}{6\mu b \rho}} \frac{1}{a\varkappa} \left[\frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{\mathrm{d}x}{2(x+y)} + \frac{\mathrm{d}y}{y} - \frac{\mathrm{d}y}{2(x+y)}\right]. \tag{16}$$

Prin integrare se obține:

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{l}{6\mu b \rho}} \frac{1}{a\varkappa} \left[\ln x + \ln y - \ln(x+y)\right] + K. \tag{17}$$

Constanta K se determină din condiția ca pentru punctul $\left\{x=\frac{l}{2};\ y=\frac{l}{2}\right\}$ să avem $\overline{u}=\overline{u}_{max}$:

$$\overline{u}_{max}=\sqrt{\frac{l}{6\mu b\rho}}\frac{1}{a\varkappa}\left[\ln\frac{l}{2}+\ln\frac{l}{2}-\ln l\right]+K. \tag{18}$$

Din (17) și (18) prin scădere:

$$\overline{u}_{max}-\overline{u}=\sqrt{\frac{l}{6\mu b\rho}}\frac{1}{a\varkappa}\left[\ln\frac{l}{2x}+\ln\frac{l}{2y}-\ln\frac{l}{x+y}\right]. \tag{19}$$

Pentru valorile marginale $x=\delta_0$ sau $y=\delta_0$ trebuie să avem $\overline{u}\cong 0$. Același lucru trebuie să se întîmple și în punctul unde avem simultan $x=\delta_0$ și $y=\delta_0$. Deoarece δ_0 poate fi considerat infinit mic în raport cu celelalte mărimi se va completa relația (19) cu termeni nesemnificativi care să permită realizarea acestor condiții de margine. În acest fel, pentru legea de distribuție vom considera relația:

$$\overline{u}_{max}-\overline{u}\cong\sqrt{\frac{l}{6\mu b\rho}}\frac{1}{a\varkappa}\left[\ln\frac{l}{2x}+\ln\frac{l}{2y}-\ln\frac{l}{x+y}+\right.$$
$$\left.+\delta_0\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2\delta_0}{xy}\right)\ln 2\right]. \tag{20}$$

Se observă că pentru:

$x=\delta_0$, y arbitrar,
$y=\delta_0$, x arbitrar,
$x=\delta_0$, $y=\delta_0$,

adică pe laturile și în colțurile pătratului viteza $\overline{u}$ este zero; astfel că pentru $\overline{u}_{max}$ se obține valoarea

$$\overline{u}_{max}=\sqrt{\frac{l}{6\mu b\rho}}\frac{1}{a\varkappa}\ln\frac{l}{2\delta_0}. \tag{21}$$

Prin eliminarea din relația (20) a tuturor termenilor care conțin una dintre cele două necunoscute și prin păstrarea termenilor care conțin cealaltă necunoscută, de fapt se trece de la mișcarea studiată la mișcarea între două plane paralele pentru care este valabilă legea universală de distribuție a lui Prandtl. Pentru a se putea face această trecere este necesar ca

$$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{l}{6\mu b\rho}}=u_*. \tag{22}$$

Mărimea u_* este denumită viteză a tensiunii de frecare și ea se calculează cu relația

$$u_* = \sqrt{gRJ} = \frac{\sqrt{glJ}}{2}, \tag{23}$$

în care $R = \frac{1}{4}$ este raza hidraulică a secțiunii,

$J = \frac{h_L}{L}$ este pierderea de energie de unitate de greutate și pe unitatea de lungime a curentului.

Cu aceste considerente, relația de distribuție a vitezei se poate scrie

$$\frac{\overline{u}_{max} - \overline{u}}{u_*} = \frac{1}{\varkappa}\left(\ln\frac{l}{2x} + \ln\frac{l}{2y} - \ln\frac{l}{x+y}\right) = \frac{1}{\varkappa}\ln\frac{l(x+y)}{4xy}. \tag{24}$$

Dacă în expresia de mai sus considerăm $\overline{u} = \text{const.}$, ea reprezintă tocmai ecuația curbelor izolate. Sub altă formă:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{l}\, e^{\varkappa \frac{\overline{u}_{max} - \overline{u}}{u_*}}. \tag{25}$$

Pe parcursul lucrării s-au mai utilizat constantele a, b și μ care nu au fost determinate, dar între care există relația de legătură (22). Pentru a găsi o altă legătură ne vom folosi de faptul că prin intermediul mărimilor introduse se poate scrie în două feluri pierderea de putere pe unitate de lungime a curentului:

$$\mathscr{P}^{(1)}_{turb}(\overline{u}) \equiv \gamma J Q(\overline{u}). \tag{26}$$

Folosind expresia (24) a vitezei $\overline{u}$ se pot calcula direct $P^{(1)}_{turb}(\overline{u})$ și $Q(\overline{u})$ din relațiile (7), respectiv (8). Neglijînd termenii care conțin pe δ_0 ca factor multiplicativ se obține, respectiv,

$$\mathscr{P}^{(1)}_{turb}(\overline{u}) = 8\frac{\rho a^2 u_*^3 l}{\varkappa}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{l}{2\delta_0} - \frac{3b}{16} - \frac{1}{2}\ln 2\right], \tag{27}$$

$$Q(\overline{u}) = l^2\left[\overline{u}_{max} - \frac{u_*}{\varkappa}\left(\frac{1}{2} + \ln 2\right)\right] \cong l^2(\overline{u}_{max} - 3u_*). \tag{28}$$

Reținem de asemenea că din realția (28) rezultă pentru viteza medie v:

$$v = \overline{u}_{max} - \left(\frac{1}{2} + \ln 2\right)\frac{u_*}{\varkappa}. \tag{29}$$

Considerînd acum relațiile (23), (26), (27), (28), se obține

$$\frac{u_* \rho g a^2 l^2 J}{\varkappa}\left[\ln\frac{l}{2\delta_0} - \frac{3b}{8} - \ln 2\right] \equiv l^2\left[\overline{u}_{max} - \left(\frac{1}{2} + \ln 2\right)\frac{u_*}{\varkappa}\right]\rho g J. \tag{30}$$

Simplificînd şi înlocuind şi pe $\overline{u}_{max}$ rezultă

$$a = 1,$$
$$b = \frac{4}{3}. \tag{31}$$

Recapitulînd, atunci relaţiile obţinute sînt

$$l(x) = \varkappa x \sqrt{1 - \frac{4x}{3l}} \frac{x + y}{\frac{x}{2} + y},$$

$$l(y) = \varkappa y \sqrt{1 - \frac{4y}{3l}} \frac{x + y}{x + \frac{y}{2}},$$

$$\frac{\overline{u}_{max} - \overline{u}}{u_*} = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{l(x + y)}{4xy}, \tag{32}$$

$$\overline{u}_{max} = \frac{u_*}{\varkappa} \ln \frac{l}{2\delta_0}; v = \overline{u}_{max} - \frac{u_*}{\varkappa}\left(\frac{1}{2} + \ln 2\right).$$

4. VERIFICĂRI EXPERIMENTALE PRIVIND DISTRIBUŢIA VITEZEI

O verificare cantitativă privind distribuţia vitezei se va face folosind rezultatele experimentale publicate în lucrarea [5].

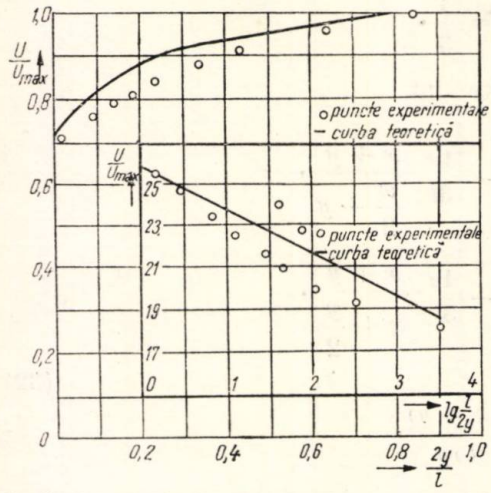
În tabela 1 sînt date [5] vitezele măsurate în axa de simetrie $\left(x = \frac{1}{2}\right)$ pentru o conductă de secţiune pătrată cu laturile de 10 cm pentru un regim de mişcare caracterizat prin $\mathcal{R}_g = 237\,500$ şi prin $u_* = 0{,}105$ m/s.

Tabela 1

$\frac{2y}{1}$	$\overline{u}$ <m/s> măsurat	$\frac{\overline{u}}{\overline{u}_{max}}$ experimental	$\frac{\overline{u}}{\overline{u}_{max}}$ teoretic
0,03	1,90	0,704	0,724
0,081	2,04	0,754	0,815
0,131	2,14	0,792	0,857
0,182	2,21	0,819	0,883
0,232	2,26	0,838	0,903
0,333	2,37	0,878	0,932
0,434	2,48	0,918	0,951
0,637	2,60	0,962	0,975
0,839	2,69	0,996	0,991
1,0	2,70	1,000	1,000

În aceeași tabelă au fost trecute și vitezele calculate cu formula stabilită în prezenta lucrare. O reprezentare grafică comparativă se găsește în figură.

Diferențele maxime relative fiind în jur de 7,5 % se consideră că există o concordanță acceptabilă a rezultatelor teoretice cu cele experimentale, dacă se are în vedere și faptul că rezultatele experimentale sînt afectate de o serie de erori (viteza măsurîndu-se cu un tub sondă cu diametrul de 3 mm), iar calculele au fost efectuate cu ajutorul riglei de calcul.



Graficul 2. — Distribuția vitezelor în axa de simetrie.

O verificare cu aspect calitativ se va face în figura 3, în care s-au reprezentat patru curbe izotahe pentru regimul studiat ($\bar{u}_1 = 2{,}252$ m/s; $\bar{u}_2 = 2{,}357$ m/s; $\bar{u}_3 = 2{,}469$ m/s; $\bar{u}_4 = 2{,}630$), calculate pe baza relației date în lucrare (25). Se observă că forma curbelor este calitativ foarte apropiată de forma cunoscutelor curbe experimentale ale lui Nikuradze [7] și ale altor cercetători [6].

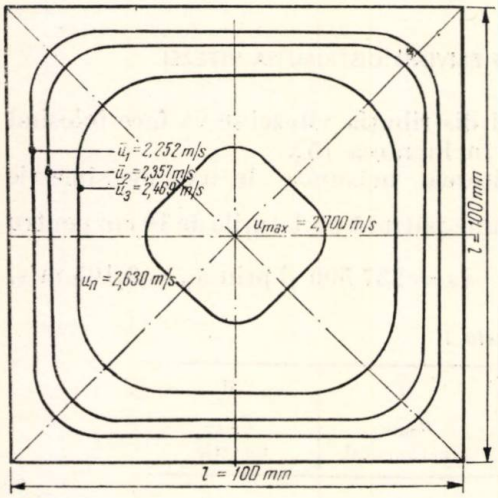


Fig. 3. — Curbe izotahe.

5. DETERMINAREA COEFICIENTULUI DE REZISTENȚĂ DARCY

În calculul practic al conductelor este importantă și determinarea coeficientului de rezistență Darcy, care se notează de obicei cu λ și care intervine în formula pierderilor de energie liniare:

$$h_L = \lambda \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g} \quad (d \to l). \tag{33}$$

Folosind și relația (23) putem explicita pe λ sub forma

$$\lambda = \frac{2gJl}{v^2} = 8\frac{u_*^2}{v^2}. \tag{34}$$

Pe de altă parte, din combinarea ultimelor două relații din (32):

$$\frac{v}{u_*} = \frac{1}{\varkappa}\left[\ln \frac{l}{2\delta_0} - \frac{1}{2} - \ln 2\right]. \tag{35}$$

Din relaţiile (34) şi (35) :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{2\varkappa\sqrt{2}}\left[\ln\frac{vl}{\nu}\sqrt{\lambda} - \ln 8\,\frac{u_*\delta_0}{\nu}\sqrt{2e}\right]. \tag{36}$$

Introducînd numărul lui Reynolds $\mathcal{R}e = \frac{vl}{\nu}$ şi postulînd că în cazul conductelor pătrate numărul $\mathcal{R}'_e = \frac{u_*\delta_0}{\nu}$ este o constantă (lucru confirmat experimetal al corductele circulare) se obţine relaţia

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\log \mathcal{R}e\sqrt{\lambda} - A. \tag{37}$$

A este o constantă ce trebuie determinată experimental. Să comparăm relaţia (37) cu relaţia lui Kármán-Prandtl pentru conductele circulare netede :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\log \mathcal{R}e\sqrt{\lambda} - 0{,}8. \tag{38}$$

Rezultă că şi în cazul conductelor pătrate netede este justificată folosirea unei formule de tip Kármán-Prandtl.

Deoarece această formulă la conductele circulare se poate obţine ca un caz particular al formulei lui Colebrook, se sugerează faptul că şi în cazul conductelor pătrate ar fi justificată considerarea unei formule generale de tip Colebrook pentru calculul lui λ.

6. VERIFICAREA EXPERIMENTALĂ A COEFICIENTULUI DARCY

Pentru verificarea experimentală vom face apel din nou la lucrarea [5] în care sînt date valorile măsurate a lui λ pentru un număr de unsprezece regimuri de curgere situate între numerele Reynolds 40 000 şi 240 000. Să vedem, folosind relaţia (37), la ce valoare pentru constanta A ar putea conduce aceste rezultate experimentale. Calculele sînt conţinute în tabela 2.

Deşi împrăştierea rezultatelor obţinute pentru constanta A este relativ mare $\left(A = 2(\log \mathcal{R}e + \log\sqrt{\lambda}) - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$ influenţa ei asupra determinării lui λ este de ordin mult mai mic. În orice caz, avînd în vedere rezultatele experimentale se observă existenţa unui efect de formă în trecere la secţiunea circulară la secţiunea pătrată, deoarece în orice caz constanta A are o valoare superioară celei de la conductele circulare. Deoarece pentru criteriul $\mathcal{R}e\,k\sqrt{\lambda}$ s-au obţinut valori sub 14 putem afirma

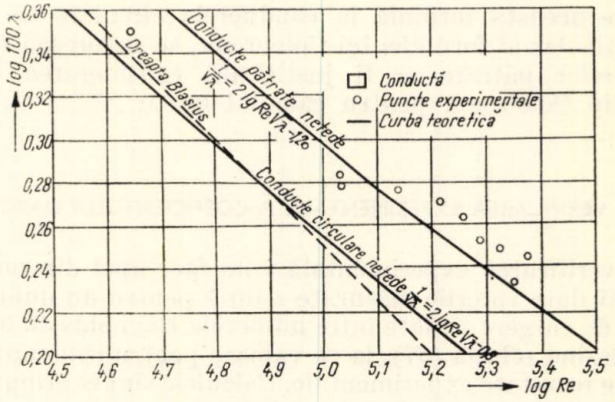
Tabela 2

K = rugozitatea relativă, exprimată la scara rugozității echivalente a nisipului.

Regim	Valori măsurate		10^4K	$\mathcal{R}e\ K\sqrt{\lambda}$	$\sqrt{\lambda}$	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$	$\log\sqrt{\lambda}$	$\log \mathcal{R}e$	A_i
	λ	$10^4 \cdot \mathcal{R}e$							
1	0,0224	4,44	2,81	1,86	0,1495	6,70	1,175	4,647	0,94
2	0,0198	9,16	3,21	4,02	0,1405	7,12	1,149	4,962	1,10
3	0,0192	10,65	2,89	4,26	0,1385	7,22	1,142	5,028	1,12
4	0,0190	10,70	2,48	3,67	0,138	7,25	1,140	5,029	1,08
5	0,0189	13,90	3,71	7,08	0,1375	7,27	1,138	5,143	1,29
6	0,0186	16,30	3,85	8,56	0,1365	7,33	1,135	5,213	1,36
7	0,0183	18,15	3,72	9,12	0,135	7,40	1,132	5,259	1,38
8	0,0179	19,65	3,23	8,50	0,134	7,47	1,127	5,293	1,37
9	0,0177	21,00	3,77	10,52	0,133	7,52	1,124	5,322	1,37
10	0,0171	22,60	2,45	7,25	0,131	7,64	1,117	5,354	1,30
11	0,0176	23,75	3,44	10,80	1,1325	7,55	1,123	5,376	1,45
								$\sum A_i =$	13,76

că avem de-a face cu conducte hidraulice netede. Din aceste încercări rezultă o valoare medie pentru $A \cong 1{,}2$ și formula de tip Karman-Prandtl de calcul a lui λ, (37), devine

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \mathcal{R}e \sqrt{\lambda} - 1{,}2. \tag{39}$$



Graficul 4. — Diagrama logaritmică $\lambda = \lambda\ (\mathcal{R}e)$

În figura 4 sînt redate rezultatele experimentale și curba teoretică (39) observîndu-se o bună concordanță, ceea ce justifică afirmația anterioară privind influența relativ mică pe care o au asupra lui λ abaterile constantei A de la valoarea considerată $A = 1{,}2$.

Primită la redacție la 24 aprilie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. M. Arsenie, D. Arsenie, *Considerații variaționale asupra pierderilor de energie în curgerea laminară a lichidelor newtoniene în conducte rectilinii de secțiune circulară*, St. cerc. mec. apl., *4* (1968).
2. — *O teoremă de minim privind pierderile de energie de natura viscoasă în curgerea laminară a lichidelor Newtoniene în canale*, Buletin st. și tehn. IPT, *1* (1969).
3. — *O fundamentare variațională a legilor frecării în cazul mișcării permanente a lichidelor între doi pereți plan-paraleli*, Buletin șt. și tehn. IPT, *2* (1970).
4. — *O propunere privind lungimea de amestec din teoria lui L. Prandtl, pentru cazul curgerii turbulente în canale și conducte, avînd la bază un principiu variațional*, St. cerc. mec. apl., *3* (1969).
5. V. Gheorghiu V. Anton, *Cercetări asupra rezistenței hidraulice la o conductă de secțiune patrată*, Bulet. șt. și tehn. al Inst. Politehn. Timișoara, *3(17)*, Ianuarie-Decembrie 1958.
6. V. Gheorghiu *Problèmes concernant l'hydraulique des conduites noncirculaires*. IX Convego di idraulica construzioni idrauliche. Trieste—Magio 1965.
7. Herman Schlichting, Grenzschicht Theorie, *Dritte Auflage*, Verlag G. Braun, Karlsruhe 1958.

ASUPRA EVALUĂRII TENSIUNILOR TURBULENTE DE FRECARE FOLOSIND LUNGIMEA DE AMESTEC

de S. GĂLETUȘE

Institutul politehnic București

Pornind de la rezultatele experimentale privind profilele de viteze pentru curgeri de tip Hagen-Poiseuille și Couette, s-a dedus variația lungimii de amestec cu distanța de la perete. Legea generală obținută, în acest fel, evaluează tensiunile turbulente mai corect pentru substratul de tranziție între cel laminar și cel turbulent. În continuare s-a integrat numeric ecuația de mișcare pentru diferite tipuri de curgeri, obținîndu-se profilele de viteze, frecarea la perete, variația tensiunilor turbulente cu distanța de la perete etc.

NOTAȚII

x, y — coordonate; x — în direcția mișcării,
u, v — componentele vitezei locale.
u', v' — fluctuații turbulente,
$\widetilde{u'\,v'}$ — valoarea medie în timp a produsului $u'v'$,
V — viteza suprafeței mobile (curgere Couette),
u_m — viteza medie,
u_M — viteza maximă,

$$\left.\begin{aligned}\overline{u} &= \frac{u}{u_M}\\ \overline{\overline{u}} &= \frac{u}{u_m}\end{aligned}\right\}$$ — viteze adimensionale,

$u_\tau = \sqrt{\frac{|\tau_0|}{\rho}}$ — viteză de referință,

$u^+ = \frac{u}{u_\tau}$ — viteză adimensională,

$y^+ = \frac{y}{\nu}\,u_\tau$ — distanța de la perete, adimensională,

d — diametrul conductei,
h — grosimea filmului de fluid,

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 32, NR. 4, 1973, P. 731–748

ρ — densitatea,
μ — viscozitatea,
p — presiunea,
τ_0 — tensiunea de frecare la perete,
$\bar{\tau}_0 = \left(\frac{d\bar{u}}{d\bar{y}}\right)_0$ — tensiunea de frecare la perete, adimensională,
$\lambda = \frac{2d}{\rho u_m^2}\left(-\frac{dp}{dx}\right)$ — căderea de presiune, adimensională,
$\mathscr{B}_x = -\frac{h^2}{\mu u_m}\left(\frac{dp}{dx}\right)$ — parametru adimensional al gradientului de presiune,
$C_f = \frac{2\tau_0}{\rho V^2}$ — coeficient de frecare (curgere Couette),
$\mathscr{R}e_M$ — numărul Reynolds definit cu u_M,
$\mathscr{R}e_m$ — numărul Reynolds definit cu u_m.

1. INTRODUCERE

Rezolvarea problemelor privind mișcările în regim turbulent este posibilă în momentul în care se exprimă corelațiile de viteze, de ordinul doi, $\overline{u'v'}$, $\overline{w'v'}$ etc., în funcție de mișcarea medie. Corelația $\overline{u'v'}$ pentru mișcări bidimensionale plane sau axial simetrice, poate fi exprimată în funcție de mărimile medii în timp, utilizînd lungimea de amestec l a lui Prandtl,

$$-\overline{u'v'} = l^2 \left|\frac{du}{dy}\right| \frac{du}{dy} \tag{1}$$

sau viscozitatea de vîrtej ε a lui Boussinesq [1]—[4],

$$-\overline{u'v'} = \varepsilon \frac{du}{dy}. \tag{2}$$

Dacă pentru deducerea expresiei (1), Prandtl a imaginat un model al fenomenului, expresia (2) este o lege empirică, de fapt extinderea legii pentru tensiunea de frecare laminară la domeniul turbulent înlocuind viscozitatea cinematică ν cu viscozitatea de vîrtej ε. Deci formula (1) este mai susceptibilă de a fi utilizată în calcule deoarece lungimea de amestec apare ca o funcție pur locală asupra căreia pot fi făcute ipoteze mai plauzibile decît ar putea fi făcute în legătură cu viscozitatea de vîrtej ε a lui Boussinesq.

Pornind de la rezultatele experimentale privind profilele de viteze, pentru curgeri în conducte, curgeri între plăci paralele, strat-limită etc., în variabilele u^+, ln y^+ [1], [2], [4], s-a arătat că pentru a se obține legea universală de viteze, viscozitatea de vîrtej ε trebuie să varieze liniar cu y,

$$\varepsilon = k^* u_\tau y \tag{3}$$

sau lungimea de amestec să aibă legea de variație,

$$l = k^* y. \tag{4}$$

Constanta k^* este unanim acceptată cu valoarea 0,4.

Trebuie precizat că se obține legea universală de viteză,

$$u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5,$$

cu expresiile (3), (4) numai dacă se neglijează tensiunea laminară de frecare, iar tensiunea turbulentă de frecare ($-\rho \overline{u'v'}$) este considerată constantă și egală cu tensiunea de frecare la perete τ_0.

Nikuradse a dedus variația lungimii de amestec, utilizînd rezultatele experimentale privind profilele de viteze pentru curgeri în conducte și considerînd, pentru tensiunea turbulentă de frecare, expresia

$$\tau_t = -\rho \overline{u'v'} = \rho l^2 \left|\frac{du}{dy}\right| \frac{du}{dy}, \tag{5}$$

neglijînd în același timp tensiunea laminară față de cea turbulentă.

Deoarece tensiunea totală de frecare variază liniar cu y pentru curgeri în conducte, rezultă pentru lungimea de amestec,

$$l = \frac{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \sqrt{1 - \frac{2y}{d}}}{\left|\frac{du}{dy}\right|}, \tag{6}$$

în ipoteza că tensiunea laminară este neglijabilă peste tot.

În acest mod, Nikuradse a obținut pentru lungimea de amestec legea,

$$l = \left[0{,}07 - 0{,}04\left(1 - \frac{2y}{d}\right)^2 - 0{,}03\left(1 - \frac{2y}{d}\right)^4\right] d. \tag{7}$$

Se poate observa că și această lege de variație (7) tinde către $l = 0{,}4y$ pentru y mic, deci foarte aproape de perete, sau mai corect spus $(dl/dy)_0 = 0{,}4$.

Dacă pentru zonă ceva mai departe de perete legea (4) sau (7) este corectă, în imediata apropiere a peretelui este eronată, deoarece aici există un substrat laminar, care dealtfel a fost pus în evidență de foarte multe rezultate experimentale (Nikuradse [5], Laufer [6], Reichardt [7], Robertson [8]). Existența acestui substrat laminar implică pentru această zonă $l = 0$ sau cel puțin $l \to 0$ cu derivata $(dl/dy)_0 = 0$. Expresia (7) dedusă de Nikuradse nu poate fi corectă în imediata apropiere a peretelui, deoarece pentru relația (6) s-a considerat că tensiunea laminară de frecare

$\mu(du/dy)$ este neglijabilă în comparație cu cea turbulentă $\rho l^2(du/dy)^2$, ori în apropierea peretelui cele două tensiuni sînt de același ordin de mărime, iar spre substratul laminar $\mu(du/dy) \gg \rho l^2(du/dy)^2$.

2. LUNGIMEA DE AMESTEC LÎNGĂ PERETE

Dacă nu se neglijează nici unul din termenii care intră în componența tensiunii totale de frecare, se obține pentru curgeri turbulente în conducte circulare, relația

$$\tau_0 \left(1 - \frac{2y}{d}\right) = \mu \frac{du}{dy} + \rho l^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2. \tag{8}$$

Utilizînd notațiile adimensionale,

$$\bar{u} = \frac{u}{u_M}, \quad \bar{y} = \frac{y}{d}, \quad \bar{u}_m = \frac{u_m}{u_M}, \quad \bar{l} = \frac{l}{d},$$

$$\lambda = \frac{8\tau_0}{\rho u_m^2}, \quad \mathcal{R}e_M = \frac{\rho u_M d}{\mu}, \tag{9}$$

rezultă din (8), pentru lungimea de amestec $\bar{l}$, expresia,

$$\bar{l} = \frac{\sqrt{\frac{\lambda}{8}\bar{u}_m^2(1 - 2\bar{y}) - \frac{1}{\mathcal{R}e_M}\frac{d\bar{u}}{d\bar{y}}}}{\left|\frac{d\bar{u}}{d\bar{y}}\right|}. \tag{10}$$

Deoarece pentru zona foarte apropiată de perete a fost mai ușor de obținut derivata vitezei din diagrama în variabilele $u^+(y^+)$, [1], expresia (10) a lungimii de amestec, pentru aceleași variabile, devine

$$\bar{l} = \frac{\sqrt{\left(1 - 2\frac{y^+}{\mathcal{R}e_m\sqrt{\frac{\lambda}{8}}}\right) - \frac{du^+}{dy^+}}}{\mathcal{R}e_m\sqrt{\frac{\lambda}{8}}\frac{du^+}{dy^+}},$$

$$\bar{y} = \frac{y^+}{\mathcal{R}e_m\sqrt{\frac{\lambda}{8}}}. \tag{11}$$

Pentru mişcarea de tip Couette, tensiunea totală de frecare nu variază cu distanţa de la perete şi este egală cu τ_0. În acest caz variaţia lungimii de amestec se obţine din

$$\tau_0 = \mu \frac{du}{dy} + \rho l^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \tag{12}$$

sau, utilizînd notaţiile adimensionale

$$\bar{u} = \frac{u}{\frac{V}{2}}, \quad \bar{y} = \frac{y}{h}, \quad \bar{l} = \frac{l}{h},$$

$$C_f = \frac{2\tau_0}{\rho V^2}, \quad \mathcal{R}e_m = \frac{\rho \frac{V}{2} h}{\mu}, \tag{13}$$

relaţia (12) duce la

$$\bar{l} = \frac{\sqrt{2C_f - \frac{1}{\mathcal{R}e_m}\frac{d\bar{u}}{d\bar{y}}}}{\frac{d\bar{u}}{d\bar{y}}}. \tag{14}$$

Cu ajutorul relaţiilor (10), (11) şi (14) şi obţinînd derivatele $d\bar{u}/d\bar{y}$, du^+/dy^+ din rezultatele experimentale [1], [4] pentru curgeri Hagen-Poiseuille şi [8], [9] pentru curgeri Couette, s-a obţinut variaţia lungimii de amestec lîngă perete, cu precizia ce o poate asigura deducerea grafică a unei derivate. Rezultatele astfel obţinute sînt prezentate în figura 1 şi arată cel puţin calitativ un fapt deosebit de important, anume acela că

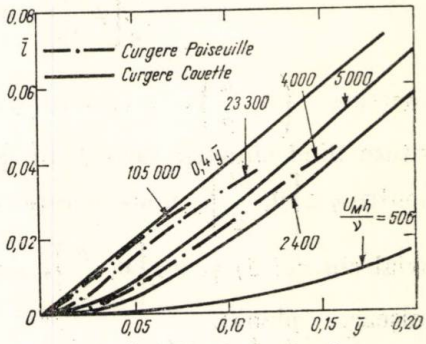


Fig. 1. — Variaţia lungimii de amestec lîngă perete.

în imediata apropiere a peretelui lungimea de amestec tinde către zero cu $(dl/dy)_0 = 0$ şi că în restul scurgerii mărimea lungimii de amestec depinde de numărul Reynolds al scurgerii.

Dealtfel de aceste fapte s-a ținut seama, într-un mod sau altul și pînă în prezent, însă sub o formă indirectă. Astfel, în lucrările [3], [10]—[12] s-a lucrat cu lungime de amestec liniară sau parabolică în zona turbulentă și $l = 0$ în substratul laminar, existînd un salt de la $l = 0$ la $l \neq 0$ în zona de tranziție. Mai mult decît atît, pentru ca rezultatele globale să fie în concordanță cu experiența a fost nevoie ca constanta k^* să se pună în funcție de numărul Reynolds [11], [13].

Analizînd rezultatele obținute în această lucrare și prezentate în figura 1, se propune pentru lungimea de amestec o lege de forma

$$\bar{l} = k^* \left(\bar{y} - C_1 \tanh \frac{\bar{y}}{C_1} \right), \tag{15}$$

în care $k^* = 0{,}4$, iar constanta C_1 să depindă de numărul Reynolds definit cu viteza medie,

$$C_1 = \frac{50}{\mathscr{R}e_m^{0{,}875}}, \tag{16}$$

astfel încît derivata la $y=0$ să fie zero, adică $(\mathrm{d}\bar{l}/\mathrm{d}\bar{y})_0 = 0$ și totodată pentru $\bar{y} > 500/\mathscr{R}e_m^{0{,}875}$, deci pentru zona turbulentă, derivata $(\mathrm{d}\bar{l}/\mathrm{d}\bar{y})$ să tindă către 0,4. Constanta C_1 a fost determinată astfel ca legea (15) să dea rezultate cît mai apropiate de datele prezentate în figura 1.

3. CURGERE DE TIP HAGEN-POISEUILLE

În continuare se studiază curgerea turbulentă de tip Hagen-Poiseuille, ca mișcare axial simetrică (conducte circulare) și ca mișcare plană (între suprafețe plane paralele), utilizînd expresia (15) a lungimii de amestec pentru evaluarea tensiunilor turbulente. Ecuația de mișcare este

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} + \rho l^2 \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \right)^2 \right] - \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{17}$$

pentru $y \in \left(0, \frac{d}{2}\right)$, în care $\mathrm{d}u/\mathrm{d}y > 0$. În zona $y \in \left[\frac{d}{2}, d\right]$ profilul de viteze fiind simetric cu cel din prima zonă, s-a studiat mișcarea numai pentru $y \in \left[0, \frac{d}{2}\right]$, unde d este diametrul conductei (pentru mișcarea axial simetrică) și $y \in \left[0, \frac{h}{2}\right]$, unde h este distanța dintre pereți (pentru mișcarea plană).

Utilizînd notațiile adimensionale,

$$\bar{y} = \frac{y}{d} \text{ sau } \bar{y} = \frac{y}{h}; \quad \bar{u} = \frac{u}{u_m}, \tag{18}$$

ecuaţia (17) se scrie :

$$\frac{d}{d\bar{y}}\left[\frac{d\bar{\bar{u}}}{d\bar{y}} + 0{,}16\,\mathcal{R}e_m\left(\bar{y} - \frac{50}{\mathcal{R}e_m^{0,875}}\tanh\frac{\mathcal{R}e_m^{0,875}}{50} - \bar{y}\right)^2\left(\frac{d\bar{\bar{u}}}{d\bar{y}}\right)^2\right] + \mathcal{B}_x = 0, \quad (19)$$

unde

$$\mathcal{R}e_m = \frac{u_m d}{\nu} \text{ sau } \frac{u_m h}{\nu},$$

$$\mathcal{B}_x = -\frac{d^2}{\mu u_m}\frac{dp}{dx} \text{ sau } -\frac{h^2}{\mu u_m}\frac{dp}{dx}.$$

Ecuaţia (19) a fost integrată numeric după cum se arată în Anexă, pe un calculator electronic IBM 1130, obţinînduse profilele de viteze, frecarea la perete, viteza medie, variaţia cu $\bar{y}$ a tensiunilor de frecare „aparente" datorită turbulenţei. Condiţiile la limită pentru integrarea ecuaţiei (19) sînt,

$$\begin{aligned} &\bar{y} = 0, \quad \bar{\bar{u}} = 0, \\ &\bar{y} = 0{,}5 \quad d\bar{\bar{u}}/d\bar{y} = 0, \\ &8\int_0^{1/2}\bar{\bar{u}}\left(\frac{1}{2} - \bar{y}\right)d\bar{y} = 1 \text{ pentru axial simetric}, \\ &2\int_0^{1/2}\bar{\bar{u}}\,d\bar{y} = 1 \text{ pentru plan}. \end{aligned} \quad (20)$$

Tabela 1

Frecare la perete şi viteza medie pentru curgere de tip Hagen-Poiseuille

$\mathcal{R}e_m$	$\tau_0 = (d_{\bar{\bar{u}}}/d_{\bar{y}})_0$	u_m/u_M
Axial simetric		
2 000	14,826	0,736
4 000	21,813	0,784
5 000	24,977	0,800
10 000	39,346	0,830
23 300	72,198	0,850
50 000	128,101	0,865
100 000	219,301	0,871
Plan		
4 000	19,196	0,865
9 200	33,577	0,892
23 300	66,027	0,907
50 000	118,101	0,914
100 000	202,738	0,919
114 000	224,303	0,920

Rezultatele obţinute pentru frecarea la perete $\bar{\tau}_0$ şi viteza medie u_m/u_M sînt prezentate în tabela 1, şi în figurile 2 şi 3. Figura 2 prezintă căderea de presiune λ definită de

$$\lambda = \frac{d\left(-\frac{dp}{dx}\right)}{\rho\frac{u_m^2}{2}} \text{ axial simetric},$$

$$\lambda = \frac{h\left(-\frac{dp}{dx}\right)}{\rho\frac{u_m^2}{2}} \text{ plan}, \quad (21)$$

în comparaţie cu rezultatele experimentale [5], [14] şi se poate remarca o

bună concordanță atît pentru curgerea axial simetrică, cît și pentru scurgerea plană.

Variația vitezei medii adimensionale $\overline{u}_m$ în funcție de numărul Reynolds se poate vedea în figura 3.

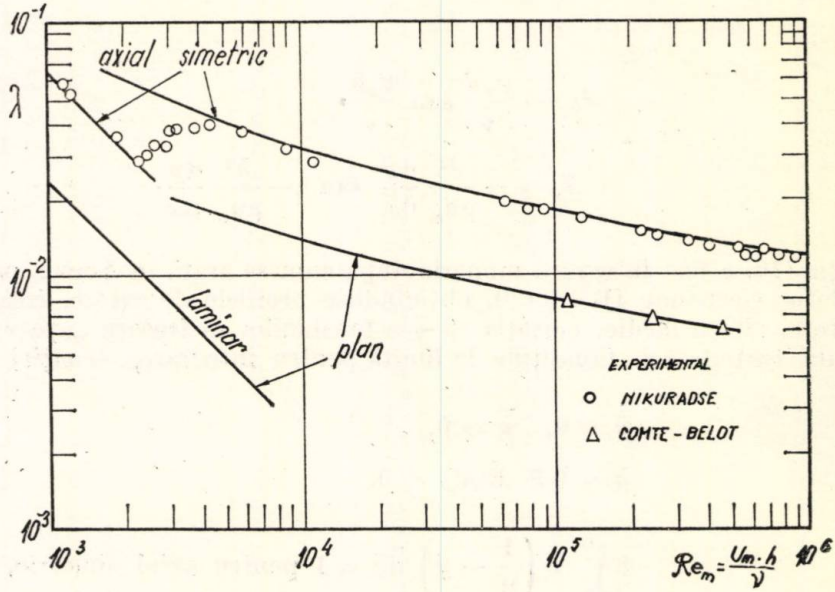


Fig. 2. — Căderea de presiune pentru curgeri Hagen-Poiseuille.

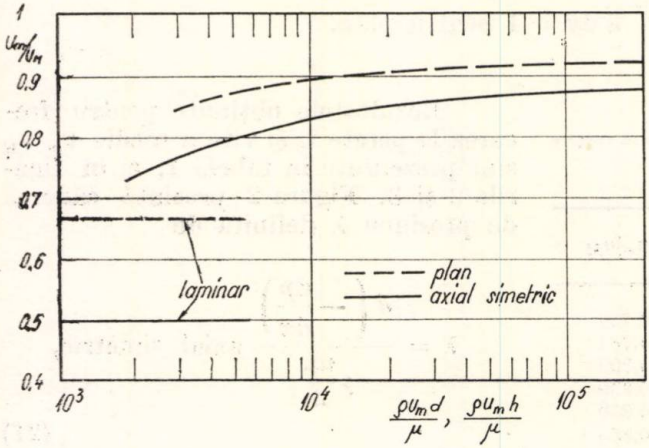


Fig. 3. — Viteza medie pentru curgere Hagen-Poiseuille.

Pentru a se compara rezultatele obținute în această lucrare cu legea universală de viteze s-a trecut la variabilele u^+, y^+ pe baza relațiilor,

$$u^+ = \frac{\overline{u}}{\overline{\tau}_0} \sqrt{\frac{Re_m}{\overline{\tau}_0}},$$

$$y^+ = \overline{y} \sqrt{Re_m \tau_0}, \tag{22}$$

Rezultatele astfel obținute sînt prezentate în figura 4 atît pentru curgere axial simetrică, cît și pentru curgere plană. Din această figură se poate observa că cele trei zone, adică zona laminară $y^+ < 5$, zona de

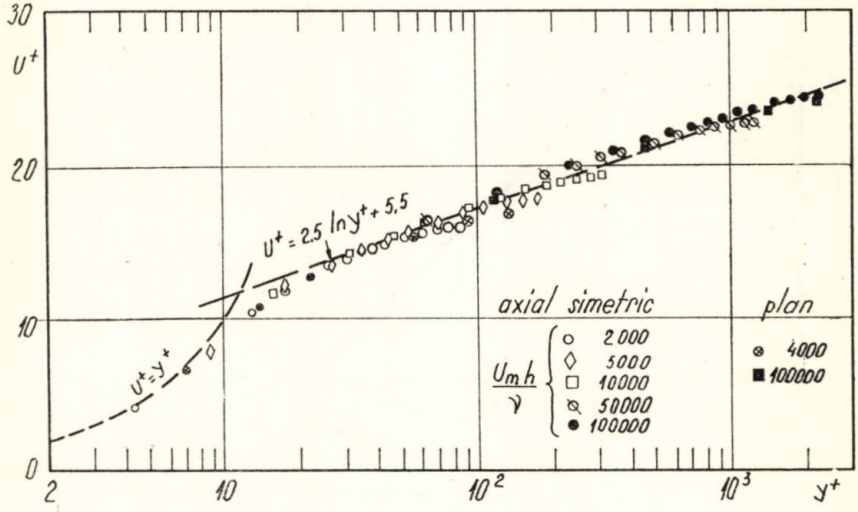


Fig. 4. — Legea universală de viteze pentru curgere Hagen-Poiseuille.

tranziție $5 < y < 30$, cît și zona pur turbulentă $y^+ > 30$, sînt foarte bine prinse de rezultatele prezentei lucrări.

Variația tensiunii de frecare turbulentă $(-\rho\widetilde{u'v'})$ cu y se poate observa în figura 5, în care s-au prezentat rezultatele obținute pentru curgere plană. În figura 6 se prezintă o comparație între profilul de viteză în variabilele $\bar{u}$, $\bar{y}$ și datele experimentale [6]. Se poate observa că vitezele obținute numeric cu expresia (15) pentru lungimea de amestec sînt cu ceva mai mari față de datele experimentale, iar explicația se găsește în faptul că pentru lungimea de amestec s-a utilizat în zona de mijloc $0{,}2 < \bar{y} < 0{,}5$ o variație cvasi-liniară, or în această zonă variația ar trebui să tindă către una parabolică. Pentru a se vedea influența pe care o are legea de variație din zona $\bar{y} > 0{,}2$ a lungimii de amestec s-a integrat ecuația (17) și cu o lege cvasi-parabolică,

$$\bar{l} = 0{,}4\left[\bar{y}(1-\bar{y}) - \frac{50}{\mathcal{R}e_m^{0,875}} \tanh \frac{\mathcal{R}e_m^{0,875}}{50}\bar{y}(1-\bar{y})\right], \qquad (23)$$

iar rezultatele sînt prezentate în figurile 7, *a*, *b*, *c*. Se poate observa că influența nu este prea importantă, obținîndu-se doar o îmbunătățire mai mare a rezultatelor privind profilul de viteze în variabilele $\bar{u}(\bar{y})$, figura 7*c*. Influență deosebit de mare asupra rezultatelor o are constanta C_1 (16) care este în legătură cu poziția substratului de tranziție. Pentru curgere de tip Poiseuille este mai indicată legea (23) pentru lungimea de amestec, totuși, utilizarea legii mai simple (15) este posibilă deoarece rezultatele care se obțin cu aceasta sînt destul de bune.

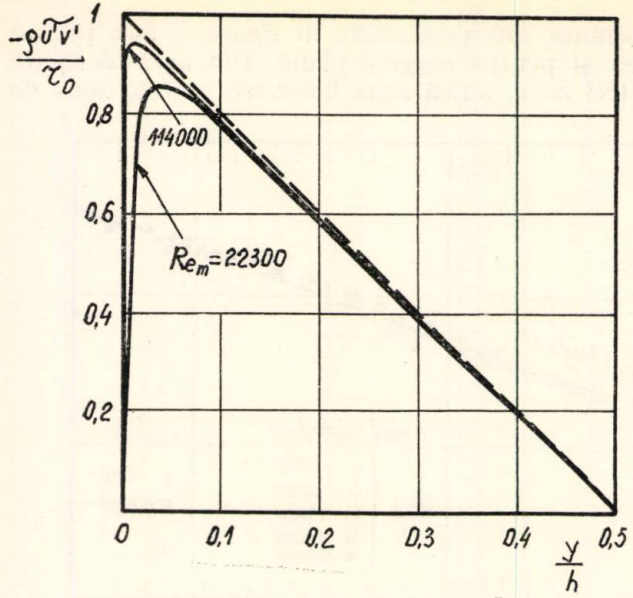


Fig. 5. — Tensiunile de frecare turbulente ($-\rho\widetilde{u'v'}$) pentru curgere plană Hagen-Poiseuille.

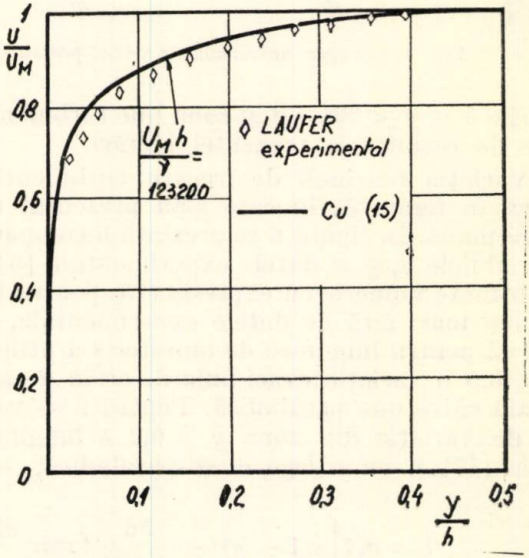


Fig. 6. — Profilul de viteză pentru curgere plană Hagen-Poiseuille.

4. CURGERE DE TIP COUETTE

Ecuația de mișcare pentru curgere de tip Couette este

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}+\varphi l^2\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)^2\right]=0 \tag{24}$$

sau, cu notațiile adimensionale,

$$\bar{y}=\frac{y}{h},\quad \bar{\bar{u}}=\frac{u}{u_m},\quad \mathcal{R}e_m=\frac{\rho u_m h}{\mu},\quad u_m=\frac{V}{2} \tag{25}$$

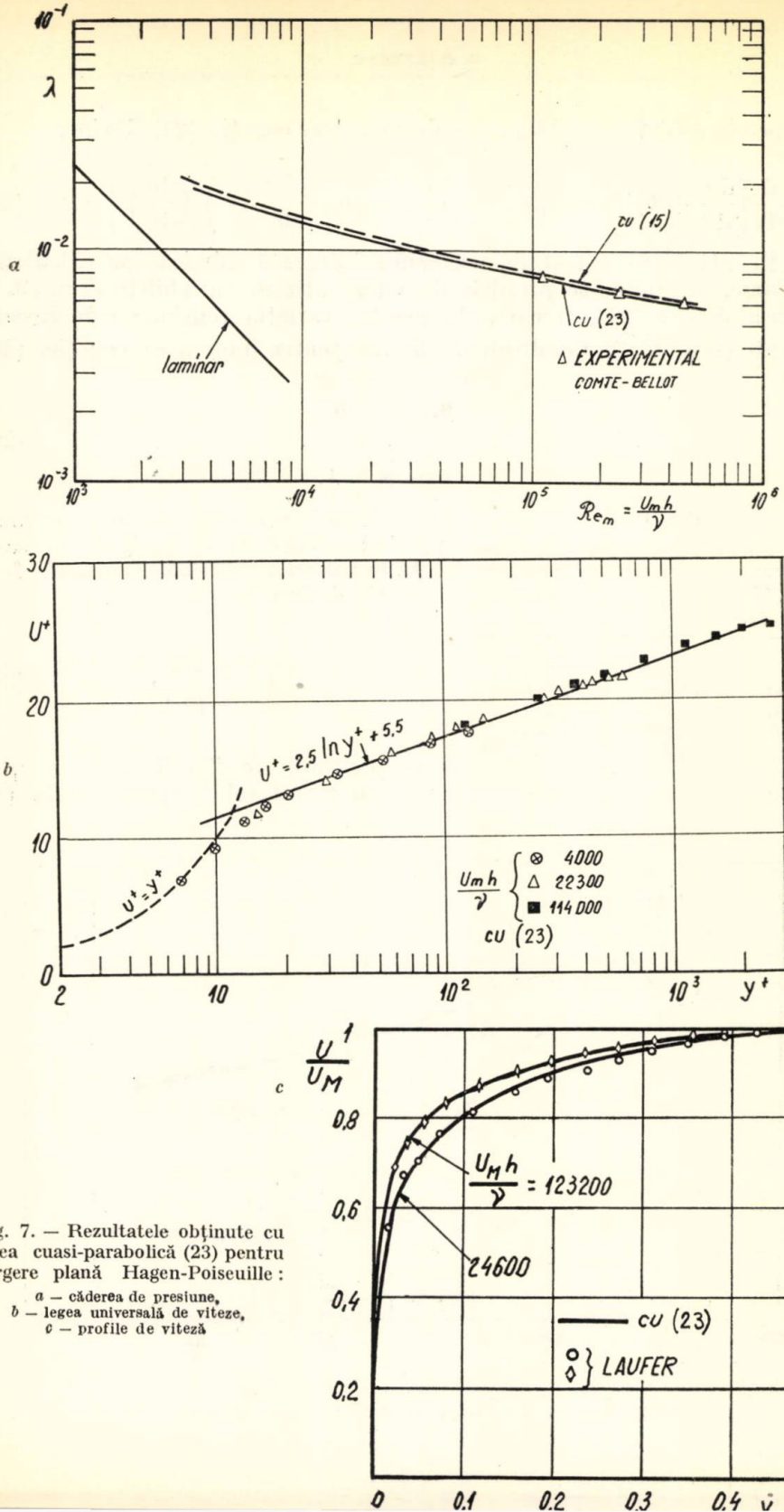


Fig. 7. — Rezultatele obținute cu legea cuasi-parabolică (23) pentru curgere plană Hagen-Poiseuille :

a — căderea de presiune,
b — legea universală de viteze,
c — profile de viteză

și expresia (15) pentru lungimea de amestec, ecuația (24) devine,

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{d\bar{\bar{u}}}{d\bar{y}} + 0{,}16\,\mathcal{R}e_m\left(\bar{y} - \frac{50}{\mathcal{R}e_m^{0,875}}\tanh\frac{\mathcal{R}e_m^{0,875}}{50}\,\bar{y}\right)^2\left(\frac{d\bar{\bar{u}}}{d\bar{y}}\right)^2\right] = 0. \quad (26)$$

Ecuația (26) a fost de asemenea integrată numeric pe calculator electronic, obținîndu-se profilele de viteze atît în variabilele $\bar{\bar{u}}(\bar{y})$, cît și în variabilele $u^+(y^+)$, frecarea la perete, variația tensiunilor de frecare aparente ($-\rho$, $\overline{u'v'}$). Condițiile la limită pentru integrarea ecuației (26) sînt :

$$\bar{y} = 0, \quad \bar{\bar{u}} = 0,$$
$$\bar{y} = 0{,}5, \quad \bar{\bar{u}} = 1. \quad (27)$$

Tabela 2

Frecarea la perete pentru curgere de tip Couette

$\mathcal{R}e_m = \frac{\rho V h}{2\mu}$	$\bar{\lambda}_0 = (d\bar{\bar{u}}/d\bar{y})_0$	$10^3 \cdot C_f$
500	3 297	3 297
1 000	5 073	2 536
2 500	9 576	1 915
5 000	15 887	1 588
25 000	54 402	1 088
30 600	63 708	1 040
50 000	93 816	0 938

Rezultatele obținute în acest mod privind frecarea la perete $\bar{\tau}_0$ sînt prezentate în tabela 2, iar coeficientul de frecare C_f definit de

$$C_f = \frac{2\tau_0}{\rho V^2}, \quad (28)$$

este prezentat în figura 8. În comparație cu rezultatele experimentale [8]

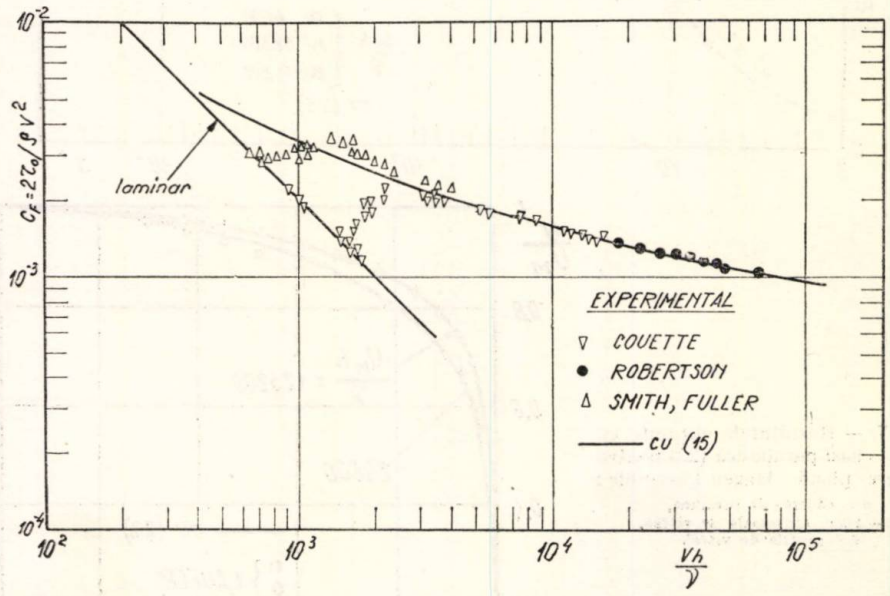


Fig. 8. — Frecarea la perete pentru curgere Couette.

[15] [16] se poate remarca o foarte bună concordanţă. De asemenea profilul de viteză în variabilele $u^+(y^+)$ din figura 9 arată o perfectă concordanţă cu legea universală [7], [8] pentru toate zonele caracteristice,

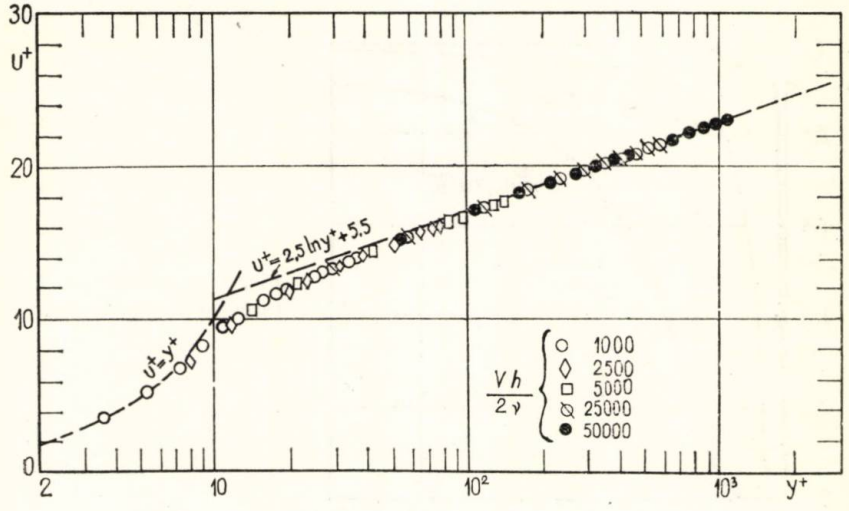


Fig. 9. — Legea universală de viteze pentru curgere Couette.

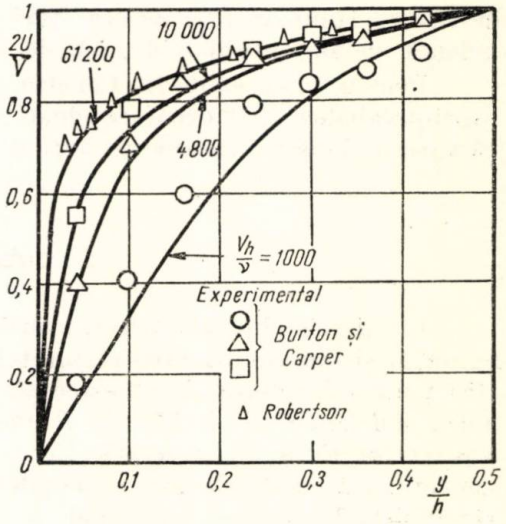


Fig. 10. — Profile de viteză pentru curgere Couette.

laminar, tranziţie, turbulent. În ceea ce priveşte profilele de viteză în variabilele $\overline{u}(\overline{y})$ se poate spune, de asemenea, că sînt foarte corecte în comparaţie cu datele experimentale [8],[9] după cum se vede dealtfel din figura 10.

Variația tensiunii turbulente ($-\rho\,\widetilde{u'v'}$) cu $\bar{y}$ este prezentată în figura 11 și se poate observa cum se modifică în funcție de numărul Reynolds mediu cele trei zone caracteristice. Pentru număr Reynolds nu prea mare se poate vedea clar că foarte aproape de perete nu poate fi neglijată tensiunea

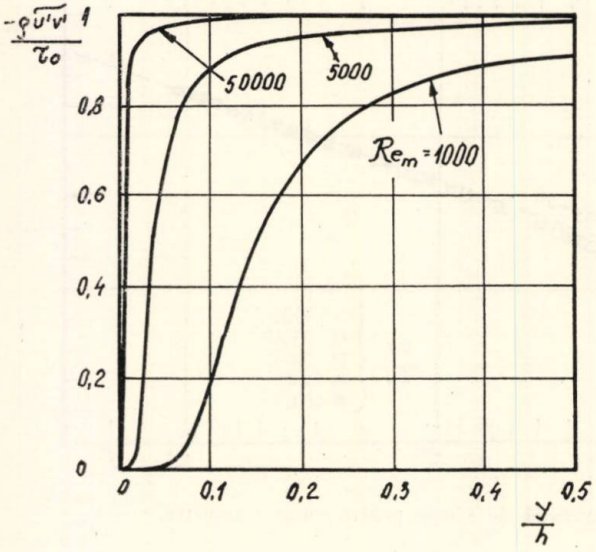


Fig. 11. — Tensiunile de frecare turbulente ($-\rho\widetilde{u'v'}$ pentru curgere Couette.

de frecare laminară față de cea turbulentă ci din contră tensiunea turbulentă devine neglijabilă față de cea laminară.

Pentru mișcarea de tip Couette, nu se pune problema utilizării legii cvasi-parabolice (23) deoarece chiar rezultatele experimentale au arătat că variația lungimii de amestec este de tipul celei date de legea (15).

5. CONCLUZII

Din datele obținute direct, utilizînd profilele de viteze experimentale figura 1, și din confirmarea rezultatelor obținute numeric folosind legea (15) pentru lungimea de amestec se poate spune că variația liniară a lungimii de amestec $\bar{l} = k^*\bar{y}$ este foarte puțin corectă în imediata apropiere a peretelui. Cu legea corectată (15) s-au obținut rezultate în foarte bună concordanță cu datele experimentale atît privind frecarea la perete, cît și profilele de viteze în variabilele $\bar{u}(\bar{y})$ sau $u^+(\ln y^+)$ pentru diferite tipuri de curgere. Singurul inconvenient al legii (15) este acela că nu mai permite integrarea analitică, chiar pentru cazuri simple de mișcare, și necesită o integrare numerică.

Faptul că variația liniară trebuie corectată în imediata apropiere a peretelui se poate vedea și din rezultatele privind stratul-limită la mișcarea

în lungul unui cilindru, obținute de V. C. Patel [17]. În acel raport utilizează pentru lungimea de amestec expresia

$$l^+ = k^* y^+ \sqrt{\tanh\,(C_2^2 y^{+2})}, \tag{29}$$

propusă de Landweber și Poreh, unde constanta C_2 este așa fel ca termenul cu tanh să fie egal cu unitatea în regiunea $y^+ = 50$. Variația lungimii de

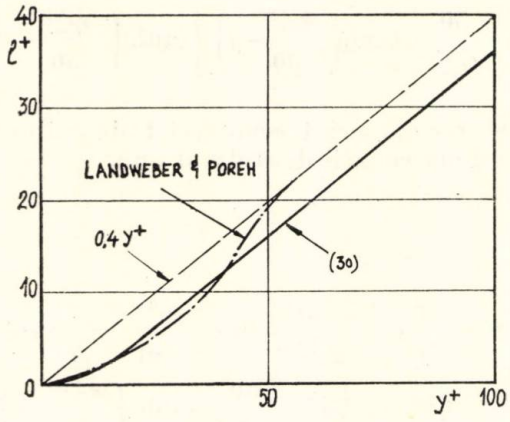


Fig. 12.

amestec dată de legea (29) este prezentată în figura 12. Dacă se pornește de la legea (15) și se trece în variabilele y^+ și l^+, se obține

$$l^+ = k^* \left(y^+ - C_3 \tanh \frac{y^+}{C_3} \right), \tag{30}$$

unde constanta C_3 este C_3=10 pentru curgere Poiseuille axial simetrică, $C_3 = 9{,}35$ pentru Poiseuille plană și $C_3 = 8.5$ pentru Couette. Trecerea la variabilele y^+, l^+ s-a făcut utilizînd pentru frecarea la perete liniarizarea

$$\lambda = \frac{C_4}{\mathcal{R}e_m^{0,25}}, \tag{31}$$

în care constanta $C_4 \cong 0{,}32$ pentru axial simetric și $C_4 = 0{,}14$ pentru plan, sau

$$C_f = \frac{C_5}{\mathcal{R}e_m^{0,25}} \tag{32}$$

și $C_5 = 0{,}0143$ pentru mișcarea Couette.

În figura 12 se arată o comparație între relația (30), (cu $C_3 = 10$) și legea (29) utilizată de V. C. Patel și se poate remarca faptul că ambele expresii efectuează aproape aceeași corecție în imediata apropiere a peretelui.

ANEXĂ. *INTEGRAREA NUMERICĂ A ECUAȚIEI (19)*

Ecuația de mișcare (19) pentru curgere de tip Hagen — Poiseuille se mai poate scrie sub forma,

$$\frac{d^2\bar{u}}{d\bar{y}^2}\left[1+0{,}32\,\mathcal{R}e_m\left(\bar{y}-\frac{50}{\mathcal{R}e_m^{0,875}}\tanh\left(\frac{\mathcal{R}e_m^{0,875}}{50}\bar{y}\right)\right)^2\left(\frac{d\bar{u}}{d\bar{y}}\right)\right]+\mathcal{B}_x+$$

$$+0{,}32\,\mathcal{R}e_m\left(\bar{y}-\frac{50}{\mathcal{R}e_m^{0,875}}\tanh\left(\frac{\mathcal{R}e_m^{0,875}}{50}\bar{y}\right)\right)\left[\tanh\left(\frac{\mathcal{R}e_m^{0,875}}{50}\bar{y}\right)\right]^2\left(\frac{d\bar{u}}{d\bar{y}}\right)^2=0. \quad (1.1)$$

Pentru integrarea numerică, ecuația (1.1) de ordinul doi se transformă într-un sistem de două ecuații de ordinul unu,

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{y}}=\bar{w},$$

$$\frac{d\bar{w}}{d\bar{y}}=-\frac{\mathcal{B}_x+0{,}32\,\mathcal{R}e_m\left[\bar{y}-\frac{50}{\mathcal{R}e_m^{0,875}}\tanh\frac{\mathcal{R}e_m^{0,875}}{50}\bar{y}\right]\left[\tanh\frac{\mathcal{R}e_m^{0,875}}{50}\bar{y}\right]^2\bar{w}^2}{1+0{,}32\,\mathcal{R}e_m\left[\bar{y}-\frac{50}{\mathcal{R}e_m^{0,875}}\tanh\left(\frac{\mathcal{R}e_m^{0,875}}{50}\bar{y}\right)^2\right]\bar{w}} \quad (1.2)$$

și se integrează prin metoda Runge-Kutta, cu condițiile la limită (20). Asupra celei de a doua condiție din grupul condițiilor la limită (20) se face observația că poate fi înlocuită cu condiția $d\bar{u}/d\bar{y}=\mathcal{B}_x/2$ la $\bar{y}=0$, deci date inițiale pentru începerea integrării

$$\begin{aligned}\bar{u}&=0,\\ \bar{w}&=\frac{\mathcal{B}_x}{2},\end{aligned}\qquad \text{la } \bar{y}=0. \quad (1.3)$$

Pentru o valoare dată numărului Reynolds mediu, $\mathcal{R}e_m$ nu se cunoaște valoarea parametrului $\mathcal{B}_x$ așa că soluționarea problemei este posibilă prin integrarea repetată pentru diferite valori ale parametrului $\mathcal{B}_x$ pînă cînd este îndeplinită cu o precizie corespunzătoare condiția ultimă la limită,

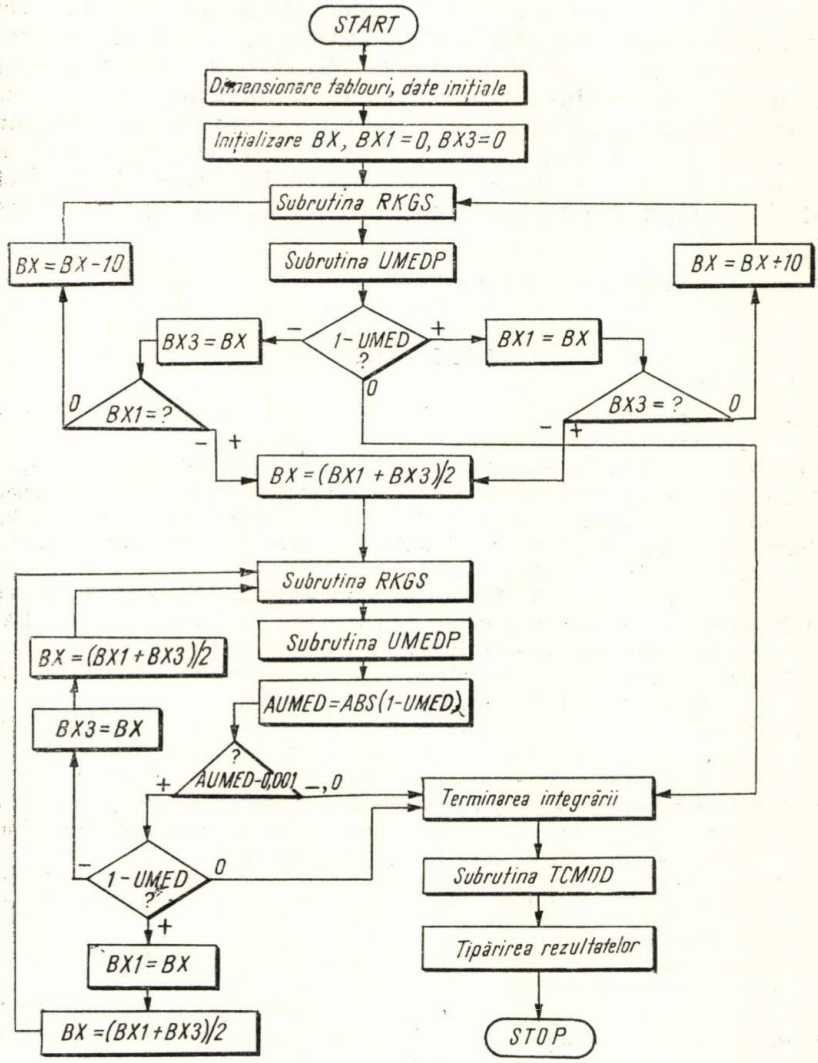
$$2\int_0^{1/2}\bar{u}\,d\bar{y}=1 \quad (1.4)$$

pentru curgere plană sau,

$$8\int_0^{1/2}\bar{u}\left(\frac{1}{2}\right)-\bar{y}\,d\bar{y}=1 \quad (1.5)$$

pentru curgere axial simetrică. Sistemul de iterații ce se efectuează se poate vedea din schema logică a programului. Variabila $B \times 1$ este egală cu valoarea lui $\mathscr{B}_x$ pentru care UMED < 1, $B \times 3$ este valoarea lui $\mathscr{B}_x$ pentru care UMED > 1, iar UMED este

$$\text{UMED} = 2\int_0^{1/2} \bar{\bar{u}}\, \mathrm{d}\bar{y} \tag{1.6}$$



pentru curgerea plană sau

$$UMED = 8\int_0^{1/2} \bar{\bar{u}} \left(\frac{1}{2} - \bar{y}\right) \mathrm{d}\bar{y} \tag{1.7}$$

pentru curgere axial simetrică. Calculul integralelor (1.6) sau (1.7) se face prin metoda Simson de către subrutina *UMEDP*. Pentru integrarea prin metoda Runge-Kutta a sistemului (1.2) s-a utilizat subrutina *RKGS* a calculatorului pentru care s-au fixat 21 de puncte (în intervalul [0 ; 0,5]) la care s-au reținut rezultatele. Între două puncte consecutive deci pe un interval de mărime 0,025, s-a fixat pas inițial de calcul egal cu 0,005. Subrutina *RKGS* efectuează și calculul de eroare și dacă este necesar înjumătățește sau dublează pasul dat inițial.

Subrutina *TCMOD* (trecerea la coordonate modificate) face trecerea de la variabilele $u(\bar{y})$, la variabilele $u^+(y^+)$ utilizînd relațiile de trecere (22).

În încheiere facem precizarea că ecuația (1.1) ar fi putut fi integrată o dată analitic, ajungîndu-se la o ecuație de ordinul unu. Aceasta însă nu se mai putea integra analitic așa încît trebuie apelat la integrare numerică. Deci cum tot ar fi trebuit să se facă o integrare numerică utilizînd un calculator electronic, s-a preferat ca această integrare să se efectueze chiar de la ecuația inițială (1.1) de ordinul doi, așa cum s-a prezentat mai sus.

Primită la redacție la 9 ianuarie 1973

BIBLIOGRAFIE

1. L. PRANDTL, *The mechanics of viscous flow, Aerodynamic theory* (W. F. Durand) III, p. 127—145, (1935).
2. T. OROVEANU, *Mecanica fluidelor viscoase*, Edit. Academiei p. 395—418, București, 1967.
3. V. N. CONSTANTINESCU, *Teoria lubrificației în regim turbulent*, București, Edit. Academiei, 1965.
4. H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*, McGraw Hill Book Company, New York, 1960.
5. J. NIKURADSE, *Gesetzmäsigkeiten der turbulenten Strömmug in glatten Rohren*, Forschungen-Arch. Ing. Weren, 356 (1932).
6. J. LAUFER, *Investigation of turbulent flow in a two-dimensional channel*, NACA TR. 1053 (1951).
7. H. REICHARDT, *On the velocity distribution in a rectiliner turbulent Couette flow*, Z.A.M.M. Special Supplement 26—29 (1956).
8. J. M. ROBERTSON, *A study of turbulent plane Couette flow, Department of teoretical and applied mechanics sept*, 141 University of Illinois (1959).
9. R. A. BURTON, H. J. CARPER, *An experimental Study of Annular Flows With Applications in Turbulent Film Lubrication*, Transactions of the ASME, Journal of Lubrication technology, **89**, *3*, 381—391, July (1967).
10. V. N. CONSTANTINESCU, S. GALETUȘE, *Study on the turbulent lubrication by using the mixing length hypothesis with a parabolic variation upon the normal to the film*, Rev. Rou., Sci. Techn. — Méc. Appl., **XI**, *2*, 403—423, (1966).
11. V. N. CONSTANTINESCU, S. GALETUȘE, *On the possibilities of using universal velocity : laws for the study of turbulent lubrication*, Rev. Roum. Sci. Techn.,Méc. Appl., **XII**, *4*, 832—852 (1967).
12. S. GALETUȘE, *Asupra căderii de presiune la scurgerile prin conducte în regim turbulent*, St. cerc. mec. apl., **28**, *3*, 607—613 (1969).
13. S.GALETUȘE, *Contribuții la teoria mișcărilor turbulente în straturi subțiri*, Teză de doctorat, 1970.
14. G. COMTE-BELLOT, *Contribution à l'étude de la turbulence de conduite*, Thèse pour obtenir de titre de docteur ès sciences (1963), Université de Grenoble.
15. M. I. SMITH, D. D. FULLER, *Journal Bearing operation at superlaminar speeds*, Trans. ASME, *78*, 469—474 (1956).
16. M. COUETTE, *Etudes sur le Frottement des Liquides*, Ann. Chem. Phys. *21*, 433 (1890).
17. V. C. PATEL, *A unified view of the law of the wall using mixing-length theory*, IIHR Report No. 137, University of Iowa, april, 1972.

STUDIUL OSCILAȚIILOR ÎN MASĂ CE APAR ÎN SISTEMUL GALERIE DE ADUCȚIUNE - CASTEL DE ECHILIBRU LA SCHIMBAREA BRUSCĂ A PUTERII CENTRALEI HIDROELECTRICE, AVÎND LA BAZĂ PRINCIPIUL LUI HAMILTON

de D. ARSENIE

Institutul politehnic Timișoara

În lucrare se obține, plecînd de la principiul lui Hamilton, ecuația diferențială a oscilațiilor în masă care apar în sistemul galerie de aducțiune-castel de echilibru la schimbarea puterii centralei hidroelectrice Se poate transforma pe această cale problema rezolvării ecuației diferențiale în problema echivalentă a determinării unei funcții care satisface condiția de staționaritate a unei integrale. Se folosește un sistem de mărimi relative rațional, care conduce la un număr minim de parametrii adimensionali. Rezultatele obținute se verifică atît cu ajutorul ecuației diferențiale a lui Euler, cît și cu ajutorul teoremei lui Langenbach, verificarea constînd în identificarea cu ecuația oscilațiilor obținută în teoria hidraulică clasică bazată pe ecuația lui Bernoulli.

1. GENERALITĂȚI

În hidraulică folosirea principiilor variaționale, sub forma dată de Hamilton sau sub o altă formă, se întîlnește extrem de rar atît în literatura de specialitate din țară, cît și în cea de peste hotare.

S-a avut în vedere definiția hidraulicii adoptată prin STAS 3061-64 revizuit, conform căreia hidraulica studiază mișcarea corpurilor lichide în scopul rezolvării problemelor inginerești.

Această situație contrastează cu utilizarea mult mai largă pe care aceste principii au căpătat-o în alte științe, cum este de exemplu mecanica sistemelor de puncte materiale sau teoria elasticității, în care metoda variațională este o metodă curentă de rezolvare a unor probleme inginerești. Avînd în vedere cele de mai sus, caracterul de noutate al metodei, se vor face la început cîteva considerații generale.

Principial, folosirea principiilor variaționale este pe deplin posibilă deoarece, în fond, acestea nu reprezintă altceva decît o formulare specifică a principiilor generale de mișcare a materiei. De exemplu, după cum este cunoscut [1], în mecanica sistemelor de puncte materiale și în cazul

mediilor continue elastice neconducătoare de căldură, legea conservării energiei poate fi obținută ca o consecință a pincipiului lui Hamilton.

În hidraulică se menționează aplicarea unor metode variaționale în lucrări apărute în ultimul deceniu cum sînt, de exemplu [2] — [6]. În toate aceste lucrări se postulează principii variaționale specifice fenomenului studiat și nu se pleacă de la principiile generale.

Acest lucru se explică prin faptul că sistemul ecuațiilor diferențiale a mișcării lichidelor nu este un sistem închis, numărul necunoscutelor fiind mai mare decît numărul ecuațiilor, de aceea nici problema variațională echivalentă nu se poate preciza.

Mai mult, dacă pentru fluide ideale problema obținerii ecuațiilor de mișcare Euler ca extremale ale unor funcționale a fost rezolvată de către Herivel și Lin [1], problema similară pentru ecuațiile de mișcare Navier-Stokes nu a fost rezolvată în cazul general ci doar în cazuri particulare [12].

În esență, metoda variațională înlocuiește, din punct de vedere matematic, problema determinării unor funcții-soluții ale unor ecuații diferențiale (A) cu problema echivalentă a determinării unor funcții-extremale ale unor integrale (B). Prin aceasta metoda este considerată ca aparținînd analizei funcționale. De o deosebită importanță în ceea ce privește dezvoltarea din punct de vedere matematic a metodei variaționale din ultima perioadă sînt în special lucrările lui A. Langenbach, J. G. Minty, S. G. Mihlin, M. M. Vainberg [7]—[10].

Prin lucrările acestora problema echivalenței problemelor (A) și (B) este rezolvată pentru cazul operatorilor diferențiali liniari și este doar parțial rezolvată pentru cazul operatorilor neliniari, în sensul că dacă se poate trece totdeauna de la problema (B) la problema (A) prin scrierea ecuațiilor diferențiale Euler pe care trebuie să le satisfacă funcțiile extremale, trecerea în sens invers de la problema (A) la problema (B), adică determinarea integralelor atunci cînd sînt date ecuațiile diferențiale, nu este rezolvată în cazul general ci doar în cazuri particulare (operatori pozitivi, operatori monotoni). Se menționează contribuțiile aduse prin lucrarea [11] în utilizarea metodei variaționale la rezolvarea unor probleme neliniare din teoria plasticității. Rezultatele obținute în prezenta lucrare prin utilizarea principiului lui Hamilton se verifică în final pe două căi independente astfel încît există certitudinea valabilității lor.

Din punctul de vedere fizic metoda variațională transformă problema locală (reprezentată prin ecuațiile diferențiale scrise într-un punct curent la un moment oarecare) într-o problemă globală (reprezentată prin expresiile integrale). Acest fapt l-a determinat pe autorul articolului să considere că metoda variațională prezintă două avantaje față de metodele clasice utilizate în hidraulică, avantaje care vor fi expuse în cele ce urmează.

În primul rînd este posibilă adoptarea unor ipoteze referitoare la evoluția globală a fenomenului, atunci cînd nu este posibilă adoptarea unor ipoteze referitoare la evoluția locală. Acesta și este cazul hidraulicii în care nu se cunoaște suficient exprimarea locală a disipației în regim turbulent, dar cercetările experimentale confirmă o ipoteză globală referitoare la proporționalitatea energiei mecanice specifice disipate cu pătratul vitezei medii.

În al doilea rînd, deși problemele denumite anterior (A) și (B) sînt echivalente, rezolvarea lor prin metode aproximative nu se face prin

aceleași metode și nu conduce la aceleași rezultate. Apare în acest fel probabil, cel puțin în anumite situații, ca metodele care aproximează global fenomenul să conducă la rezultate mai bune decît metodele care aproximează local fenomenul.

În lucrarea de față se încearcă rezolvarea unei probleme inginerești complexe, aceea a oscilațiilor care apar în castelul de echilibru al unei hidrocentrale la o variație arbitrară bruscă a puterii centralei, rezolvare care se bazează pe principiul lui Hamilton, pe o ipoteză globală privind energia mecanică specifică disipată și pe utilizarea unor ipoteze simplificatoare.

Metoda aproximativă aplicată curent pentru rezolvarea aproximativă a ecuației diferențiale ordinare neliniare de ordinul doi la care conduce problema menționată este metoda diferențelor finite, variante de adaptare pentru un calculator electronic fiind prezentate în lucrările [15]—[17].

2. O EXPRESIE GENERALĂ CONVENABILĂ A PRINCIPIULUI LUI HAMILTON

Se pleacă de la principiul lui Hamilton, care pentru fluide se poate pune sub forma [1]:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta U)\,\mathrm{d}t = 0, \tag{1}$$

în care

t reprezintă timpul, momentele fixate fiind $t = t_0$ și $t = t_1$;
δT — variația energiei cinetice;
δU — lucrul mecanic virtual.

Relația (1) este valabilă pentru orice mișcare virtuală rezultată prin variație de la mișcarea reală. În clasa mișcărilor virtuale admise se includ mișcările care satisfac ecuația de continuitate, legăturile exterioare și în plus condiția ca la oricare dintre momentele fixate t_0 și t_1, deplasarea virtuală $\delta\vec{x}$ să fie nulă. Se vor considera numai variații sincrone, adică variații la care $\delta t = 0$.

Deoarece limitele de integrare sînt fixe, simbolul δ este permutabil cu simbolul integralei [14].

Mai trebuie presupus că deplasarea virtuală $\delta\vec{x}$ se realizează în sensul real de curgere a lichidului pentru a se păstra semnul în expresia pierderilor de energie, acest semn fiind funcție de sensul de curgere al apei.

Notînd cu $\vec{u}$ viteza într-un punct arbitrar $\vec{x}$ al masei de lichid se poate scrie expresia energiei cinetice T:

$$T = \int_V \frac{\rho u^2}{2}\,\mathrm{d}V, \tag{2}$$

în care

ρ reprezintă densitatea lichidului;
V — volumul apei în mișcare;
T — energia cinetică a apei în mișcare.

Lucrul mecanic virtual δU, corespunzător deplasării virtuale $\delta\vec{x}$, se poate calcula [1] în virtutea principiului D'Alembert-Lagrange şi a relaţiei lui Cauchy:

$$\delta U = \int_V \rho\vec{a}\delta\vec{x}\,\mathrm{d}V = \int_V (\rho\vec{f} + \operatorname{div}\overrightarrow{\overrightarrow{T_D}})\,\delta\vec{x}\,\mathrm{d}V, \tag{3}$$

în care

$\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}$ reprezintă acceleraţia în punctul curent $\vec{x}$;

$\vec{f} = -\operatorname{grad} U_{gr}$ — intensitatea cîmpului forţelor masice;

U_{gr} — funcţia de potenţial a cîmpului gravitaţional;

$\overrightarrow{\overrightarrow{T}}$ — tensorul tensiunilor.

În cazul lichidului ideal, tensorul tensiunilor este compus doar din eforturi de presiune, drijate după normala la elementul de suprafaţă considerat. În cazul lichidului real care satisface condiţia lui Stokes de legătură între coeficientul de viscozitate dilataţională şi coeficientul de viscozitate de forfecare [13], se poate descompune tensorul tensiunilor în doi tensori, unul reprezentînd o presiune mecanică notat $\overrightarrow{\overrightarrow{\pi}}$ şi un altul denumit deviator şi notat $\overrightarrow{\overrightarrow{T_D}}$. Tensorul $\overrightarrow{\overrightarrow{\pi}}$ reprezintă partea reversibilă a tensorului tensiunilor, avînd o repartiţie hidrostatică, iar tensorul $\overrightarrow{\overrightarrow{T_D}}$ reprezintă partea ireversibilă, care contribuie la disiparea ireversibilă a energiei mecanice.

Notînd cu $\overrightarrow{\overrightarrow{I}}$ tensorul unitate se poate scrie pe baza celor de mai sus:

$$\overrightarrow{\overrightarrow{T}} = \overrightarrow{\overrightarrow{\pi}} + \overrightarrow{\overrightarrow{T_D}} = -p\overrightarrow{\overrightarrow{I}} + \overrightarrow{\overrightarrow{T_D}}. \tag{4}$$

Introducînd (4) în (3) se obţine

$$\delta U = -\int_V \rho(\operatorname{grad} U_{gr} + \operatorname{grad} p - \operatorname{div}\overrightarrow{\overrightarrow{T_D}})\,\delta\vec{x}\,\mathrm{d}V. \tag{5}$$

Ţinînd cont de faptul că produsul scalar dintre gradientul unei funcţii scalare şi o deplasare elementară exprimă tocmai variaţia totală a funcţiei scalare după direcţia deplasării se poate obţine expresia convenabilă căutată a principiului lui Hamilton:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_V [\delta(T - U_{gr} - p) + \operatorname{div}\overrightarrow{\overrightarrow{T_D}}\,\delta\vec{x}]\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t = 0. \tag{6}$$

Relaţia de mai sus se va utiliza efectiv în rezolvarea problemei propuse, considerînd o ipoteză globală referitoare la partea disipativă a tensorului tensiunilor şi cîteva ipoteze simplificatoare.

3. FORMULAREA PROBLEMEI (considerații fizice)

O amenajare hidroelectrică cu derivație sub presiune se compune în principiu dintr-un lac de acumulare creat cu ajutorul unui baraj, o galerie de derivație sub presiune prevăzută la capătul aval cu un castel de echilibru și centrala în care energia mecanică hidraulică este transformată în energie electrică. În plus mai există în anumite puncte caracteristice vane pentru reglajul debitului de apă.

La schimbarea puterii centralei, care atrage după sine prin intervenția dispozitivelor de reglaj schimbarea debitului turbinelor, apar oscilații ale nivelului apei în castelul de echilibru expresie a oscilațiilor masei de apă aflată în sistemul lac de acumulare-galerie de aducțiune-castel de echilibru.

Metoda clasică de studiu a acestui fenomen comportă următoarele două etape: se stabilește ecuația diferențială care exprimă legea de mișcare a nivelului apei în castel folosind în acest scop ecuația lui Bernoulli în regim nepermanent de mișcare ca ecuație de mișcare, ecuația de continuitate și ecuația de reglaj a turbinelor. Din sinteza acestor ecuații, în cadrul unor ipoteze simplificatoare se obține o ecuație diferențială neliniară de ordinul doi, care în variabile relativizate are forma (23).

Întrucît soluția ecuației nu se poate exprima sub formă finită cu ajutorul funcțiilor elementare apare ca avantajoasă folosirea metodei variaționale.

Pentru concretizare se va presupune că variația bruscă a puterii centralei se produce de la o putere mai mare N_1 la o putere mai mică N_2; tratarea cazului opus nu prezintă deosebiri esențiale. Prin această manevră bruscă apare o disponibilitate de energie cinetică avînd ca agent purtător apa din galerie. Pe seama acestei energii cinetice disponibile iau naștere oscilații ale apei din sistemul lac de acumulare-galerie de echilibru-castel de echilibru oscilații însoțite de inevitabila disipație de energie.

Dacă problema evaluării energiei disponibile în cazul anulării debitului turbinelor (căderea totală de sarcină) este relativ simplă, în cazul

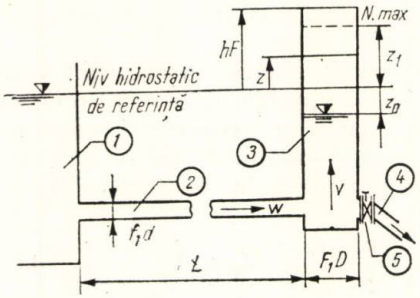


Fig. 1

micșorării parțiale a debitului turbinelor (căderea parțială de sarcină) problema evaluării energiei disponibile devine mult mai dificilă.

Întrucît mișcarea apei după ce a trecut prin turbine nu mai are nici o influență asupra procesului oscilatoriu se poate presupune că printr-un

procedeu oarecare (de exemplu datorită energiei solare) ea este adusă din nou în locul de acumulare. În acest fel mișcarea reală poate fi considerată ca fiind alcătuită din următoarele două mișcări reprezentate schematic în figura 2.

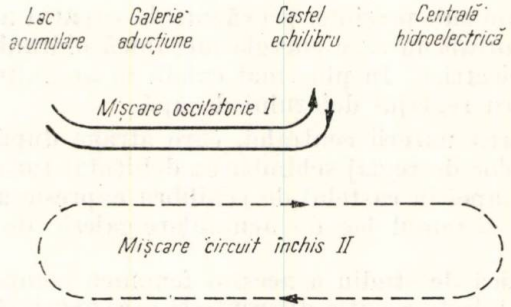


Fig. 2

I — o mișcare oscilatorie la care participă apa din lacul de acumulare, galeria de aducțiune și castelul de echilibru (linia plină din fig. 2)

II — o mișcare în circuit închis la care participă apa din lacul de acumulare, galeria de aducțiune, conducte forțate și centrală.

Se observă că galeria de aducțiune este comună ambelor mișcări de aceea mișcările de mai sus se vor putea considera ca separate dacă se reușește a se stabili influența reciprocă a celor două mișcări pe porțiunea comună.

Avînd în vedere obiectul lucrării de față se va studia în cele ce urmează mișcarea notată I.

4. UTILIZAREA IPOTEZELOR SIMPLIFICATOARE

Deoarece obținerea ecuației oscilațiilor nivelului apei în castel prin utilizarea ecuației lui Bernoulli comportă o serie de ipoteze simplificatoare, este firesc ca în scopul obținerii aceleiași ecuații a oscilațiilor să se admită aceleași ipoteze simplificatoare.

Se consideră că energia cinetică a apei din lacul de acumulare și din castelul de echilibru sînt neglijabile în raport cu energia cinetică a apei din galeria de aducțiune, avînd în vedere diferența mare între vitezele de curgere ale apei în aceste domenii. Se poate scrie atunci expresia energiei cinetice a apei care participă la mișcarea I:

$$T_{\mathrm{I}} = \int_{V} \frac{\rho u^2}{2}\,\mathrm{d}V - T_{\mathrm{II}} \cong \int_{V_{\mathrm{galerie}}} \frac{\rho u^2}{2}\,\mathrm{d}V - T_{\mathrm{II}}. \tag{7}$$

Considerînd coeficienții Coriolis unitari, folosind în scrierea energiei cinetice viteza medie a apei în galerie w:

$$\int_{V_{\mathrm{galerie}}} \frac{\rho u^2}{2}\,\mathrm{d}V = \frac{\rho w^2}{2} Lf, \tag{8}$$

în care

L reprezintă lungimea galeriei;

f — secțiunea transversală a galeriei.

Ecuația de continuitate exprimînd conservarea masei este

$$fw = F\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + Q_{\mathrm{II}}, \tag{9}$$

în care

F este secțiunea transversală a castelului de echilibru;

z — cota nivelului apei în castel, axa Oz fiind orientată ascendent și avînd originea la nivelul hidrostatic;

Q_{II} — debitul care merge la turbine.

Cu ajutorul relației (9) se elimină viteza medie w din (8) și prin aplicarea formulei de integrare prin părți se obține următoarea expresie utilă a energiei cinetice:

$$\int_{V_{\text{galerie}}} \frac{\rho u^2}{2}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\,\frac{\rho L F^2}{f}\left[\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{Q_{\mathrm{II}}}{F}\right)^2 + 2\int \frac{Q_{\mathrm{II}}}{F}\,\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) + 2\int \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\left(\frac{Q_{\mathrm{II}}}{F}\right)\right]. \tag{10}$$

În relația (10) s-au neglijat constantele aditive care nu prezintă nici o importanță în metoda variațională.

Se fac următoarele observații privind unele situații extreme care pot apare în evoluția fizică a fenomenului:

a) dacă centrala funcționează în regim permanent, la turbine merge întregul debit al aducțiunii și în castelul de echilibru nu apar oscilații. Rezultă că întreaga energie cinetică a apei din galerie, care în acest caz se reduce la $\frac{1}{2}\,\frac{\rho L F^2}{f}\left(\frac{Q_{\mathrm{II}}}{F}\right)^2$ se include în T_{II}. Se va considera că și în regim nepermanent acest termen se include în T_{II},

b) dacă presupunem o manevră totală de închidere a vanei de reglaj în urma căreia debitul turbinelor se anulează, întreaga energie cinetică a apei în galerie, care în acest caz se reduce la $\frac{1}{2}\,\frac{\rho L F^2}{f}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2$ se include în T_{I}. Se va considera ca și în regim nepermanent acest termen se include în T_{I},

c) dacă printr-un reglaj special debitul turbinelor ar rămîne constant, însă în castel ar exista oscilații ale nivelului provocate de o perturbație inițială oarecare, atunci energia T_{II} ar fi aceeași ca la punctul a:

$$T_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\,\frac{\rho L F^2}{f}\left[\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2\int \frac{Q_{\mathrm{II}}}{F}\,\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)\right],$$

$$T_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\,\frac{\rho L F^2}{f}\left(\frac{Q_{\mathrm{II}}}{F}\right)^2. \tag{11}$$

d) în sfîrșit, dacă printr-un procedeu oarecare am menține legea de mișcare a nivelului apei în castel ca la punctul b dar debitul care merge la turbine ar fi variabil, atunci energia T_{I} ar fi aceeași ca la punctul c:

$$T_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\frac{\rho L F^2}{f}\left[\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2\int \frac{Q_{\mathrm{II}}}{F}\,\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)\right],$$

$$T_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\frac{\rho L F^2}{f}\left[\left(\frac{Q_{\mathrm{II}}}{F}\right)^2 + 2\int \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\left(\frac{Q_{\mathrm{II}}}{F}\right)\right]. \tag{12}$$

Rezultă că se admite că împărțirea energiei cinetice totale a apei din galerie între cele două mișcări este reprezentată de aceeași termeni, independent de evoluția celor două mișcări. Neglijînd constantele aditive și admițînd ipoteza că nivelul apei în lacul de acumulare nu este afectat de oscilațiile apei din castelul de echilibru se poate obține expresia energiei potențiale, raportată la planul de referință hidrostatic:

$$\int_V \rho U_{\mathrm{gr}}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\rho g F z^2. \tag{13}$$

În ceea ce privește presiunea reversibilă p, ea nu contribuie la disiparea energiei mecanice, astfel încît vom considera, aplicînd formula mediei,

$$\int_V p\,\mathrm{d}V = p_{\mathrm{med}} V \cong \mathrm{const.} \tag{14}$$

A rămas de cercetat ultimul termen din integrala (6), anume termenul corespunzător energiei mecanice disipate în procesul oscilatoriu. Consecință firească a ipotezei simplificatoare adoptate la stabilirea expresiei energiei cinetice se va considera că energia disipată în castelul de echilibru și în lacul de acumulare este neglijabilă în raport cu energia disipată în galeria de aducțiune. În concordanță cu rezultatele experimentale se adoptă ipoteza globală a proporționalității energiei specifice disipate cu pătratul vitezei medii:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{\vec{T}}_D\,\delta\vec{x}\,\mathrm{d}V \cong \int_{V_{\mathrm{galerie}}} \operatorname{div} \vec{\vec{T}}_D \cdot \delta\vec{x}\,\mathrm{d}V = -$$

$$-\delta K \int \frac{1}{2}\rho F\left[\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\frac{Q_{\mathrm{II}}}{F} + \left(\frac{Q_{\mathrm{II}}}{F}\right)^2\right]\mathrm{d}z. \tag{15}$$

Coeficientul de proporționalitate K se determină din condiția ca pierderea specifică de energie z_0 din momentul inițial calculată cu relația lui Darcy să coincidă cu cea calculată cu ajutorul coeficientului de propor-

ționalitate K :

$$z_0 = -\lambda_{echiv}\frac{L}{d}\frac{w_0^2}{2g} = -K\frac{f^2}{F^2}\frac{w_0^2}{2g}, \tag{16}$$

în care

$\lambda_{echiv.}$ este coeficient de rezistență Darcy al galeriei;
d — diametrul galeriei.

Rezumînd, în urma utilizării ipotezelor simplificatoare, relația generală (6) a căpătat următoarea formă particulară specifică problemei studiate :

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{1}{2}\frac{\rho LF^2}{f}\left[\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + 2\int\frac{Q_{II}}{F}d\left(\frac{dz}{dt}\right)\right] - \frac{1}{2}\rho gFz^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}K\rho F\int\left[\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + 2\frac{dz}{dt}\frac{Q_{II}}{F} + \left(\frac{Q_{II}}{F}\right)^2\right]dz\right\}dt = 0. \tag{17}$$

Din ecuația de mai sus se va elimina Q_{II}, utilizînd în acest scop ecuația de reglaj a turbinelor, care exprimă faptul că în timpul oscilațiilor nivelului apei în castelul de echilibru puterea N_2 a centralei este menținută constantă :

$$Q_{II} = \frac{N_2}{\gamma\eta(H_{br}+z)} \Rightarrow \frac{dQ_{II}}{dz} = -\frac{N_2}{\gamma\eta(H_{br}+z)^2}, \tag{18}$$

în care

γ este greutatea specifică a apei;
H_{br} — căderea brută a centralei;
η — randamentul centralei, considerat constant.

4. FORMULAREA PROBLEMEI VARIAȚIONALE ÎN VARIABILE RELATIVE

Pentru simplificarea formală a expresiilor de mai sus s-a arătat [18] că este rațional a se relativiza expresiile de mai sus considerînd următorul sistem de mărimi de referință, care conduce la un număr minim de parametrii adimensionali :

$$Z_* = \frac{LF}{Kf}; \qquad T_* = \sqrt{\frac{LF}{gf}}; \qquad E_* = \frac{\rho gL^2F^3}{K^2f^2}. \tag{19}$$

Mărimile de referință alese admit și următoarea interpretare fizică

Z_* reprezintă cota maximă la care s-ar ridica nivelul apei în castelul de echilibru în cazul că denivelarea adimensională inițială $\frac{z_0}{Z_*} = \zeta_0$ tinde spre $-\infty$, iar manevra de închidere a vanei de reglaj ar fi totală;

T_* reprezintă perioada oscilațiilor care s-ar produce în cazul în în care apa ar fi înlocuită cu un lichid ideal împărțită cu constanta 2π, iar manevra de închidere a vanei de reglaj ar fi totală;

E_* — lucrul mecanic efectuat în deplasarea Z_* de o forță dată de o presiune dinamică $K\rho\frac{Z_*^2}{T_*^2}$ acționînd pe suprafața F a castelului.

Cu ajutorul acestor mărimi de referință se introduce spațiul adimensional ζ și timpul adimensional τ:

$$\zeta = \frac{z}{Z_*}; \qquad \tau = \frac{t}{T_*}. \tag{20}$$

Intervin pe parcurs și următorii parametrii adimensionali:

$$\alpha = \frac{KN_2}{\rho g \eta F H_{br}} \sqrt{\frac{f}{gLF}}; \qquad \beta = \frac{Z_*}{H_{br}}; \qquad \sigma = \frac{N_1}{N_2}. \tag{21}$$

Se obține astfel că legea de mișcare a nivelului apei în castelul de echilibru sub forma adimensională $\zeta = \zeta(\tau)$ este extremală pentru următoarea funcțională, obținută prin relativizarea mărimilor care intervin în relația (17) din care s-a eliminat Q_{II} cu ajutorul relației (18):

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)^2 + 2\alpha\beta \int \frac{1}{1+\beta\zeta} d\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right) - \zeta^2 - \right.$$

$$\left. - \int \left[\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)^2 + \frac{2\alpha}{1+\beta\zeta} \frac{d\zeta}{d\tau} + \frac{\alpha^2}{(1+\beta\zeta)^2} \right] d\zeta \right\} d\tau = 0. \tag{22}$$

6. VERIFICĂRI ALE RELAȚIEI (22)

Valabilitatea relației (22), obținută pe baza unor considerente fizice poate fi verificată matematic pe două căi.

O primă cale constă în scrierea ecuației diferențiale Euler [19] pe care trebuie să o verifice funcția extremală a unei funcționale.

Se obține ecuația

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)^2 + \zeta + \frac{\alpha}{1+\beta\zeta}\left[1 - \frac{\beta}{1+\beta\zeta}\right]\frac{d\zeta}{d\tau} + \frac{\alpha^2}{2(1+\beta\zeta)^2} = 0. \tag{23}$$

Această ecuație este chiar transcrierea în variabile relative a cunoscutei ecuații [20], [21] care se obține prin utilizarea metodei clasice bazată pe ecuația lui Bernoulli.

O a doua cale constă în utilizarea teoremei lui Langenbach [11] care, în anumite ipoteze restrictive referitoare la anumite proprietăți pe care trebuie să le aibă operatorul diferențial în clasa funcțiilor admise și condițiile la limită, dă o metodă de construire a funcționalei plecînd de la ecuația diferențială. Plecînd deci de la ecuația (23) care se notează pe scurt cu ajutorul operatorului diferențial P:

$$P\zeta = 0, \tag{24}$$

teorema lui Langenbach dă funcționala căutată sub forma unui produs scalar într-un spațiu Hilbert al funcțiilor admise H:

$$F(\zeta) = < P(t\zeta),\ \zeta >_H . \tag{25}$$

Considerînd produsul scalar obișnuit din spațiul Hilbert al funcțiilor de pătrat sumabil L_2 definite pe intervalul [0, 1] se obține

$$F(\zeta) = \int_0^1 \zeta P(t\zeta)\, dt. \tag{26}$$

Efectuînd calculele cerute de relația (26) se obține tocmai funcționala din (22), ceea ce confirmă valabilitatea relației obținute.

7. CONCLUZII

În lucrare se obține, plecînd de la principiul lui Hamilton, ecuația diferențială a oscilațiilor în masă care apar în sistemul galerie de aducțiune-castel de echilibru la schimbarea puterii centralei hidroelectrice.

Se poate transforma pe această cale problema rezolvării ecuației diferențiale în problema echivalentă a determinării unei funcții care satisface condiția de staționaritate a unei integrale. Se folosește un sistem de mărimi relative rațional, care conduce la un număr minim de parametrii adimensionali. Rezultatele obținute se verifică atît cu ajutorul ecuației diferențiale a lui Euler, cît și cu ajutorul teoremei lui Langenbach, verificarea constînd în identificarea cu ecuația oscilațiilor obținută în teoria hidraulică clasică bazată pe ecuația lui Bernoulli.

Primită la redacție la 21 mai 1971

BIBLIOGRAFIE

1. J. Serrin, *Mathematical principles of classical fluid mechanics*, Handbuch der physik, Berlin—Götingen—Heidelberg 1959.
2. W. B. Langbein, *Geometry of river channels*, Proc. ASCE, vol. 90, No. Hy 2, march 1964, part. 1.

3. S. HÎNCU, *Le principe de la variation minime de l'énergie spécifique de la section, appliqué au mouvement des liquides à surface libre dans des canaux ayant une striction locale*, Compte Rendus du Séauces hebdomonaire de l'Académie des Sciences, Paris 1964.
4. S. HÎNCU, *Utilisation des principes variationnels à l'étude des processus des lits de rivière*, Buletinul ştiinţific al Institutului de construcţii, Bucureşti, *4* (1971).
5. M. ARSENIE, D. ARSENIE, *Consideraţii variaţionale asupra pierderilor de energie în curgere liniară a lichidelor newtoniene în conducte rectilinii de secţiune circulară*, St. cerc. mec. apl., **27**, *4* (1968).
6. M. ARSENIE, D. ARSENIE, *O propunere privind lungimea de amestec din teoria lui L. Prandtl pentru cazul curgerii turbulente în canale şi conducte avînd la bază un principiu variaţional*, St. cerc. mec. apl., **28**, *3* (1969).
7. A. LANGENBACH, *Variationsmethoden in der nichtlinearen Elastizitäts und Plastizitätstheorie*, Wiss Z. Humboldt Univ. Berlin, Math.-Nat. R, **IX**, (1959/1960).
8. S. G. MIHLIN, *Realizarea numerică a metodelor variaţionale*, (în limba rusă), Izdat. Nauka, Moskva, 1966.
9. J. G. MINTY, *Monotone* (non linear) *operators in Hilbert spaces*, Duke Math J., *29* (1962).
10. M. M. VAINBERG, *Metode variaţionale în studiul operatorilor neliniari* (în limba rusă).
11. G. DINCĂ, *Operatori monotoni în teoria plasticităţii*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1972; Izd. teh-teor. literat., Moskva, 1956.
12. O. ONICESCU, *Mecanica*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1969.
13. T. OROVEANU, *Mecanica fluidelor viscoase*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1967.
14. N. TEODORESCU, V. OLARU, *Ecuaţiile fizicii matematice*, Bucureşti, Edit. didactică şi pedagogică, 1970.
15. L. ESCANDE, *Méthodes nouvelles pour le calcul des cheminées d'équilibre*, Paris, Edit. Dunod, 1950.
16. M. POPESCU, *Probleme actuale în domeniul hidraulicii castelelor de echilibru*, Edit. I.S.C.H., Studii de hidraulică XXI, Bucureşti, 1969.
17. M. POPESCU, *Metode noi pentru calculul hidraulic al castelelor de echilibru*, Edit. ISCIFGA, Studii de hidraulică XXIII, Bucureşti, 1970.
18. D. ARSENIE, *O formă raţională a ecuaţiei oscilaţiilor nivelului de apă în castele de echilibru simple şi unele concluzii ce rezultă din aceasta*, Hidrotehnica, *11* (1971).
19. M. A. LAVRENTIEV, L. A. LIUSTERNIK, *Curs de calcul variaţional*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1955.
20. Ch. JÄGER, *Hydraulique technique*, Paris, Edit. Dunod, 1963.
21. ARONOVICI G., KARTVELIŞVILI N., LIUBIMŢEV K., *Berbecul hidraulic şi castele de echilibru* (în limba rusă), Moskva, 1968.
22. C. IACOB, *Mecanica teoretică*, Bucureşti, Edit. didactică şi pedagogică, 1971.

ASUPRA STABILITĂȚII MIȘCĂRII NESTAȚIONARE A AUTOMOBILULUI

de A.P. STOICESCU
Institutul politehnic București

În lucrare se studiază stabilitatea mișcării nestaționare a automobilului, prin construirea unor funcții Leapunov adecvate. Se arată că atunci cînd coeficienții de rezistență la deviere ai pneurilor sînt constanți, iar efectele aerodinamice se neglijează, mișcarea de bază în regim nestaționar a automobilului este uniform asimptotic stabilă pentru viteze la care mișcarea este stabilă în regim staționar.

Deși mișcarea în regim nestaționar este foarte frecventă, stabilitatea automobilului în asemenea condiții a fost foarte puțin cercetată în literatura de specialitate. Singura lucrare în care se abordează această problemă sub o formă generală este cea a lui V. K. Gomonov [2]. Însă metoda utilizată în lucrarea menționată este complicată și, în plus, nu permite să se tragă concluzii cu un caracter mai general.

În lucrarea de față se studiază stabilitatea mișcării nestaționare printr-o metodă adecvată relativ simplă, care permite să se tragă concluzii mult mai generale cu privire la stabilitatea acestui tip de mișcare. Se va considera modelul matematic al automobilului fără mișcarea de ruliu și se va presupune că mecanismul de direcție este foarte rigid.

Notațiile principale sînt următoarele:

a — distanța de la centrul de greutate pînă la planul vertical ce trece prin axa punții din față, m;

b — distanța de la centrul de greutate pînă la planul vertical ce trece prin axa punții din spate, m;

L — ampatamentul, m;

v — viteza centrului de greutate, $m.s^{-1}$;

v_{cr} — viteza critică, $m.s^{-1}$;

m — masa automobilului, $kgf.m^{-1}.s^2$;

G — greutatea automobilului, kgf;

I_z — momentul de inerție al automobilului în raport cu axa ce trece prin centrul de grutate și este normală la cale, $kgf.m.s^2$;

α — unghiul dintre v și axa longitudinală a automobilului, rad;
ω — viteza unghiulară a automobilului, rad.s^{-1};
C_1C_2 — coeficientul de rezistență la deviere al punții din față, respectiv al punții din spate, kgf.rad^{-1};
t — timpul, s;
Δ — creșterea mărimii postpuse.

1. ECUAȚIILE MIȘCĂRII PERTURBATE ÎN REGIMUL DE BAZĂ NESTAȚIONAR

În [15] s-au dedus ecuațiile de mișcare în regim nestaționar considerînd un model matematic al automobilului foarte complet. Prin particularizare se obțin și ecuațiile de mișcare ale modelului folosit în această lucrare. În total sînt cinci ecuații : trei ecuații pentru forțe și două ecuații pentru momente. Se ține seamă că ecuația de momente în jurul axei longitudinale a automobilului este de prisos, deoarece, potrivit modelului adoptat, se neglijează variația reacțiunilor verticale la roți provocată de forța centrifugă.

În total sînt cinci necunoscute : v, α, ω și reacțiunile normale la cele două punți. Deci problema este în principiu solubilă.

Plecînd de la ecuațiile de mișcare se obțin fără dificultate ecuațiile în perturbații. În general, coeficienții de rezistență la deviere sînt dependenți de reacțiunile normale și de cele tangențiale la pneuri.

În continuare se presupune că pneurile lucrează pe porțiunea liniară a caracteristicii lor de deviere.

Din analiza ecuațiilor în perturbații [15] rezultă :

— dacă mișcarea de bază se face după o traiectorie curbă, toate cele cinci ecuații sînt dependente ;

— dacă mișcarea de bază este rectilinie (se presupune absența vîntului) ecuația de momente în jurul axei verticale precum și ecuația de forțe de-a lungul axei orizontale și normale la axa longitudinală a automobilului nu conțin nici $\Delta\dot{v}$ și Δv și nici perturbațiile reacțiunilor normale la punți. Deci cele două ecuații sînt independente de celelalte și se pot studia separat, ceea ce constituie o ușurare însemnată ;

— în cazul cînd coeficienții de rezistență la deviere sînt constanți, iar mișcarea de bază este curbilinie, trei ecuații de mișcare care nu conțin perturbațiile reacțiunilor normale la punți, vor fi independente de celelalte două. În schimb, spre deosebire de situația precedentă, variabilele $\Delta\dot{v}$ și Δv apar în toate cele trei ecuații.

În lucrările de stabilitate a automobilului, cu excepția lucrării [3], perturbațiile vitezei nu sînt considerate și, deci, nici ecuația forțelor în proiecție de-a lungul axei longitudinale a automobilului. Justificarea care se dă uneori este aceea că pentru stabilitate au importanță mărimile care determină deplasarea laterală și nu variația vitezei. Acest lucru este adevărat, dar numai în măsura în care perturbațiile vitezei nu influențează celelalte mărimi. Or, o asemenea situație nu are loc decît la mersul în linie dreaptă.

Observații similare se pot face și în privința perturbațiilor sarcinilor verticale.

Pentru a înlătura dezavantajele studiului sistemului care conține pe $\Delta\dot{v}$ și Δv, în [3] viteza este considerată o variabilă controlată. În felul acesta se studiază numai sistemul auxiliar [4], [5].

Totuși, este de observat că nu întotdeauna viteza poate fi considerată ca o variabilă controlată. Dacă la regimul uniform sau la demaraje ușoare aceasta este posibil, în cazul unor frînări puternice este puțin probabil — dat fiind timpul scurt la dispoziția șoferului — ca acest lucru să se realizeze.

În studiul stabilității avionului [4], în asemenea situații, unii autori consideră că perturbațiile vitezei sînt mici și se produc într-un timp mai lung în comparație cu perturbațiile celorlalte mărimi, din cauza inerției mari a aparatului. Astfel se pot studia ecuațiile respective fără perturbațiile de viteză.

În cele ce urmează se va considera mișcarea de bază rectilinie. Pentru unghiuri mici de virare se poate considera că termenii care apar în plus datorită lui $\Delta\dot{v}$ și Δv sînt niște perturbații permanente. Aplicînd o teoremă cunoscută [10] rezultă că dacă mișcarea este stabilă la mersul rectiliniu, ea va fi stabilă și la mersul în curbe cu raze mari de curbură.

Pentru aducerea ecuațiilor în perturbații la forma finală nu se va ține seamă de efectele aerodinamice laterale și se admite că C_i sînt constanți.

De asemenea, se face schimbarea de variabile

$$v_y = v\,\alpha.$$

Schimbarea este utilă întrucît astfel ecuațiile nu mai conțin pe $\dot{v}$, ceea ce ușurează studiul funcției lui Leapunov. Se observă că v_y reprezintă proiecția vitezei centrului de greutate pe normala (din planul orizontal) la axa longitudinală a automobilului.

Ecuațiile mișcării nestaționare în perturbații, în forma finală, se scriu :

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\omega} &= a_{11}\Delta\omega + a_{12}\Delta v_y, \\ \Delta\dot{v}_y &= a_{21}\Delta\omega + a_{22}\Delta v_y, \end{aligned} \tag{1}$$

în care

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{C_1a^2 + C_2b^2}{vI_z}, & a_{12} &= -\frac{aC_1 - bC_2}{vI_z}, \\ a_{21} &= -\left(v + \frac{C_1a - C_2b}{mv}\right), & a_{22} &= -\frac{C_1 + C_2}{mv}. \end{aligned} \tag{2}$$

De altfel, ecuațiile de mai sus sînt identice cu cele folosite în [3].

2. DETERMINAREA FUNCȚIEI LEAPUNOV ȘI STUDIUL STABILITĂȚII MIȘCĂRII NESTAȚIONARE

Sistemul în primă aproximație al mișcării de bază nestaționare perturbate este un sistem liniar cu coeficienți variabili. Dacă viteza ar fi constantă, studiul stabilității sistemului s-ar putea efectua fără nici un fel de dificultate.

Cînd coeficienții sînt variabili problema este mai dificilă, ea constînd în construirea unei funcții Leapunov adecvate. Este ceea ce se și face în continuare.

2.1. Cazul cînd $aC_1 - bC_2 > 0$

Se consideră următoarea formă pătratică:

$$W_1 = \rho_1 \Delta\omega^2 + \Delta v_y^2, \tag{3}$$

în care

$$\rho_1 = \frac{a_{21}}{a_{12}}.$$

Derivata formei patratice în raport cu timpul în virtutea sistemului (1) se scrie

$$\left(\frac{dW_1}{dt}\right)_1 = \frac{\partial W_1}{\partial t} + \frac{\partial W_1}{\partial \Delta\omega} \cdot \Delta\dot{\omega} + \frac{\partial W_1}{\partial \Delta v_y} \cdot \Delta\dot{v}_y$$

sau încă

$$\left(\frac{dW_1}{dt}\right)_1 = \dot{\rho}_1 \Delta\omega^2 + 2\rho_1 \Delta\omega(a_{11}\Delta\omega + a_{12}\Delta v_y) + 2\Delta v_y\,(a_{21}\Delta\omega + a_{22}\Delta v_y).$$

Rezultă

$$0{,}5\left(\frac{dW_1}{dt}\right)_1 = \left(\frac{\dot{\rho}_1}{2} + \rho_1 a_{11}\right)\Delta\omega^2 + (\rho_1 a_{12} + a_{21})\Delta\omega\Delta v_y + a_{22}\Delta v_y^2. \tag{4}$$

Se observă că expresia de mai sus constituie o formă pătratică a cărei matrice se scrie astfel:

$$M_{W_1} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\dot{\rho}_1}{2} + \rho_1 a_{11} & \dfrac{\rho_1 a_{12} + a_{21}}{2} \\ \dfrac{\rho_1 a_{12} + a_{21}}{2} & a_{22} \end{Vmatrix}.$$

Condițiile necesare și suficiente ca o formă pătratică să fie negativ sau pozitiv definită sînt date de teorema lui Sylvester [2]. În cazul de față se caută condițiile în care forma pătratică (4) este *negativ definită*. Prin urmare, conform teoremei lui Sylvester, trebuie să fie satisfăcută următoarele inegalități :

$$0{,}5\ \dot{\rho}_1 + \rho_1 a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} 0{,}5\ \dot{\rho}_1 + \rho_1 a_{11} & \dfrac{\rho_1 a_{12} + a_{21}}{2} \\ \dfrac{\rho_1 a_{12} + a_{21}}{2} & a_{22} \end{vmatrix} > 0.$$

Dacă se dezvoltă determinantul de mai sus și se ține seamă de expresia lui ρ_1, rezultă

$$\begin{aligned} &0{,}5\ \dot{\rho}_1 + \rho_1 a_{11} < 0, \\ &0{,}5\ \dot{\rho}_1 a_{22} + \rho_1 (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) > 0. \end{aligned} \tag{5}$$

De asemenea, se obțin expresiile

$$\rho_1 = \frac{I_z}{m}\left(1 + \frac{mv^2}{aC_1 - bC_2}\right), \qquad \dot{\rho}_1 = \frac{2I_z v\dot{v}}{aC_1 - bC_2}. \tag{6}$$

Ținînd seamă de (2) și de (6), condițiile lui Sylvester se scriu sub forma :

$$\begin{aligned} &mI_z v^2 \dot{v} - (aC_1 - bC_2 + mv^2)(C_1 a^2 + C_2 b^2) < 0, \\ &-\dot{v}(C_1 + C_2) + (aC_1 - bC_2 + mv^2)(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) > 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Se vor studia amănunțit inegalitățile (7). Prima inegalitate se mai scrie

$$mI_z v^2 \dot{v} - mv^2 (C_1 a^2 + C_2 b^2) - (aC_1 - bC_2)(C_1 a^2 + C_2 b^2) < 0. \tag{8}$$

Cele două variabile care apar în inegalitatea de mai sus sînt v și $\dot{v}$. Fie ecuația în cele două variabile amintite :

$$mI_z v^2 \dot{v} - mv^2 (C_1 a^2 + C_2 b^2) - (aC_1 - bC_2)(C_1 a^2 + C_2 b^2) = 0. \tag{9}$$

Se observă că sînt satisfăcute egalitățile

$$\lim_{v \to \pm\infty} \dot{v} = \frac{C_1 a^2 + C_2 b^2}{I_z}, \qquad \lim_{v \to 0} \dot{v} \to \infty.$$

Prin urmare curba reprezentată de ecuația (9) are două asimptote: una paralelă cu axa absciselor și cealaltă chiar axa ordonatelor. În figura 1 s-a reprezentat curba dată de ecuație (9). Ea este simetrică în raport cu axa ordonatelor, dar pe figură nu s-a mai trasat decît o ramură întrucît nu prezintă interes domeniul în care $v < 0$.

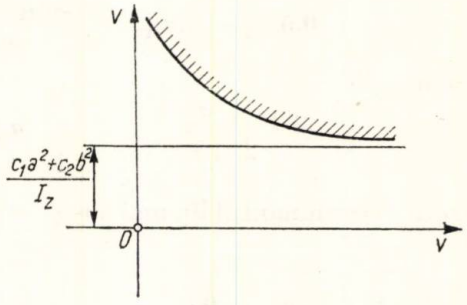


Fig. 1

Se verifică ușor că, întrucît $aC_1 - bC_2 > 0$, curba nu intersectează axa absciselor și că $\frac{d^2\dot{v}}{dv^2} > 0$.

Inegalitatea (8) este satisfăcută în domeniul limitat de curba de mai sus și care, pe figura 1, este *nehașurat*.

În urma unor grupări de termeni și de transformări convenabile, inegalitatea a doua din (7) se aduce la forma

$$-m^2(aC_1 - bC_2)v^4 + m[L^2C_1C_2 - (aC_1 - bC_2)^2]\,v^2 + L^2C_1C_2(aC_1 - bC_2) -$$

$$-(C_1 + C_2)mI_z \times \dot{v}v^2 > 0. \qquad (10)$$

Ca și în cazul precedent, se studiază ecuația obținută din anularea primului membru al inegalității de mai sus și se reprezintă grafic. Drept variabile sînt adoptate v^2 și $\dot{v}$.

Rezultă

$$\lim_{v^2\to\infty} \frac{\dot{v}}{v^2} = -\frac{(aC_1 - bC_2)\cdot m}{(C_1 + C_2)I_z}, \quad \dot{v} = 0 \text{ pentru } v^2 = -v_1^2 \text{ și } v^2 = -v_{cr}^2,$$

unde v_1 este o anumită viteză care se poate determina.

Curba reprezentată de ecuația respectivă este o hiperbolă ale cărei asimptote sînt: axa absciselor și o dreaptă ce trece prin origine, cu coeficient unghiular negativ. În figura 2 s-a reprezentat numai ramura hiperbolei corespunzătoare valorilor pozitive ale lui v^2.

Inegalitatea (10) este îndeplinită pentru valori ale vitezei și accelerației din domeniul limitat de curba de mai sus și care, pe figura 2, este *nehașurat*.

Din figura 2 rezultă că pentru $v < v_{cr}$, oricare ar fi $\dot{v} < 0$, inegalitatea (10) este satisfăcută. Pentru valori pozitive ale lui $\dot{v}$ trebuie verificat dacă acceleraţiile pentru diferite viteze se găsesc în domeniul nehaşurat. Se remarcă însă că în apropierea vitezei critice curba are o pantă foarte mare, astfel că pentru o viteză ce diferă foarte puţin de viteza critică se atinge deja o acceleraţie de 1,0 m/s^2.

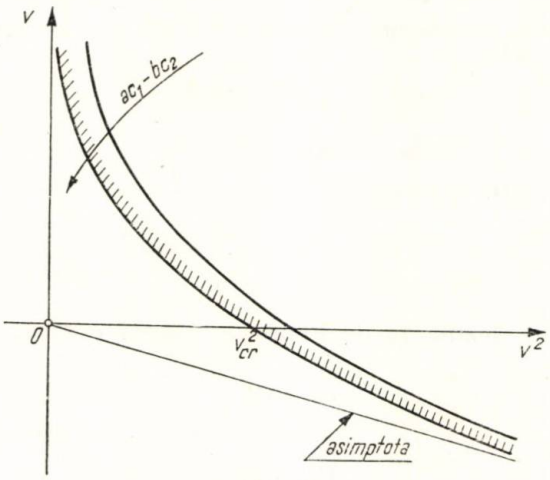


Fig. 2

Prin urmare, pentru verificare nu este necesar să se traseze nici curba de mai sus şi nici cea a acceleraţiilor automobilului respectiv, ci să se calculeze viteza la care se obţine o anumită acceleraţie maximă (pe curba din fig. 2). Numai în cazul cînd viteza aceasta ar fi mult diferită de viteza critică trebuie să se reprezinte integral ambele curbe.

Pentru a evita calculele mai complicate se va indica o metodă de a aprecia rapid viteza la care se realizează o anumită acceleraţie. Ea se exprimă prin abaterea relativă faţă de viteza critică.

Se notează

$$m^2(aC_1 - bC_2) = p,\ m[L^2C_1C_2 - (aC_1 - bC_2)^2] = q_0,$$

$$L^2C_1C_2(aC_1 - bC_2) = S.$$

Ecuaţia

$$-pv^4 + q_0v^2 + S = 0$$

are una din soluţii chiar viteza critică, care se calculează după metodele cunoscute şi are expresia

$$v_{cr} = \sqrt{\frac{L^2C_1C_2}{m(aC_1 - bC_2)}}.$$

Dacă în ecuația precedentă în v^2 se înlocuiește q_0 cu o mărime variabilă q, se obține

$$q = \frac{pv^4 - S}{v^2}.$$

Prin diferențierea expresiei precedente, împărțirea rezultatului obținut la expresia însăși, membru cu membru și apoi, prin trecerea la creșteri finite, rezultă

$$\frac{\Delta q}{q_0} = 2\frac{pv^4 + S}{pv^4 - S} \cdot \frac{\Delta v}{v}.$$

Examinînd (10) se vede că

$$\Delta q \simeq -(C_1 + C_2)\, mI_z\dot{v}, \qquad \frac{\Delta q}{q_0} \simeq -\frac{(C_1 - C_2)I_z\dot{v}}{L^2C_1C_2}.$$

Dacă se ține seama și de expresia vitezei critice, rezultă

$$\frac{\Delta v}{v_{cr}} \simeq -0{,}5\,\frac{v_{cr}^2 - \dfrac{aC_1 - bC_2}{m}}{v_{cr}^2 + \dfrac{aC_1 - bC_2}{m}} \cdot \frac{(C_1 + C_2)\, I_z\dot{v}}{L^2C_1C_2}. \tag{11}$$

Pentru exemplificare se consideră întîi un autoturism cu următoarele caracteristici :

$$m = 163 \text{ kgf} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^2;\ I_z = 250 \text{ kgf} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2;\ C_1 = C_2 = 3500 \text{ kgf} \cdot \text{rad}^{-1};$$

$$L = 2{,}7 \text{ m}.$$

La început se consideră o supravirare care poate fi întîlnită în cazul autoturismelor, alegîndu-se $a = 0{,}55\ L$, $b = 0{,}45\ L$.

Se obține : $aC_1 - bC_2 = 950 \text{ kgf} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$, $v_{cr} = 24{,}4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Luînd $v = 1{,}0 \text{ m.s}^{-2}$, rezultă

$$\frac{\Delta v}{v_{cr}} \simeq -0{,}95\%$$

Prin urmare viteza la care accelerația are valoarea de $1{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ este practic egală cu viteza critică.

Se face acum exemplificarea și pentru autocamioane. Pentru aceasta se consideră două tipuri de autocamioane cu distribuția sarcinilor pe osii puțin diferită. Autocamionul A_1 are următoarele caracteristici :

— complet încărcat, $G = 8325$ kgf ; $a = 0{,}740\ L$; $b = 0{,}26\ L$; $L = 4{,}00$ m,

— complet descărcat, $G = 4100$ kgf ; $a = 0{,}54\ L$; $b = 0{,}46\ L$.

Autocamionul A_2 are următoarele caracteristici :

— complet încărcat, $G = 8495$ kgf ; $a = 0{,}70\ L$; $b = 0{,}30\ L$; $L = 3{,}70$ m,

— complet descărcat, $G = 4270$ kgf ; $a = 0{,}50\ L$; $b = 0{,}50\ L$.

Momentul de inerţie se calculează cu formula aproximativă $I_z = mab$. Se presupune că ambele autocamioane sînt echipate cu pneuri identice avînd dimensiunile 9,00—20. Caracteristicile la deviere ale pneurilor au fost luate din [1], prin asimilare cu pneurile 9,00—20 eHD. La calculul coeficientului de rezistenţă la deviere s-a ţinut seamă de sarcina verticală statică pe pneu în cele două situaţii de încărcare. De asemenea, coeficientul de rezistenţă la deviere al pneurilor jumelate este considerat ca fiind dublul coeficientului de rezistenţă la deviere al unui singur pneu. S-au obţinut astfel următoarele valori :

— încărcat : $C_1 = 18{,}54 \cdot 10^3$ kgf.rad^{-1}, $C_2 = 50 \cdot 10^2$ kgf.rad^{-1},

pentru A_1 :

— descărcat : $C_1 = 17{,}10 \cdot 10^3$ kgf.rad^{-1}, $C_2 = 24{,}28 \cdot 10^3$ kgf.rad^{-1};

— încărcat : $C_1 = 20{,}8 \cdot 10^3$ kgf.rad^{-1}, $C_2 = 47{,}5 \cdot 10^3$ kgf.rad^{-1},

pentru A_2 :

— descărcat : $C_1 = 18{,}6 \cdot 10^3$ kgf.rad^{-1}, $C_2 = 22{,}88 \cdot 10^3$ kgf.rad^{-1}.

La ambele tipuri de autocamioane se constată că în starea complet încărcat există supravirare şi că în stare complet descărcat există subvirare.

În urma efectuării calculelor se obţine :

pentru A_1 :

$$aC_1 - bC_2 = 3000 \text{ kgf.m.rad}^{-1}\ ;\ v_{cr} = 76 \text{m.s}^{-1}\ ;\ \frac{\Delta v}{v_{cr}}\,\% = -\,2{,}90\%,$$

pentru A_2 :

$$aC_1 - bC_2 = 3420 \text{ kgf.m.rad}^{-1}\ ;\ v_{cr} = 67{,}5 \text{m.s}^{-1}\ ;\ \frac{\Delta v}{v_{cr}}\,\% = -\,2{,}77\%.$$

La calculul variaţiei de viteză s-a luat $\dot{v} = 1{,}0$ m.s^{-2}.

Aşa cum se observă, variaţia de viteză este şi mai mică decît în cazul autoturismelor.

Din formula (11), după o serie de transformări se ajunge la o altă expresie :

$$\Delta v \simeq -\,0{,}5\ v_{cr}\ \frac{(C_1 + C_2)m\,I_z\dot{v}}{L^2 C_1 C_2}. \qquad (12)$$

Prin urmare, din formula de mai sus se deduce ca variaţiile de viteză cresc cu viteza critică, ceea ce este în concordanţă cu afirmaţia în legătură cu panta curbei. Dacă se consideră o viteză critică la limita vitezelor maxime

ale unui autoturism de sport, $V_{cr} = 250$ km.h^{-1}, obținută prin modificarea lui a și b din exemplul precedent, ar rezulta

$$\Delta v \simeq -0{,}706 \text{ m.s}^{-1}.$$

Din cele de mai sus se poate trage concluzia că, din punct de vedere practic, pentru viteze mai mici decît viteza critică, inegalitatea (10) este satisfăcută oricare ar fi accelerația sau decelerația automobilului.

În privința inegalității (8), se va verifica în primul rînd poziția asimptotei din figura 1. Calculîndu-se ordonata asimptotei pentru cele trei exemple de bază precedente, rezultă, respectiv, valorile : 51,2 m.s^{-2}, 82,5 m.s^{-2} și 79,4 m.s^{-2}. Prin urmare asimptotă este cu mult deasupra domeniului accelerațiilor posibile ale automobilului. Calculele efectuate și pentru alte cazuri indică aceleași ordine de mărime ca mai sus.

Deci și inegalitatea (8) este îndeplinită oricare ar fi accelerațiile și decelerațiile automobilului.

Întrucît $aC_1 - bC_2 > 0$ rezultă că $\rho_1 > 0$ oricare ar fi regimul de mișcare ale automobilului. Deci W_1 este o formă pătratică pozitiv definită și, implicit, o funcție pozitiv definită.

Analizîndu-se sistemul (1) se observă că pentru $v = 0$ coeficienții săi ar fi infiniți. Pentru a evita acest lucru, se vor considera vitezele ca fiind mai mari decît o anumită valoare arbitrar de mică. Limitarea aceasta nu impietează asupra rezultatelor, întrucît la viteze mici stabilitatea are o mică importanță. De asemenea, pentru orice automobil există o anumită viteză maximă v_{max}. Dacă se notează cu v_ε valoarea arbitrar de mică (dar finită) a vitezei, se poate scrie

$$\frac{I_z}{m}\left(1 + \frac{mv^2}{aC_1 - bC_2}\right)\Delta\omega^2 + \Delta v_y^2 \leqslant W_1 \leqslant \frac{I_z}{m}\left(1 + \frac{mv_{max}^2}{aC_1 - bC_2}\right)\Delta\omega^2 + \Delta v_y^2.$$

Cu alte cuvinte funcția W_1 este pozitiv definită și admite limită superioară infinit mică.

Pe de altă parte, derivata funcției W_1 în virtutea sistemului (1) este negativ definită în condițiile care s-au arătat mai înainte.

Pe baza teoremei lui Leapunov [9] și a analizei efectuate se poate afirma că, *pentru viteze mai mici decît viteza critică, mișcarea de bază în regim nestaționar a automobilului este uniform asimptotic stabilă, oricare ar fi accelerația sau decelerația sa.*

2.2. Cazul cînd $aC_1 - bC_2 < 0$

Se consideră următoarea formă pătratică :

$$W_2 = \rho_2 \Delta\omega^2 + \Delta v_y^2, \tag{13}$$

în care

$$\rho_2 = -\frac{a_{21}}{a_{12}}.$$

Derivata formei pătratice în raport cu timpul în virtutea sistemului (1) se scrie

$$0{,}5\left(\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}t}\right)_1 = \left(\frac{\dot{\rho}_2}{2} + \rho_2 a_{11}\right)\Delta\omega^2 + a_{22}\Delta v_y^2. \tag{14}$$

În continuare se caută condițiile ca forma pătratică (14) să fie negativ definită. Evident, aceste condiții sînt:

$$\frac{\dot{\rho}_2}{2} + \rho_2 a_{11} < 0, \qquad a_{22} < 0.$$

Condiția a doua este îndeplinită întotdeauna, așa cum se observă din (2). Rămîne să se examineze prima inegalitate care se mai scrie

$$-\frac{I_z v\dot{v}}{aC_1 - bC_2} + \frac{I_z}{m}\left(1 + \frac{m\dot{v}}{aC_1 - bC_2}\right)\frac{C_1a^2 + C_2b^2}{vI_z} < 0.$$

Dacă se ține seamă că $aC_1 - bC_2 < 0$, rezultă

$$mI_z v^2\dot{v} - mv^2(C_1a^2 + C_2b^2) - (aC_1 - bC_2)\,(C_1a^2 + C_2b^2) < 0. \tag{15}$$

Se remarcă că inegalitatea (15) este identică cu inegalitatea (8). Pentru studiul ei se procedează întocmai ca și pentru cealaltă. Aici, întrucît $aC_1 - bC_2 < 0$, apar două diferențe. Curba va intersecta axa absciselor în două puncte simetrice față de origine, ale căror abscise sînt date de expresia

$$v_0 = \pm\sqrt{-\frac{aC_1 - bC_2}{m}}. \tag{16}$$

A doua deosebire constă în faptul că $\dfrac{\mathrm{d}^2\dot{v}}{\mathrm{d}v^2} < 0$.

În figura 3 este reprezentată curba corespunzătoare ecuației ce se obține din egalarea cu zero a primului membru al inegalității (15). Întrucît nu prezintă interes decît domeniul cu $v > 0$, s-a reprezentat o singură ramură a curbei.

Inegalitatea (15) este satisfăcută pentru viteze și accelerații ce se găsesc în domeniul limitat de curba respectivă și care, pe figura 3, este nehașurat.

Se observă că pentru viteze mai mari ca v_0 inegalitatea este satisfăcută oricare ar fi decelerația. În schimb, pentru viteze mai mici decît v_0 inegalitatea nu este satisfăcută oricare ar fi acceleraţia. Prin urmare, este necesar să se aprecieze această viteză, care este cu atît mai mare cu cît subvirarea este mai mare.

Se consideră un autoturism cu aceleaşi date ca şi în cazul precedent, cu deosebirea că acum prezintă o subvirare foarte accentuată (puţin probabil să fie întîlnită), realizată prin modificarea poziţiei centrului de greutate : $a = 0{,}4\ L$, $b = 0{,}6\ L$.

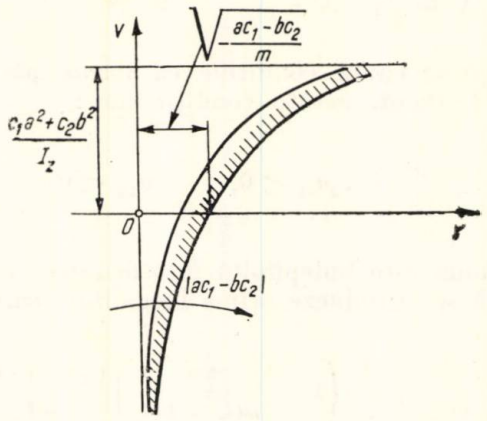


Fig. 3

Efectuînd calculele rezultă $v_0 = 3{,}4\ \text{m.s}^{-1}$, $V_0 = 12{,}3\ \text{km.}h^{-1}$. La autocamioanele din exemplul precedent, pentru cazul cînd sînt complet descărcate, rezultă în ordine vitezele de 16,4 km.h^{-1} şi 13,3 km.h^{-1}. Vitezele rezultate au valori destul de mici şi, din punctul de vedere al stabilităţii automobilului, nu prezintă importanţă. Dacă se calculează ordonate asimptotei la curbă exact ca şi în cazul precedent se obţin valori care depăşesc 50 m.s^{-2}. Deci panta curbelor în apropierea lui v_0 este destul de mare, astfel încît este suficient să se calculeze viteza la care se obţine pe curba respectivă o anumită acceleraţie.

Astfel, vitezele la care se realizează acceleraţia de 10 m.s^{-2} sînt, pentru cele trei cazuri studiate, respectiv : 14 km.h^{-1}, 17,4 km.h^{-1} şi 14 km.h^{-1}.

În concluzie, vitezele de la care este satisfăcută inegalitatea (15) pentru orice valoare a acceleraţiei sînt mici şi nu prezintă importanţă din punctul de vedere al stabilităţii automobilului.

Potrivit definiţiei se obţine

$$\rho_2 = -\frac{I_z}{m}\left(1 + \frac{mv^2}{aC_1 - bC_2}\right).$$

Deci $\rho_2 > 0$ pentru $v > v_0$. Adică forma pătratică W_2 este pozitivă dacă $v > v_0$. Procedîndu-se apoi la fel ca în cazul precedent se constată că W_2 admite limită superioară infinit mică. Prin urmare, potrivit teoremei Leapunov şi pe baza analizei efectuate se poate afirma că *mişcarea de bază în regim nestaţionar a automobilului cu subvirare este uniform asimptotic stabilă pentru viteze mai mari ca v_0, oricare ar fi acceleraţia sau deceleraţia sa.*

2.3. Cazul cînd $aC_1 - bC_2 = 0$

Pînă acum s-au considerat cele două cazuri: $aC_1 - bC_2 > 0$ şi $aC_1 - bC_2 < 0$. Se observă că dacă $hC_1 - bC_2 = 0$, atunci ρ_1 şi ρ_2 devin infinite. Deci, în această situaţie nu mai pot fi utilizate formele pătratice sub această formă. De asemenea, din analizele efectuate rezultă că pentru valori foarte mici ale subvirării sau supravirării (dat nu nule), concluziile trase îşi păstrează valabilitatea. Pentru mai multă rigurozitate se examinează şi cazul virării neutre, deci cînd $aC_1 - bC_2 = 0$.

În acest caz sistemul în perturbaţii ia forma

$$\Delta\dot{\omega} = a_{11}\,\Delta\omega, \tag{17}$$

$$\Delta\dot{v}_y = -v\Delta\omega + a_{22}\Delta v_y.$$

Se alege următoarea formă pătratică

$$W_3 = v^l\Delta\omega^2 + \Delta v_y^2, \tag{18}$$

unde l este un număr pozitiv.

Derivata funcţiei W_3 în raport cu timpul în virtutea sistemului (1) este

$$\left(\frac{dW_3}{dt}\right)_1 = l\,v^{l-1}\cdot\dot{v}\,\Delta\omega^2 + 2v^l a_{11}\Delta\omega^2 + 2\Delta v_y\,(-v\Delta\omega + a_{22}\Delta v_y)$$

sau încă

$$0{,}5\left(\frac{dW_3}{dt}\right)_1 = (0{,}5\,l\,v^{l-1}\cdot\dot{v} + v^l a_{11})\,\Delta\omega^2 - v\Delta\omega\Delta v_y + a_{22}\Delta v_y^2. \tag{19}$$

Matricea formei pătratice (19) este

$$M_{W_3} = \begin{Vmatrix} 0{,}5\,v^{l-1}\cdot\dot{v} + v^l a_{11} & -\dfrac{v}{2} \\ -\dfrac{v}{2} & a_{22} \end{Vmatrix}.$$

Condiţiile necesare şi suficiente ca forma pătratică (19) să fie negativ definită sînt:

$$v^l a_{11} + 0{,}5\,l\,v^{l-1}\cdot\dot{v} < 0,\quad a_{22}\,(0{,}5\,l\,v^{l-1}\cdot\dot{v} + v^l a_{11}) - \frac{v^2}{4} > 0.$$

Dacă se ţine seamă de expresiile coeficienţilor date de (2), cele două inegalităţi devin

$$-\frac{C_1a^2 + C_2b^2}{I_z} + 0{,}5\, l\, \dot{v} < 0, \tag{20}$$

$$v^{l-4} \cdot \frac{(C_1 + C_2)\,(C_1a^2 + C_2b^2)}{mI_z} - 0{,}5\, l \cdot \frac{C_1 + C_2}{m} \cdot v^{l-4} \cdot \dot{v} - \frac{1}{4} > 0.$$

Alegîndu-se $l = 4$, inegalităţile de mai sus iau forma

$$\dot{v} < \frac{C_1a^2 + C_2b^2}{2I_z}, \tag{21}$$

$$\dot{v} < \frac{C_1a^2 + C_2b^2}{2I_z} - \frac{m}{8(C_1 + C_2)} \simeq \frac{C_1a^2 + C_2b^2}{2I_z}.$$

Din exemplele precedente rezultă că termenii din dreapta ai inegalităţilor (21) au valori ce depăşesc 20 $m.s^{-2}$. Prin urmare, în orice condiţii de mişcare forma pătratică (19) este negativ definită. De asemenea, se observă că forma pătratică W_3 este pozitiv definită. Prin aceleaşi metode din cazurile precedente se constată că W_3 admite limită superioară infinit mică.

Prin urmare, rezultă că *mişcarea de bază nestaţionară a automobilului cu virare neutră este uniform asimptotic stabilă oricare ar fi viteza, acceleraţia şi deceleraţia automobilului.*

3. CONSIDERAŢII PRIVITOARE LA REZULTATELE OBŢINUTE

Din analiza efectuată mai sus pentru cele trei cazuri *rezultă că, în general, mişcarea de bază nestaţionară a automobilului este uniform asimptotic stabilă pentru viteze la care în regim staţionar mişcarea este stabilă (deci şi uniform asimptotic stabilă), oricare ar fi acceleraţia sau deceleraţia sa.* Cum s-a mai arătat, se are în vedere faptul că viteza v_0 dată de (16) este foarte mică şi nu prezintă importanţă pentru stabilitatea automobilului.

Stabilitatea automobilului în regim staţionar a mai fost studiată de către V. K. Gomonov [3]. Ipotezele în care se efectuează studiul sînt aceleaşi cu cele adoptate aici, adică coeficienţi de rezistenţă la deviere constanţi şi lipsa efectelor aerodinamice. Stabilitatea este studiată într-un *interval finit de timp dat.* Pentru aceasta se aplică teoria tehnică a stabilităţii mişcării [6]. În cadrul acestei teorii trebuie cunoscute marginile superioare atît ale modulelor perturbaţiilor iniţiale, cît şi ale modulelor perturbaţiilor considerate la un moment dat. Alegerea acestor mărimi este diferită în funcţie de specificul problemei ce se studiază şi este posibilă fie în urma experienţei practice acumulate, fie prin experimente special conduse în acest scop. În cazul mişcării automobilului, în literatură nu

există astfel de indicații cu privire la parametrii mișcării care definesc stabilitatea. De altfel, cunoașterea acestor mărimi ar fi utilă și la definirea unor criterii de stabilitate mai puțin restrictive.

Deci, pe de o parte, alegerea valorilor de mai sus în [3] este arbitrară, pe de altă parte, metoda utilizată comportă calcule relativ complicate, inclusiv calculul unor integrale prin metode aproximative. De asemenea, este necesară și cunoașterea accelerației în funcție de timp, ceea ce limitează concluziile numai pentru un anumit regim de mișcare. Metoda nu permite să se facă aprecieri cu caracter mai general privitoare la stabilitatea în regim nestaționar. În fiecare caz în parte, adică pentru fiecare automobil, interval de timp și regim de mișcare trebuie efectuate calculele indicate de procedeul respectiv.

În lucrarea de față se obține, pentru prima dată, rezultatul foarte important că, în general, mișcarea nestaționară este stabilă pentru viteze mai mici decît viteza critică. Firește, pentru un automobil dat, este necesar să se verifice inegalitățile arătate. Însă, pe de o parte, aceste calcule sînt mult mai simple decît cele utilizate de Gomonov, iar, pe de altă parte, din exemplele date rezultă că este foarte puțin probabil ca inegalitățile respective să nu fie satisfăcute pentru viteze inferioare vitezei critice. Mai este de observat că modul cum variază viteza în timp nu are nici o importanță asupra stabilității automobilului.

Utilizarea teoriei tehnice a stabilității [6] poate să ofere informații cu privire la modul cum se amortizează perturbațiile. Însă, chiar și în acest caz este necesară cunoașterea efectivă a perturbațiilor, precum și efectuarea acelorași calcule complicate.

Însă, întrucît prin metoda prezentată s-au construit efectiv funcțiile Leapunov este posibil să se aprecieze pe o cale simplă modul cum se amortizează perturbațiile [9, 10].

Așa cum s-a precizat la început, una din ipotezele care au stat la baza studiului stabilității în regim nestaționar a fost aceea a lipsei efectelor aerodinamice asupra stabilității (forța laterală aerodinamică și momentul aerodinamic în jurul axei verticale sînt nule). Se poate aprecia că pînă la viteze de $90-100$ km.h^{-1} influența efectelor aerodinamice asupra stabilității automobilului este mică. De asemenea, întrucît criteriile de stabilitate deduse în general se apropie mult de cele optime, este de așteptat că și în cazul considerării efectelor aerodinamice influența regimului nestaționar asupra stabilității mișcării să fie de mică importanță.

Cealaltă ipoteză în care s-a studiat stabilitatea presupunea invariabilitatea coeficienților de rezistență la deviere ai pneurilor. După cum se știe, aceștia sînt dependenți de reacțiunea tangențială și de sarcina verticală pe pneu. Prin urmare, ei vor depinde în final de viteză și de accelerație. Modul de variație al acestor coeficienți în funcție de viteză și accelerație depinde atît de caracteristicile pneului, cît și de caracteristicile automobilului. În orice caz, există situații cînd variațiile acestor coeficienți sînt mici și deci se pot aplica metodele expuse aici. O asemenea situație este posibilă, așa cum arată calculele, în cazul unor autoturisme mijlocii frînate cu decelerații care nu depășesc $-3{,}5 \div -4{,}0$ m.s^{-2}. Adică, pentru decelerații care nu depășesc valorile amintite și care constituie în general valorile medii superioare cu care se face frînarea în condiții normale de circulație, mișcarea în regim nestaționar este stabilă.

Efectele forţelor de inerţie care apar în mişcarea nestaţionară asupra stabilităţii automobilului pot fi privite din două puncte de vedere. Primul din ele se referă la influenţa în sine a acceleraţiei, fără luarea în consideraţie a modificărilor caracteristicilor automobilului (în particular a pneurilor). Al doilea se referă la influenţa acceleraţiei asupra caracteristicilor automobilului, care modifică astfel comportarea la stabilitate. Din cele de mai sus, rezultă că *acceleraţia în sine, fără considerarea modificării unor parametri ai pneurilor, nu are nici o influenţă asupra stabilităţii automobilului.*

În consecinţă, cauza pierderii stabilităţii automobilului care se deplasează cu viteză mai mică decît viteza critică (calculată pentru regimul uniform) este modificarea caracteristicilor pneurilor provocată de variaţia vitezei. Aici bineînţeles că se iau în vedere şi alte situaţii decît cele caracterizate prin blocarea roţilor, care nu sînt decît nişte situaţii limită.

În cazul cînd se modifică caracteristicile pneurilor datorită acceleraţiei este imposibil să se separe cele două efecte menţionate.

Deoarece condiţiile de stabilitate găsite sînt satisfăcute pentru orice regim de mişcare, apare foarte probabil că şi în cazul cînd coeficienţii de rezistenţă la deviere sînt variabili, utilizarea funcţiilor Leapunov (3) şi (13) va conduce la criterii apropiate de cele optime (adică la care condiţia de suficienţă să fie apropiată de condiţia de necesitate).

Dacă C_1 şi C_2 sînt funcţii de v şi $\dot{v}$, rezultă

$$\dot{\rho}_1 = \frac{2I_z v\dot{v}}{aC_1 - bC_2} - \frac{I_z v^2}{(aC_1 - bC_2)} \cdot \frac{d(aC_1 - bC_2)}{dt}$$

sau încă

$$\dot{\rho}_1 = \frac{2I_z v\dot{v}}{aC_1 - bC_2} - \frac{I_z v^2}{(aC_1 - bC_2)^2} \cdot \left[\frac{\partial(aC_1 - bC_2)}{\partial v} \cdot \dot{v} + \frac{\partial(aC_1 - bC_2)}{\partial \dot{v}} \cdot \ddot{v} \right]. \tag{22}$$

Întrucît condiţiile ca forma pătratică (4) să fie negativ definită sînt îndeplinite cu atît mai uşor cu cît $\dot{\rho}_1 < 0$, rezultă că la demaraj este avantajoasă situaţia cînd $\frac{(aC_1 - bC_2)}{v} > 0$, $\frac{\partial(aC_1 - bC_2)}{\partial \dot{v}} < 0$ (întotdeauna la demaraj $\dot{v} > 0$, $\ddot{v} < 0$). Însă o apreciere exactă nu poate fi făcută decît prin cunoaşterea funcţiilor care determină pe C_1 şi C_2. Asemenea funcţii se pot găsi, dar expresiile care rezultă în final sînt complicate şi puţin potrivite pentru efectuarea calculelor numerice cu mijloace obişnuite.

Un aspect interesant este acela că în expresiile criteriilor respective intră şi derivata acceleraţiei, care — în cazul frînării — poate varia în limite foarte largi.

Se mai remarcă, de asemenea, că dacă $\frac{\partial(aC_1 - bC_2)}{\partial v} = 0$ şi $\frac{\partial(aC_1 - bC_2)}{\partial \dot{v}} = 0$, criteriile care se obţin au aceeaşi formă ca atunci cînd $C_i = \text{const}$

($i = 1, 2$). Prin urmare inegalitatea a doua din (7) se scrie

$$-\frac{\dot{v}(C_1 + C_2)}{(aC_1 - bC_2)(aC_1 - bC_2 + mv^2)} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0. \tag{23}$$

Se verifică ușor că termenii subliniați din inegalitatea de mai sus reprezintă condiția de stabilitate dedusă prin aplicarea criteriului Routh-Hurwitz, *ca și cînd* coeficienții sistemului (1) ar fi constanți.

Avînd date funcțiile $C_1(\dot{v})$, $C_2(\dot{v})$ din egalitatea

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0, \tag{24}$$

rezultă $v = v(\dot{v})$. Lehman [8] denumește această viteză drept viteză critică, iar egalitatea (24) condiția limită de stabilitate. Această condiție este dedusă prin utilizarea criteriului Routh-Hurwitz a cărui aplicare în cazul de față însă nu este permisă, întrucît coeficienții a_{ij} nu sînt constanți.

De altfel, condiția (23) se vede că este îndeplinită chiar și în cazul cînd $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < 0$, deoarece pentru $\dot{v} < 0$ primul membru este pozitiv. Este adevărat că valoarea lui $\dot{v}$ dedus din condiția limită (23) diferă foarte puțin de valoarea aceleiași mărimi deduse din (24) (se poate verifica afirmația ținînd seamă de cele arătate cu privire la alura curbei din figura 2), dar acest lucru este suficient să aducă un argument în plus în sprijinul afirmației că (24) nu constituie condiția de stabilitate limită. Și aceasta cu atît mai mult, cu cît condiția (23) a fost scrisă în anumite condiții simplificatoare.

În fine, mai este de observat că pentru regimurile nestaționare folosirea noțiunii de viteză critică dedusă din criteriile de mai sus corespunzătoare unei anumite accelerații nu este justificată. Într-adevăr, întrucît criteriile de stabilitate exprimă numai condițiile suficiente, înseamnă că și la valori mai mari ale vitezei este posibil ca mișcarea să fie stabilă. Deci în realitate, la depășirea acestei viteze nu există siguranța că se ajunge într-o situație critică. Numai în cazul mișcării staționare depășirea acestei viteze conduce sigur la instabilitate. Aici noțiunea de viteză critică își găsește într-adevăr justificarea.

4. CONCLUZII

a) Pentru studiul stabilității mișcării automobilului fără considerarea ruliului și a elasticității mecanismului de direcție sînt necesare, în cazul general, cinci ecuații de mișcare. Numai în cazul mișcării de bază rectilinii sînt suficiente două ecuații de mișcare.

b) Dacă coeficienții de rezistență la deviere ai pneurilor sînt constanți și dacă se neglijează efectele aerodinamice, atunci mișcarea de bază în regim nestaționar a automobilului este uniform asimptotic stabilă pentru vitezele la care mișcarea este stabilă în regim staționar.

c) Funcțiile Leapunov propuse în lucrarea de față permit să se aprecieze viteza de amortizare a perturbațiilor induse în regim nestaționar. De asemenea, aceste funcții ar mai putea fi folosite la studiul stabilității și în cazul cînd C_i sînt variabili.

d) Cauza pierderii stabilității mișcării nestaționare a automobilului care se deplasează cu viteze mai mici decît viteza critică (calculată pentru regimul staționar) este dată de modificarea caracteristicilor de deviere ale pneurilor datorită variației de viteză.

Primită la redacție la 31 octombrie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. G. Freudenstein, *Luftreifen bei Schräg — und Kurvenlauf-Experimentelle und theoretische Untersuchungen an Lkw-Reifen*, Deutsche Kraftfahrtforschung und Strassenverkehrstechnik, *152* (1961).
2. F. R. Gantamaher, *Teoriia matrif*, Gostehizdat, 1953.
3. V. K. Gomonov, *Ob ustoicivosti neustanovivșegosea dvijenia avtomobilea*, Izvestiia vîșșih ucebnîh zavedenii — Mașinostroenie, *1*, 113—119 (1966).
4. T. Hacker, *Stabilitate și comandă în teoria zborului*, București, Edit. Academiei, 1968.
5. A. Halanay, *Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale*, București, Edit. Academiei, 1963.
6. K. A. Karacearov, A. G. Piliutik, *Vvedenie v tehniceskuiu teoriiu ustoicivosti dvijeniia*, Fizmatghiz, Moskva, 1962.
7. P. Koessler, G. Senger, *Vergleichende Untersuchungen der Seitenführungseigenschaften von Personenwagen-Reifen*, Deutsche Kraftfahrtforschung und Strassenverkehrstechnik, Heft 162, 1964.
8. W. Lehman, *Einige Bemerkungen zur Fahrtstabilität und zu den Fahreigenschaften des Kraftwagens*, Kraftfahrzeugtechnik, **16**, *4*, 133 și 137 (1966).
9. A. M. Leapunov, *Obsceaia zadacea pb ustoicivosti dvijeniia*, Fizmatghiz, Moskva, 1959.
10. I. I. Malkin, *Teoriia ustoicivosti dvijeniia*, Iz-vo Nauka, Moskva, 1966.
11. F. W. Jr. Milliken, W. D. Witcombe, *General Introduction to a Programee of Dynamic Research*, Proceedings of Automobile Division, The Institution of Mechanical Engineers, *7*, 287—309 (1956—57).
12. M. Mitschke, *Fahrtrichtungshaltung und Fahrstabilität von vierrädrigen Kraftfahrzeugen*, Deutsche Krafffahrtforschung und Strassenverkehrstechnik, Heft 135, 1960.
13. Ia. M. Pevzner, *Teoriia ustoicivosti avtomobilea*, Mașghiz, Moskva, 1947.
14. L. Segel, *Theoretical Prediction and Experimental Substantiation of the Response of the Automobile to Steering Control*, Proceedings of the Automobile Division, The Institutional of Mechanical Engineers, *7*, 310—330 (1956—57).
15. A. P. Stoicescu, *Contribuții la studiul influenței reacțiunilor tangențiale la roți asupra stabilității și maniabilității automobilului*, Teză de doctorat, Institutul politehnic București, 1970.

STABILITATEA DINAMICĂ A BARELOR CU PEREȚI SUBȚIRI, AVÎND PROFILUL ÎNCHIS, SOLICITATE LA COMPRESIUNE CENTRICĂ

de TOMA PANĂ
Institutul politehnic București

În lucrare se stabilesc ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor de încovoiere-răsucire pentru barele cu pereți subțiri, solicitate la compresiune de forțe periodice și se studiază stabilitatea soluțiilor acestora, determinîndu-se condițiile necesare pentru producerea instabilității dinamice. Zonele de stabilitate dinamică sînt determinate analitic folosind metodele asimptotice de rezolvare a ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți variabili. Rezultatele obținute sînt particularizate pentru barele cu secțiuni transversale biaxial simetrice.

Studiul oscilațiilor transversale ale barelor cu masă distribuită, solicitate la compresiune statică, conduce la constatarea că odată cu creșterea forței axiale se produce o creștere a perioadei oscilației. În momentul în care forța de compresiune devine egală cu cea critică mișcarea oscilatorie încetează, iar săgețile barei încep să crească rapid odată cu scurgerea timpului.

Dacă sarcina de compresiune are o componentă statică și una dinamică, la anumite valori ale frecvenței acesteia se produce pierderea stabilității oscilațiilor transversale chiar dacă forța axială maximă este mai mică decît cea critică. Fenomenul acesta de creștere rapidă a amplitudinei oscilațiilor este o rezonanță parametrică, întrucît în ecuațiile de mișcare, forța apare ca factor pe lîngă deplasare. Pierderea stabilității se produce la o anumită valoare a componentei statice însă nu pentru o singură valoare a frecvenței ci pentru o serie de intervale întregi al valorilor frecvenței care corespund unor zone de instabilitate dinamică dispuse succesiv.

Întrucît la barele cu pereți subțiri oscilațiile de încovoiere sînt cuplate cu cele de răsucire, fenomenul de pierdere a stabilității după unul din modurile de solicitare este însoțit de oscilațiile produse după celelalte moduri care nu și-au pierdut încă stabilitatea. Problemele care rezultă din acest mod particular de comportare sînt studiate în cele ce urmează, acordîndu-se o atenție deosebită primelor două frecvențe așa cum se procedează în mod curent în analiza stabilității dinamice.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 32, NR. 4, 1973, P. 779–812

1. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE ALE VIBRAȚIILOR DE ÎNCOVOIERE-RĂSUCIRE PENTRU BARELE CU PEREȚI SUBȚIRI, SOLICITATE LA COMPRESIUNE CENTRICĂ DE FORȚE PERIODICE

Se consideră o bară cu pereți subțiri de secțiune constantă având profilul închis și nedeformabil, rezemată în mod arbitrar, care este confecționată dintr-un material omogen și izotrop ce ascultă de legea lui Hooke. Se admite ipoteza lui Umanski, adică se consideră că deplanarea în cazul răsucirii împiedicate este proporțională cu deplanarea din cazul răsucirii libere și se raportează bara la un sistem de referință stîng avînd axa Ox dirijată în direcția lugimii, iar ca axe Oy și Oz, axele principale centrale ale secțiunii [5].

În procesul de deformare a barei, o secțiune oarecare se deplasează în direcțiile axelor de coordonate cu cantitățile $\xi(x)$, $\eta(x)$, $\zeta(x)$ și se rotește în planul său, în jurul centrului de încovoiere $A(y_0, z_0)$, cu unghiul $\varphi(x)$.

Presupunînd că bara este solicitată de sarcinile $p_x(s, x)$, $p_y(s, x)$ și $p_z(s, x)$, distribuite pe unitatea de suprafață mediană și de forțele concentrate P dirijate după direcția axei Ox și aplicate la capetele barei astfel încît să producă numai compresiune centrică, sistemul de ecuații diferențiale de deformație pentru cea de a doua formă de echilibru al barei se scrie [5]:

$$EA\,\xi'' + q_x = 0,$$

$$EI_z\,\eta^{IV} - \int_c \frac{\partial p_x}{\partial x}\,y\,ds - q_y + P\,(\eta'' - z_0\,\varphi'') = 0,$$

$$EI_y\,\zeta^{IV} - \int_c \frac{\partial p_x}{\partial x}\,z\,ds - q_z + P\,(\zeta'' + y_0\,\varphi'') = 0, \tag{1}$$

$$\frac{EI_{\hat{\omega}}}{\nu}\,\varphi^{IV} - GI_t\,\varphi'' - m_A + Ph^2\,\varphi'' - P\,(z_0\,\eta'' - y_0\,\zeta'') - \int_c \frac{\partial p_x}{\partial x}\,\hat{\omega}\,ds +$$

$$+ \frac{EI_{\hat{\omega}}}{\nu GI_f}\,m''_{t_f} - \frac{EI_{\hat{\omega}}}{\nu GI_f}\,P[\varphi^{IV}\,h_f^2 - (z_0 + z_f)\,\eta^{IV} + (y_0 + y_f)\,\zeta^{IV}] = 0.$$

Simbolurile folosite în ecuațiile (1) corespund următoarelor mărimi:

A	— aria secțiunii transversale;
I_y și I_z	— momentele de inerție ale secțiunii transversale în raport cu axele Oy și Oz;
I_t	— momentul de inerție polar convențional;
I_f	— momentul de inerție dirijat raportat la centrul de forfecare pură;
$I_{\hat{\omega}}$	— momentul de inerție sectorial generalizat;
ν	— coeficientul de deformație al secțiunii;
y_0, z_0	— coordonatele centrului de încovoiere al secțiunii;
y_f, z_f	— coordonatele relative ale centrului de forfecare pură, măsurate în raport cu centrul de încovoiere al secțiunii;
s	— coordonata suplimentară, măsurată pe linia mediană a secțiunii de la un punct de origine convenabil ales, ce determină poziția unui punct oarecare $M(y, z)$ de pe suprafața mediană a învelișului barei;

$\hat{\omega}$ — deplanarea unitară;
E și G — modulul de elasticitate longitudinal, respectiv transversal, al materialului din care este confecționată bara.

De asemenea au fost utilizate notațiile:

$$q_x = \int_c p_x \, ds \quad ; \quad q_y = \int_c p_y \, ds \quad ; \quad q_z = \int_c p_z \, ds,$$

$$m_A = \int_c p_y (z - z_0) \, ds - \int_c p_z (y - y_0) \, ds, \tag{2}$$

$$m_{t_f} = m_A - q_y z_f + q_z y_f$$

și

$$h^2 = \frac{I_y + I_z}{A} + y_0^2 + z_0^2,$$

$$h_f^2 = h^2 + y_0 y_f + z_0 z_f. \tag{3}$$

Pentru ca ecuațiile (1) să poată reprezenta deformațiile în cazul oscilațiilor barei cu masă distribuită, solicitate la compresiune de forțele concentrate P, este necesar ca sarcinile p_x, p_y, p_z — dirijate după direcțiile axelor de coordonate — să fie înlocuite cu forțele de inerție distribuite, iar deplasările generale ale secțiunii să fie considerate ca funcții de două variabile: abscisa x a secțiunii transversale și timpul t. Exprimînd forțele de inerție cu ajutorul deplasărilor locale ale unui punct $M(y, z)$ de pe linia mediană a secțiunii transversale, scrise în funcție de deplasările generale ale secțiunii și înlocuind în ecuațiile (1),rezultă următorul sistem [4], [7]:

$$EA \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0,$$

$$EI_z \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} - \frac{\gamma I_z}{g} \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\gamma A}{g} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - z_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) + P \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - z_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = 0,$$

$$EI_y \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} - \frac{\gamma I_y}{g} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\gamma A}{g} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + y_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) + P \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + y_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = 0,$$

$$\frac{EI_{\hat{\omega}}}{\nu} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - GI_t \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\gamma I_{\hat{\omega}}}{\nu g} \left[\left(1 + \frac{EA}{GI_t} h_f^2 \right) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{EA}{GI_t} (z_0 + z_f) \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial t^2} + \right. \tag{4}$$

$$\left. + \frac{EA}{GI_t} (y_0 + y_f) \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial t^2} \right] + \frac{\gamma^2 I_{\hat{\omega}} A}{g^2 \nu GI_t} \left[h_f^2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} - (z_0 + z_f) \frac{\partial^4 \eta}{\partial t^4} + (y_0 + y_f) \frac{\partial^4 \zeta}{\partial t^4} \right] +$$

$$+ \frac{\gamma A}{g} \left[h^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - z_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + y_0 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \right] + P \left[h^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - z_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + y_0 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right] -$$

$$- \frac{EI_{\hat{\omega}}}{\nu GI_t} P \left[h_f^2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - (z_0 + z_f) \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + (y_0 + y_f) \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} \right] = 0,$$

în care γ reprezintă greutatea specifică a materialului din care este confecționată bara, iar g — accelerația gravitației.

Prima ecuație a sistemului (4) descrie mișcarea vibratorie axială a barei cu pereți subțiri; fiind identică cu cea de la barele obișnuite și nedepinzînd de celelalte ecuații, se poate lăsa deoparte.

Soluția sistemului (4) este de forma:

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \mathcal{T}_1(t)\cdot\Sigma f_{1i}(x), \\ \zeta(x, t) &= \mathcal{T}_2(t)\cdot\Sigma f_{2i}(x), \\ \varphi(x, t) &= \mathcal{T}_3(t)\cdot\Sigma f_{3i}(x), \end{aligned} \tag{5}$$

în care fiecare termen al seriilor corespunde unui mod propriu de vibrație și satisface condițiile la limite impuse de felul de rezemare al barei.

Dacă interesează numai studiul unui singur mod propriu, de exemplu cel de ordinul i, seriile din soluția (5) conțin cîte un singur termen, respectiv cel ce poartă indicele i. În acest caz, trecînd la variabilele adimensionale:

$$\theta = \frac{x}{l} \quad \text{și} \quad \bar{t} = pt, \tag{6}$$

unde l este lungimea barei, iar p — pulsația proprie a vribrației libere de încovoiere-răsucire a barei solicitată la compresiune de forțe invariabile în timp — și înlocuind soluția (5) în sistemul (4), rezultă

$$f_{1i}^{IV}(\theta)\,\mathcal{T}_1 - \varkappa[f_{1i}''(\theta) - b_z^4 f_{1i}(\theta)]\,\mathcal{T}_1'' - z_0\,\varkappa b_z^4 f_{3i}(\theta)\,\mathcal{T}_3'' + \\ + \frac{Pl^2}{EI_z}[f_{1i}'(\theta)\,\mathcal{T}_1 - z_0 f_{3i}''(\theta)\,\mathcal{T}_3] = 0,$$

$$f_{2i}^{IV}(\theta)\,\mathcal{T}_2 - \varkappa[f_{2i}''(\theta) - b_y^4 f_{2i}(\theta)]\,\mathcal{T}_2'' + y_0\,\varkappa b_y^4 f_{3i}(\theta)\,\mathcal{T}_{3i}'' + \\ + \frac{Pl^2}{EI_y}[f_{2i}''(\theta)\,\mathcal{T}_2 + y_0 f_{3i}''(\theta)\,\mathcal{T}_3] = 0,$$

$$[f_{3i}^{IV}(\theta) - c_{\hat{\omega}}^2 f_{3i}''(\theta)]\,\mathcal{T}_3 - \varkappa[(1 + a_f^2) f_{3i}''(\theta) - a_{\hat{\omega}}^4 f_{3i}(\theta)]\,\mathcal{T}_3'' + \\ + \varkappa\left[a_f^2 \frac{z_0 + z_f}{h_f^2} f_{1i}''(\theta) - a_{\hat{\omega}}^4 \frac{z_0}{h^2} f_{1i}(\theta)\right]\mathcal{T}_1'' - \\ - \varkappa\left[a_f^2 \frac{y_0 + y_f}{h_f^2} f_{2i}''(\theta) - a_{\hat{\omega}}^4 \frac{y_0}{h^2} f_{2i}(\theta)\right]\mathcal{T}_2'' + \varkappa^2 a_f^2\left[f_{3i}(\theta)\,\mathcal{T}_3^{IV} - \right. \\ \left. - \frac{z_0 + z_f}{h_f^2} f_{1i}(\theta)\,\mathcal{T}_1^{IV} + \frac{y_0 + y_f}{h_f^2} f_{2i}(\theta)\,\mathcal{T}_2^{IV}\right] + \\ + \frac{\nu l^2 P}{EI_{\hat{\omega}}}\left[h^2 f_{3i}''(\theta)\,\mathcal{T}_3 - z_0 f_{1i}''(\theta)\,\mathcal{T}_1 + y_0 f_{2i}''(\theta)\,\mathcal{T}_2\right] - \\ - \frac{P}{GI_f}[h_f^2 f_{3i}^{IV}(\theta)\,\mathcal{T}_3 - (z_0 + z_f) f_{1i}^{IV}(\theta)\,\mathcal{T}_1 + (y_0 + y_f) f_{2i}^{IV}(\theta)\,\mathcal{T}_2] = 0.$$

În ecuațiile (7) au fost utilizate notațiile:

$$\varkappa = \frac{\gamma p^2 l^2}{Eg} \quad , \quad b_y^4 = \frac{Al^2}{I_y} \quad , \quad b_z^4 = \frac{Al^2}{I_z} \, ,$$

$$a_f^2 = \frac{EA}{GI_f} h_f^2 \quad , \quad c_{\hat{\omega}}^2 = \frac{GI_t}{EI_t} \nu l^2 \quad , \quad a_{\hat{\omega}}^4 = \frac{A \nu h^2 l^2}{I_{\hat{\omega}}} \cdot \tag{8}$$

Înmulțind aceste ecuații, respectiv cu $f_{1i}(\theta)\,\mathrm{d}\theta, f_{2i}(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ și $f_{3i}(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ și integrînd pe întreaga lungime a barei se obține sistemul:

$$\varkappa[b_z^4 c_{11} - b_{11}]\mathcal{T}_1'' + \left[a_{11} + \frac{Pl^2}{EI_z} b_{11}\right]\mathcal{T}_1 - z_0\left[\varkappa b_z^4 c_{13}\mathcal{T}_3'' + \frac{Pl^2}{EI_z} b_{13}\mathcal{T}_3\right] = 0,$$

$$\varkappa[b_y^4 c_{22} - b_{22}]\mathcal{T}_2'' + \left[a_{22} + \frac{Pl^2}{EI_y} b_{22}\right]\mathcal{T}_2 + y_0\left[\varkappa b_y^4 c_{23}\mathcal{T}_3'' + \frac{Pl^2}{EI_y} b_{23}\mathcal{T}_3\right] = 0,$$

$$- \varkappa^2 a_f^2 \frac{z_0 + z_f}{h_f^2} c_{13}\mathcal{T}_1^{\mathrm{IV}} + \varkappa\left[a_f^2 \frac{z_0 + z_f}{h_f^2} b_{13} - a_{\hat{\omega}}^4 \frac{z_0}{h^2} c_{13}\right]\mathcal{T}_1'' -$$

$$- P\left[\frac{\nu l^2}{EI_{\hat{\omega}}} z_0 b_{13} - \frac{z_0 + z_f}{GI_f} a_{13}\right]\mathcal{T}_1 + \tag{9}$$

$$+ \varkappa^2 a_f^2 \frac{y_0 + y_f}{h_f^2} c_{23}\mathcal{T}_2^{\mathrm{IV}} - \varkappa\left[a_f^2 \frac{y_0 + y_f}{h_f^2} b_{23} - a_{\hat{\omega}}^4 \frac{y_0}{h^2} c_{23}\right]\mathcal{T}_2'' +$$

$$+ P\left[\frac{\nu l^2}{EI_{\hat{\omega}}} y_0 b_{23} - \frac{y_0 + y_f}{GI_f} a_{23}\right]\mathcal{T}_2 +$$

$$+ \varkappa^2 a_f^2 c_{33}\mathcal{T}_3^{\mathrm{IV}} + \varkappa[a_{\hat{\omega}}^4 c_{33} - (1 + a_f^2) b_{33}]\mathcal{T}_3'' +$$

$$+ \left[a_{33} - c_{\hat{\omega}}^2 b_{33} + P\left(\frac{\nu l^2}{EI_{\hat{\omega}}} h^2 b_{33} - \frac{1}{GI_f} h_f^2 a_{33}\right)\right]\mathcal{T}_3 = 0,$$

în scrierea căruia au fost utilizate notațiile:

$$a_{11} = \int_0^1 f_{1i}^{\mathrm{IV}}(\theta) f_{1i}(\theta)\,\mathrm{d}\theta \; ; \; b_{11} = \int_0^1 f_{1i}''(\theta) f_{1i}(\theta)\,\mathrm{d}\theta \; ; \; c_{11} = \int_0^1 f_{1i}^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta,$$

$$a_{22} = \int_0^1 f_{2i}^{\mathrm{IV}}(\theta) f_{2i}(\theta)\,\mathrm{d}\theta \; ; \; b_{22} = \int_0^1 f_{2i}''(\theta) f_{2i}(\theta)\,\mathrm{d}\theta \; ; \; c_{22} = \int_0^1 f_{2i}^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta, \tag{10}$$

$$a_{33} = \int_0^1 f_{3i}^{\mathrm{IV}}(\theta) f_{3i}(\theta)\,\mathrm{d}\theta \; ; \; b_{33} = \int_0^1 f_{3i}''(\theta) f_{3i}(\theta)\,\mathrm{d}\theta \; ; \; c_{33} = \int_0^1 f_{3i}^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta,$$

$$a_{12}=\int_0^1 f_{1i}^{IV}(\theta)f_{2i}(\theta)\,d\theta \;;\; b_{12}=\int_0^1 f_{1i}''(\theta)f_{2i}(\theta)\,d\theta \;;\; c_{12}=\int_0^1 f_{1i}(\theta)f_{2i}(\theta)\,d\theta,$$

$$a_{13}=\int_0^1 f_{1i}^{IV}(\theta)f_{3i}(\theta)\,d\theta \;;\; b_{13}=\int_0^1 f_{1i}''(\theta)f_{3i}(\theta)\,d\theta \;;\; c_{13}=\int_0^1 f_{1i}(\theta)f_{3i}(\theta)\,d\theta,$$

$$a_{23}=\int_0^1 f_{2i}^{IV}(\theta)f_{3i}(\theta)\,d\theta \;;\; b_{23}=\int_0^1 f_{2i}''(\theta)f_{3i}(\theta)\,d\theta \;;\; c_{23}=\int_0^1 f_{2i}(\theta)f_{3i}(\theta)\,d\theta, \tag{10}$$

şi s-a ţinut seama de relaţiile :

$$\begin{aligned} a_{12}&=a_{21} \;;\; & b_{12}&=b_{21} \;;\; & c_{12}&=c_{21},\\ a_{13}&=a_{31} \;;\; & b_{13}&=b_{31} \;;\; & c_{13}&=c_{31},\\ a_{23}&=a_{32} \;;\; & b_{23}&=b_{32} \;,\; & c_{23}&=c_{32}. \end{aligned} \tag{11}$$

Pentru cazul particular, în care forţele P sînt constante în timp, soluţia sistemului (9) are forma

$$\mathcal{T}_1=C_1e^{i\bar{t}} \;;\; \mathcal{T}_2=C_2\,e^{i\bar{t}} \;,\; \mathcal{T}_3=C_3\,e^{i\bar{t}}. \tag{12}$$

Înlocuind în ecuaţiile (9), se obţine un sistem algebric omogen, avînd ca necunoscute constantele C_1, C_2 şi C_3, a cărui condiţie de compatibilitate este

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\dfrac{Pl^2}{EI_z}b_{11}- & 0 & z_0\left[\varkappa b_z^4 c_{13}-\dfrac{Pl^2}{EI_z}b_{13}\right]\\ -\varkappa\,[b_z^4 c_{11}-b_{11}] & & \\ 0 & a_{22}+\dfrac{Pl^2}{EI_y}b_{22}- & -y_0\left[\varkappa b_y^4 c_{23}-\right.\\ & -\varkappa\,[b_y^4 c_{22}-b_{22}] & \left.-\dfrac{Pl^2}{EI_y}b_{23}\right]\\ -\varkappa^2 a_f^2\dfrac{z_0+z_f}{h_f^2}c_{13}- & \varkappa^2 a_f^2\dfrac{y_0+y_f}{h_f^2}c_{23}+ & \varkappa^2 a_f^2 c_{33}-\\ -\varkappa\left[a_f^2\dfrac{z_0+z_{2f}}{h_f^2}b_{13}-\right. & +\varkappa\left[a_f^2\dfrac{y_0+y_f}{h_f^2}b_{23}-\right. & -\varkappa\,[a_{\hat{\omega}}^4 c_{33}-(1+\\ -a_{\hat{\omega}}^4\dfrac{z_0}{h^2}c_{13}\Big]- & -a_{\hat{\omega}}^4\dfrac{y_0}{h^2}c_{23}\Big]+ & +a_f^2)\,b_{33}]+\\ -P\left[\dfrac{\nu l^2}{EI_{\hat{\omega}}}z_0 b_{13}-\right. & +P\left[\dfrac{\nu l^2}{EI_{\hat{\omega}}}y_0 b_{23}-\right. & +[a_{33}-c_{\omega}^4 b_{33}]+\\ \left.-\dfrac{z_0+z_f}{GI_f}a_{13}\right] & \left.-\dfrac{y_0+y_f}{GI_f}a_{23}\right] & +P\left(\dfrac{\nu l^2}{EI_{\hat{\omega}}}h^2 b_{33}-\right.\\ & & \left.-\dfrac{1}{GI_f}h_f^2 a_{33}\right) \end{vmatrix}=0 \tag{13}$$

Dacă secțiunea transversală a barei este biaxial simetrică, ea se bucură de proprietatea că centrul de forfecare pură și centrul de încovoiere se confundă cu centrul de greutate situat în originea sistemului de coordonate, deci

$$y_0 = y_f = z_0 = z_f = 0,$$

iar determinantul (13) se reduce la produsul termenilor de pe diagonala principală. Așadar, ecuația (13) se transformă în ecuațiile:

$$\begin{aligned}
&-\varkappa\,(b_z^4\,c_{11} - b_{11}) + a_{11} + \frac{Pl^2}{EI_z}\,b_{11} = 0,\\
&-\varkappa\,(b_y^4\,c_{22} - b_{22}) + a_{22} + \frac{Pl^2}{EI_y}\,b_{22} = 0,\\
&\varkappa^2\,a_f^2\,c_{33} - \varkappa\,[a_{\hat{\omega}}^4\,c_{33} - (1 + a_f^2)\,b_{33}] + [a_{33} - c_{\hat{\omega}}^2\,b_{33} +\\
&\quad + \left(\frac{\nu l^2}{EI_{\hat{\omega}}}\,h^2\,b_{33} - \frac{1}{GI_t}\,h_f^2\,a_{33}\right)P] = 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Se observă că, dacă se pune condiția $\varkappa = 0$, din aceste ecuații rezultă valorile sarcinilor critice pentru flambajul static de încovoiere și de răsucire [5]:

$$\begin{aligned}
P_{10} &= -\frac{EI_z}{l^2}\,\frac{a_{11}}{b_{11}},\\
P_{20} &= -\frac{EI_y}{l^2}\,\frac{a_{22}}{b_{22}},\\
P_{30} &= \frac{c_{\hat{\omega}}^2\,b_{33} - a_{33}}{\dfrac{\nu l^2}{EI_{\hat{\omega}}}\,h^2\,b_{33} - \dfrac{1}{GI_t}\,h_f^2\,a_{33}},
\end{aligned} \tag{15}$$

iar dacă se pune condiția $P = 0$, se obțin valorile pulsațiilor proprii de încovoiere și de răsucire stabilite în lucrarea [4]:

$$\begin{aligned}
\varkappa_{10} &= \frac{a_{11}}{b_z^4\,c_{11} - b_{11}},\\
\varkappa_{20} &= \frac{a_{22}}{b_y^4\,c_{22} - b_{22}},\\
\varkappa_{30,\,40} &= \frac{1}{2a_f^2\,c_{33}}\left\{[a_{\hat{\omega}}^4\,c_{33} - (1 + a_f^2)\,b_{33}] \pm\right.\\
&\quad \left. \pm \sqrt{[a_{\hat{\omega}}^4\,c_{33} - (1 + a_f^2)\,b_{33}]^2 - 4a_f^2\,(a_{33} - c_{\hat{\omega}}^2\,b_{33})\,c_{33}}\right\}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Folosind relaţiile (15) şi (16), determinantul (13) poate fi scris sub forma :

$$\begin{vmatrix} \varkappa_{10}\left(1-\frac{P}{P_{10}}\right)-\varkappa & 0 & z_0\,\varkappa_{10}\left[\varkappa b_z^4\frac{c_{13}}{a_{11}}+\frac{P}{P_{10}}\frac{b_{13}}{b_{11}}\right] \\ 0 & \varkappa_{20}\left(1-\frac{P}{P_{20}}\right)-\varkappa & -y_0\,\varkappa_{20}\left[\varkappa b_y^4\frac{c_{23}}{a_{22}}+\frac{P}{P_{20}}\frac{b_{23}}{b_{22}}\right] \\ -a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}\left[\varkappa^2 c_{13}+\varkappa b_{13}+\frac{a_{13}}{b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P}{P_{10}}\right]+ & a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}\left[\varkappa^2 c_{23}+\varkappa b_{23}+\frac{a_{23}}{b_y^4}\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P}{P_{20}}\right]- & a_f^2 c_{33}\left[\varkappa^2-\varkappa(\varkappa_{30}+\varkappa_{40})+\varkappa_{30}\varkappa_{40}\left(1-\frac{P}{P_{30}}\right)\right] \\ +a_\omega^4\frac{z_0}{h^2}\left[\varkappa c_{13}+\frac{b_{13}}{b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P}{P_{10}}\right] & -a_\omega^4\frac{y_0}{h^2}\left[\varkappa c_{23}+\frac{b_{23}}{b_y^4}\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P}{P_{20}}\right] & \end{vmatrix} = 0. \tag{17}$$

Ecuaţia (17) permite calculul pulsaţiilor proprii de încovoiere-răsucire pentru barele de secţiune oarecare solicitate la compresiune [6].

Prin particularizare, punînd $\varkappa = 0$ sau $P = 0$, din această relaţie se pot obţine fie valorile sarcinilor critice de flambaj, fie valorile pulsaţiilor proprii de încovoiere-răsucire pentru barele nesolicitate axial. În cazul în care forţele P sînt egale cu una din valorile sarcinilor critice pentru care se produce pierderea stabilităţii statice, ecuaţia (17), care este de gradul patru în $\varkappa$, are termenul liber nul. Ca urmare ea se descompune în soluţia $\varkappa = 0$ şi într-o ecuaţie de gradul trei, prin rezolvarea căreia se obţin valorile pulsaţiilor proprii de încovoiere-răsucire ale barei aflată în cea de a doua formă de echilibru static.

Modul de variaţie al pulsaţiilor proprii, în jurul valorii critice a sarcinei de compresiune, se pune mai uşor în evidenţă pentru barele cu secţiuni biaxial simetrice la care ecuaţia (17) are soluţiile [7]:

$$\varkappa_1 = \varkappa_{10}\left(1-\frac{P}{P_{10}}\right),$$

$$\varkappa_2 = \varkappa_{20}\left(1-\frac{P}{P_{20}}\right), \tag{17a}$$

$$\varkappa_{3,4} = \frac{(\varkappa_{30} + \varkappa_{40}) \pm \sqrt{(\varkappa_{30} + \varkappa_{40})^2 - 4\varkappa_{30}\varkappa_{40}\left(1 - \frac{P}{P_{30}}\right)}}{2}.$$

Din relațiile (17a) rezultă că în timp ce pentru vibrațiile de încovoiere, în cele două plane longitudinale de simetrie, există cîte o singură valoare a pulsației proprii, pentru vibrația de răsucire sînt două valori : una foarte mare ($\varkappa_3$), iar cealaltă ($\varkappa_4$) de același ordin de mărime cu $\varkappa_1$ și $\varkappa_2$. Pe măsură ce sarcina de compresiune crește, pulsațiile adimensionale $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ și $\varkappa_4$ scad, iar pulsația $\varkappa_3$ crește astfel încît la atingerea uneia din valorile critice date de relațiile (15), pulsația corespunzătoare se anulează. Deci pierderea stabilității statice pentru un mod de solicitare duce numai la anularea pulsației proprii respective ; celelalte pulsații corespunzătoare modurilor de solicitare care nu și-au pierdut încă stabilitatea, continuă să existe.

Rezultatele stabilite mai sus permit scrierea sub o formă mai simplă a sistemului de ecuații diferențiale (9), pentru cazul în care forțele P sînt variabile în timp. Astfel, dacă se admite că sarcina de compresiune este o funcție periodică de timp de forma

$$P(t) = P_0 + P_1 \cos \Omega t, \tag{18}$$

unde P_0 reprezintă valoarea componentei statice, P_1 — amplitudinea componentei dinamice, iar Ω — pulsația acestei componente, înlocuind relațiile (15), (16) și (18) în ecuațiile (9), efectuînd schimbarea de variabilă

$$\tau = \Omega t = \frac{t}{\beta}, \tag{19}$$

în care

$$\beta = \frac{P}{\Omega}, \tag{20}$$

și introducînd notația,

$$\epsilon = \frac{P_1}{P_0}, \tag{21}$$

rezultă următorul sistem :

$$\varkappa \mathcal{T}_1'' + \varkappa_{10}\beta^2\left[1 - \frac{P_0}{P_{10}}(1 + \epsilon\cos\tau)\right]\mathcal{T}_1 - z_0\varkappa_{10}\left[\varkappa b_z^4 \frac{c_{13}}{a_{11}}\mathcal{T}_3'' - \right.$$

$$\left. - \frac{P_0}{P_{10}}\frac{b_{13}}{b_{11}}\beta^2(1 + \epsilon\cos\tau)\mathcal{T}_3\right] = 0,$$

$$\varkappa\mathcal{T}_2'' + \varkappa_{20}\beta^2\left[1 - \frac{P_0}{P_{20}}(1+\varepsilon\cos\tau)\right]\mathcal{T}_2 + y_0\varkappa_{20}\left[\varkappa b_y^4\frac{c_{23}}{a_{22}}\mathcal{T}_3'' - \right.$$

$$\left. - \frac{P_0}{P_{20}}\frac{b_{23}}{b_{22}}\beta^2(1+\varepsilon\cos\tau)\mathcal{T}_3\right] = 0,$$

$$a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}\left[-\varkappa^2 c_{13}\mathcal{T}_1^{IV} + \varkappa\beta^2 b_{13}\mathcal{T}_1'' - \beta^4\frac{a_{13}}{b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}(1+\varepsilon\cos\tau)\mathcal{T}_1\right] -$$

$$- a_{\hat{\omega}}^4\frac{z_0}{h^2}\left[\varkappa\beta^2 c_{13}\mathcal{T}_1'' - \beta^4\frac{b_{13}}{b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}(1+\varepsilon\cos\tau)\mathcal{T}_1\right] + \tag{22}$$

$$+ a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}\left[\varkappa^2 c_{23}\mathcal{T}_2^{IV} - \varkappa\beta^2 b_{23}\mathcal{T}_2'' + \beta^4\frac{a_{23}}{b_y^4}\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}(1+\varepsilon\cos\tau)\mathcal{T}_2\right] +$$

$$+ a_{\hat{\omega}}^4\frac{y_0}{h^2}\left[\varkappa\beta^2 c_{23}\mathcal{T}_2'' - \beta^4\frac{a_{22}}{b_y^4}\frac{b_{23}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}(1+\varepsilon\cos\tau)\mathcal{T}_2\right] +$$

$$+ a_f^2 c_{33}\left\{\varkappa^2\mathcal{T}_3^{IV} + \varkappa\beta^2(\varkappa_{30}+\varkappa_{40})\mathcal{T}_3'' + \right.$$

$$\left. + \beta^4\varkappa_{30}\varkappa_{40}\left[1 - \frac{P_0}{P_{30}}(1+\varepsilon\cos\tau)\right]\mathcal{T}_3\right\} = 0.$$

Ecuaţiile liniare cu coeficienţi variabili (22) descriu vibraţia neliniară de încovoiere-răsucire pentru barele cu pereţi subţiri avînd profilul închis, solicitate la compresiune centrică de forţe periodice. Aceste ecuaţii se decuplează pentru barele cu secţiunea transversală biaxial simetrică; primele două devin de tip Mathieu, iar cea de a treia o ecuaţie diferenţială de ordin superior care conţine, în plus faţă de ecuaţia Mathieu, şi derivata de ordinul patru.

Deşi, în general, rezolvarea unui sistem de ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi variabili este o problemă dificilă, în cazul sistemului (22) aceasta este întrucîtva uşurată de faptul că ecuaţiile respective conţin numai derivate de ordin par. Cum obţinerea unei soluţii exacte a sistemului (22) este imposibilă, în prezenta lucrare, acesta va fi studiat pe baza principiilor utilizate de metodele asimptotice de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale [1].

2. STABILITATEA SOLUŢIILOR SISTEMULUI DE ECUAŢII DIFERENŢIALE

Se observă că pentru $\varepsilon = 0$, ecuaţiile diferenţiale (22) alcătuiesc un sistem liniar cu coeficienţi constanţi, a cărui soluţie este periodică şi are forma (12). Există o teoremă a lui Floquet [8] care arată că soluţiile

fundamentale ale sistemului de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți periodici se pot scrie sub forma unor produse de cîte doi factori : primul fiind o funcție periodică avînd perioada egală cu aceea a coeficienților variabili, iar cel de-al doilea, asemănător cu soluțiile fundamentale ale sistemului de ecuații diferențiale cu coeficienți constanți. Folosind ecuația caracteristică stabilită pe baza acestei teoreme [3], se poate verifica dacă soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale este mărginită sau nu, indiferent de forma soluțiilor fundamentale folisite. În felul acesta problema stabilității mișcării vibratorii poate fi rezolvată satisfăcător, fără a fi necesară cunoașterea exactă a soluției sistemului de ecuații diferențiale (22). Pornind de la aceste premize, pot fi determinate condițiile în care soluția sistemului (22) este stabilă sau tinde către o valoare stabilă, admițînd presupunerea că ea poate fi descompusă în serie Fourier. Trecerea de la soluția stabilă la cea nestabilă se face pentru anumite valori ale parametrilor ϵ și β ; ele satisfac o relație $F(\epsilon, \beta) = 0$ al cărui mod de obținere este prezentat în cele ce urmează.

Sistemul de ecuații (22) admite soluții de forma

$$\mathcal{T}_i(\tau) = A_{i0} + \sum_1^\infty A_{in} \cos \frac{n\tau}{2} + \sum_1^\infty B_{in} \sin \frac{n\tau}{2}, \tag{23}$$

unde A_{i0}, A_{in} și B_{in} sînt constante, iar indicele i poate lua valorile 1, 2 sau 3.

Înlocuind soluțiile (23) în sistemul (22) și identificînd termenii, rezultă $2n+1$ sisteme de ecuații algebrice. Astfel, din identificarea termenilor liberi rezultă sistemul :

$$\beta^2 \varkappa_{10} \left[\left(1 - \frac{P_0}{P_{10}} \right) A_{10} - \frac{1}{2} \epsilon \frac{P_0}{P_{10}} A_{12} + z_0 \frac{b_{13}}{b_{11}} \frac{P_0}{P_{10}} \left(A_{30} + \frac{1}{2} \epsilon A_{32} \right) \right] = 0,$$

$$\beta^2 \varkappa_{20} \left[\left(1 - \frac{P_0}{P_{20}} \right) A_{20} - \frac{1}{2} \epsilon \frac{P_0}{P_{20}} A_{22} - y_0 \frac{b_{23}}{b_{22}} \frac{P_0}{P_{20}} \left(A_{30} + \frac{1}{2} \epsilon A_{32} \right) \right] = 0,$$

$$\beta^4 \left\{ - \frac{1}{b_z^4} \frac{a_{11}}{b_{11}} \frac{P_0}{P_{10}} \left[a_f^2 \frac{z_0 + z_f}{h_f^2} a_{13} - a_{\overset{\wedge}{\omega}}^4 \frac{z_0}{h^2} b_{13} \right] \left(A_{10} + \frac{1}{2} \epsilon A_{12} \right) + \right. \tag{24}$$

$$+ \frac{1}{b_y^4} \frac{a_{22}}{b_{22}} \frac{P_0}{P_{20}} \left[a_f^2 \frac{y_0 + y_f}{h_f^2} a_{23} - a_{\overset{\wedge}{\omega}}^4 \frac{y_0}{h^2} b_{23} \right] \left(A_{20} + \frac{1}{2} \epsilon A_{22} \right) +$$

$$\left. + a_f^2 c_{33} \varkappa_{30} \varkappa_{40} \left[\left(1 - \frac{P_0}{P_{30}} \right) A_{30} - \frac{1}{2} \epsilon \frac{P_0}{P_{30}} A_{32} \right] \right\} = 0,$$

iar din identificarea termenilor în cos $\frac{n\tau}{2}$, sistemul:

$$\left[-\varkappa\frac{n^2}{4}+\varkappa_{10}\beta^2\left(1-\frac{P_0}{P_{10}}\right)\right]A_{1n}+z_0\varkappa_{10}\left[\varkappa\frac{n^2}{4}b_z^4\frac{c_{13}}{a_{11}}+\beta^2\frac{b_{13}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\right]A_{3n}-$$

$$-\frac{1}{2}\beta^2\in\varkappa_{10}\frac{P_0}{P_{10}}\left[A_{1(n+2)}+A_{1(n-2)}-z_0\frac{b_{13}}{b_{11}}(A_{3(n+2)}+A_{3(n-2)})\right]=0,$$

$$\left[-\varkappa\frac{n^2}{4}+\varkappa_{20}\beta^2\left(1-\frac{P_0}{P_{20}}\right)\right]A_{2n}-y_0\varkappa_{20}\left[\varkappa\frac{n^2}{4}b_y^4\frac{c_{23}}{a_{22}}+\beta^2\frac{b_{23}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\right]A_{3n}-$$

$$-\frac{1}{2}\beta^2\in\varkappa_{20}\frac{P_0}{P_{20}}\left[A_{2(n+2)}+A_{2(n-2)}+y_0\frac{b_{23}}{b_{22}}(A_{3(n+2)}+A_{3(n-2)})\right]=0,$$

$$\left[a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}\left(-\varkappa^2\frac{n^4}{16}c_{13}-\varkappa\beta^2\frac{n^2}{4}b_{13}-\beta^4\frac{a_{13}}{b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\right)+\right.$$

$$\left.+a_{\hat{\omega}}^4\frac{z_0}{h^2}\left(\varkappa\beta^2\frac{n^2}{4}c_{13}+\beta^4\frac{b_{13}}{b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\right)\right]A_{1n}+ \tag{25}$$

$$+\left[a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}\left(\varkappa^2\frac{n^4}{16}c_{23}+\varkappa\beta^2\frac{n^2}{4}b_{23}+\beta^4\frac{a_{23}}{b_y^4}\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\right)-\right.$$

$$\left.-a_{\hat{\omega}}^4\frac{y_0}{h^2}\left(\varkappa\beta^2\frac{n^2}{4}c_{23}+\beta^4\frac{b_{23}}{b_y^4}\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\right)\right]A_{2n}+$$

$$a_f^2c_{33}\left[\varkappa^2\frac{n^4}{16}-\varkappa\beta^2\frac{n^2}{4}(\varkappa_{30}+\varkappa_{40})+\beta^4x_{30}\varkappa_{40}\left(1-\frac{P_0}{P_{30}}\right)\right]A_{3n}-$$

$$-\frac{1}{2}\beta^4\in\frac{1}{b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\left(a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}a_{13}-a_{\hat{\omega}}^4\frac{z_0}{h^2}b_{13}\right)(A_{1(n+2)}+A_{1(n-2)})+$$

$$+\frac{1}{2}\beta^4\in\frac{1}{b_y^4}\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\left(a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}a_{23}-a_{\hat{\omega}}^4\frac{y_0}{h^2}b_{23}\right)(A_{2(n+2)}+A_{2(n-2)})-$$

$$-\frac{1}{2}\beta^4\in a_f^2c_{33}\varkappa_{30}\varkappa_{40}\frac{P_0}{P_{30}}(A_{3(n+2)}+A_{3(n-2)})=0.$$

Din identificarea termenilor în sin $\frac{n\tau}{2}$, rezultă un sistem identic cu sistemul (25), dar care conține constantele B_{in} în locul constantelor A_{in}.

Sistemul (25) este valabil pentru orice $n \geqslant 3$; pentru $n = 1$ și $n=2$ el suferă unele modificări care se operează cu ajutorul relațiilor:

$$[A_{i(n-2)}]_{n=1} = A_{i1}; \qquad [B_{i(n-2)}]_{n=1} = -B_{i1},$$

$$[A_{i(n-2)}]_{n=2} = 2A_{i0}; \qquad [B_{i(n-2)}]_{n=2} = 0. \tag{26}$$

De asemenea, se observă că pentru $n = 0$, sistemul (25) se transformă în sistemul (24) dacă este îndeplinită condiția

$$[A_{i(n-2)}]_{n=0} = 0. \tag{27}$$

Scriind două sisteme de forma (25), unul pentru n și altul pentru $n+2$, alegînd ca necunoscute constantele A_{in} și $A_{i(n+2)}$, neglijînd termenii care conțin necunoscutele $A_{i(n-2)}$ și $A_{i(n+4)}$, se obține un sistem omogen de șase ecuații cu șase necunoscute a cărui condiție de compatibilitate reprezintă tocmai condiția de pierdere a stabilității dinamice [2].

Dacă se introduc notațiile:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix}
-\varkappa\frac{n^2}{4} + & 0 & z_0\varkappa_{10}\left[\varkappa\frac{n^2}{4}b_z^4\frac{c_{13}}{a_{11}} + \right. \\
+\varkappa_{10}\beta^2\left(1-\frac{P_0}{P_{10}}\right) & & \left. + \beta^2\frac{b_{13}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\right] \\
0 & -\varkappa\frac{n^2}{4} + & -y_0\varkappa_{20}\left[\varkappa\frac{n^2}{4}b_y^4\frac{c_{23}}{a_{22}} + \right. \\
 & +\varkappa_{20}\beta^2\left(1-\frac{P_0}{P_{20}}\right) & \left. + \beta^2\frac{b_{23}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\right] \\
-a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}\left(\varkappa^2\frac{n^4}{16}c_{13} + \right. & a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}\left(\varkappa^2\frac{n^4}{16}c_{23} + \right. & a_f^2c_{33}\left[\varkappa^2\frac{n^4}{16} - \varkappa\beta^2\frac{n^2}{4}\times\right. \\
+\varkappa\beta^2\frac{n^2}{4}b_{13} + & +\varkappa\beta^2\frac{n^2}{4}b_{23} + & \left.\times(\varkappa_{30}+\varkappa_{40}) + \right. \\
\left. +\beta^4\frac{a_{13}}{b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\right) + & \left. +\beta^4\frac{a_{23}a_{22}}{b_y^4 b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\right) - & \left. +\beta^4\varkappa_{30}\varkappa_{40}\left(1-\frac{P_0}{P_{30}}\right)\right. \\
+a_{\hat{\omega}}^4\frac{z_0}{h^2}\left(\varkappa\beta^2\frac{n^2}{4}c_{13} + \right. & -a_{\omega}^4\frac{y_0}{h^2}\left(\varkappa\beta^2\frac{n^2}{4}c_{23} + \right. & \\
\left. +\beta^4\frac{b_{13}}{b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\right) & \left. +\beta^4\frac{b_{23}}{b_y^4}\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\right) &
\end{vmatrix} \tag{28}$$

şi

$$\delta=\begin{Vmatrix} -\frac{1}{2}\beta^2\in\varkappa_{10}\frac{P_0}{P_{10}} & 0 & \frac{1}{2}\beta^2\in\varkappa_{10}z_0\frac{b_{13}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}} \\ 0 & -\frac{1}{2}\beta^2\in\varkappa_{20}\frac{P_0}{P_{20}} & -\frac{1}{2}\beta^2\in\varkappa_{20}y_0\frac{b_{23}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}} \\ -\frac{1}{2}\beta^4\in\frac{1}{b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\times & \frac{1}{2}\beta^4\in\frac{1}{b_y^4}\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\times & -\frac{1}{2}\beta^4\in a_f^2c_{33}\varkappa_{30}\varkappa_{40}\frac{P_0}{P_{30}} \\ \times\left(a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}a_{13}-\right. & \times\left(a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}a_{23}-\right. & \\ \left.-a_{\hat{\omega}}^4\frac{z_0}{h^2}b_{13}\right) & \left.-a_{\hat{\omega}}^4\frac{y_0}{h^2}b_{23}\right) & \end{Vmatrix} \quad (29)$$

condiţia de pierdere a stabilităţii dinamice se scrie simbolic

$$\begin{vmatrix} \Delta_n & \delta \\ \delta & \Delta_{n+2} \end{vmatrix} = 0. \quad (30)$$

Determinantul (30) este de ordinul şase, din dezvoltarea lui rezultă o relaţie de legătură între rapoartele β şi $\in$ pentru o valoare oarecare a parametrului n. Funcţia $\in(\beta)$ astfel determinată, reprezintă locul geometric al punctelor din planul $\in-\beta$ care separă zona soluţiilor stabile — situată, conform teoremei lui O. Haupt [8], în concavitatea curbei $\in(\beta)$ — de zona soluţiilor instabile. Întrucît există o pereche de soluţii fundamentale, alcătuită din soluţiile $\cos\frac{n\tau}{2}$ şi $\sin\frac{n\tau}{2}$, pentru fiecare din ele se poate scrie cîte o ecuaţie de forma (30). Aşadar pentru un n dat există două curbe $\in(\beta)$ ce se intersectează în puncte situate pe axa β şi care cuprind între ele zona soluţiilor instabile ale sistemului de ecuaţii diferenţiale (22). Deoarece sistemul (25) scris în A_{in} diferă din cel scris în B_{in} numai pentru $n<3$, rezultă că pentru $n\geqslant 3$ cele două curbe $\in(\beta)$ se confundă, iar zona de instabilitate dinamică se reduce la o linie.

Se observă că în absenţa componentei dinamice a forţei P, adică pentru $\in=0$, toate elementele tabloului (29) sînt nule. În acest caz, determinantul (30) se poate dezvolta după regula lui Laplace şi devine

$$|\Delta_n|\cdot|\Delta_{n+2}|=0, \quad (31)$$

unde prin $|\Delta_n|$ se înţelege determinantul tabloului (28).

Întrucît ecuaţia (31) este echivalentă cu ecuaţiile

$$|\Delta_n|=0 \quad \text{şi} \quad |\Delta_{n+2}|=0, \quad (32)$$

se observă că pentru

$$\beta = \frac{n}{2} \quad \text{și, respectiv} \quad \beta = \frac{n+2}{2},$$

ecuațiile (32) devin identice cu ecuația (17) scrisă pentru $P = P_0$.

În consecință, atunci cînd componenta dinamică a sarcinii axiale este nglijabilă ($\epsilon \to 0$), instabilitatea dinamică se produce pentru rapoarte :

$$\frac{p}{\Omega} = \frac{n}{2}, \tag{33}$$

unde n un număr natural : $n = 1, 2, 3 \ldots$

Evident că n poate lua și valoarea zero întrucît aceasta, fiind echivalentă cu condiția $\varkappa = 0$, corespunde stării de pierdere a stabilității statice.

Așadar, pierderea stabilității se poate produce fie prin flambaj, fie prin rezonanța barei cu componenta dinamică a sarcinii de compresiune. Într-adevăr, un studiu mai detaliat al modului în care se face pierderea stabilității dinamice conduce la concluzia că dacă componenta statică P_0 a sarcinii de compresiune este egală cu valoarea sarcinii critice statice, flambajul nu se produce decît dacă n este zero sau are o valoare pară. Pentru orice alte valori ale lui P_0, pierderea stabilității se produce numai prin rezonanță și are loc pentru valori impare ale lui n.

3. CALCULUL ZONELOR DE STABILITATE DINAMICĂ

Funcția $\epsilon(\beta)$, ce rezultă din relația (30), determină valoriler apoartelor ϵ și β, la care se face tranziția de la soluția stabilă la cea instabilă, pentru întregul plan $\epsilon - \beta$. Întrucît această funcție are o expresie complicată, pornind de la observația că β se poate dezvolta în serie după puterile lui ϵ, se va stabili o relație mai simplă de dependență între cele două rapoarte care, pentru valori mici ale lui ϵ, să prezinte o bună aproximație a funcției $\epsilon(\beta)$. Zonele de stabilitate dinamică astfel obținute vor putea servi la rezolvarea oricărei probleme practice deoarece în marea majoritate a cazurilor sînt îndeplinite condițiile : $0 < \epsilon < 1$ și $0 < \beta < 1$.

Așadar, pentru calculul aproximativ al zonelor de stabilitate dinamică, se presupune că atît soluția $\mathcal{T}_i(\tau)$ a sistemului de ecuații diferențiale (22), cît și pătratul raportului pulsațiilor (20) se dezvoltă în serie după puterile lui ϵ, cu ajutorul relațiilor :

$$\mathcal{T}_i(\tau) = \mathcal{T}_{i0} + \epsilon \mathcal{T}_{i1} + \epsilon^2 \mathcal{T}_{i2} + \ldots$$

$$\beta^2 = \beta_0^2 + \epsilon\beta_1^2 + \epsilon^2\beta_2^2 + \ldots \tag{34}$$

Înlocuind în sistemul (22) și grupînd termenii după puterile lui ϵ, ecuațiile obținute sînt satisfăcute numai dacă coeficienții tuturor puterilor lui ϵ sînt nuli. Din această condiție rezultă o serie de sisteme de ecuații, care reprezintă relațiile de recurență pentru funcțiile $\mathcal{T}_{ij}(\tau)$ exprimate cu

ajutorul coeficienților β_j^2 considerați ca parametri. Astfel, utilizînd notațiile:

$$E_{1j} = \varkappa \mathcal{T}''_{1j} + \varkappa_{10}\beta_0^2\left(1 - \frac{P_0}{P_{10}}\right)\mathcal{T}_{1j} - z_0\varkappa_{10}\left[\varkappa b_z^4 \frac{c_{13}}{a_{11}}\mathcal{T}''_{3j} - \frac{b_{13}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\beta_0^2\mathcal{T}_{3j}\right],$$

$$E_{2j} = \varkappa \mathcal{T}''_{2j} + \varkappa_{20}\beta_0^2\left(1 - \frac{P_0}{P_{20}}\right)\mathcal{T}_{2j} + y_0\varkappa_{20}\left[\varkappa b_y^4 \frac{c_{23}}{a_{22}}\mathcal{T}''_{3j} - \beta_0^2\frac{b_{23}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\mathcal{T}_{3j}\right],$$

$$E_{3j} = a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}\left[-\varkappa^2 c_{13}\mathcal{T}^{IV}_{1j} + \varkappa\beta_0^2 b_{13}\mathcal{T}''_{1j} - \beta_0^4\frac{a_{13}}{b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\mathcal{T}_{1j}\right] - \tag{35}$$

$$- a_{\hat{\omega}}^4\frac{z_0}{h^2}\left[\varkappa\beta_0^2 c_{13}\mathcal{T}''_{1j} - \beta_0^4\frac{b_{13}}{b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\mathcal{T}_{1j}\right] + a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}\left[\varkappa^2 c_{23}\mathcal{T}^{IV}_{2j} -\right.$$

$$\left. - \varkappa\beta_0^2 b_{23}\mathcal{T}''_{2j} + \beta_0^4\frac{a_{23}}{b_y^4}\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\mathcal{T}_{2j}\right] + a_{\hat{\omega}}^4\frac{y_0}{h^2}\left[\varkappa\beta_0^2 c_{23}\mathcal{T}''_{2j} - \beta_0^4\frac{b_{23}}{b_y^4}\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\mathcal{T}_{2j}\right] +$$

$$+ a_f^2 c_{33}\left[\varkappa^2\mathcal{T}^{IV}_{3j} + \varkappa\beta_0^2(\varkappa_{30}+\varkappa_{40})\mathcal{T}''_{3j} + \beta_0^4\varkappa_{30}\varkappa_{40}\left(1 - \frac{P_0}{P_{30}}\right)\mathcal{T}_{3j}\right],$$

din anularea coeficienților lui ϵ^0 rezultă sistemul:

$$\begin{aligned} E_{10} &= 0, \\ E_{20} &= 0, \\ E_{30} &= 0, \end{aligned} \tag{36}$$

iar din anularea coeficienților lui ϵ și ϵ^2 se obține sistemul:

$$E_{11} = -\beta_1^2\varkappa_{10}\left[\left(1 - \frac{P_0}{P_{10}}\right)\mathcal{T}_{10} + z_0\frac{b_{13}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\mathcal{T}_{30}\right] + \beta_0^2\varkappa_{10}\frac{P_0}{P_{10}}\left(\mathcal{T}_{10} -\right.$$

$$\left. - z_0\frac{b_{13}}{b_{11}}\mathcal{T}_{30}\right)\cos\tau,$$

$$E_{21} = -\beta_1^2\varkappa_{20}\left[\left(1 - \frac{P_0}{P_{20}}\right)\mathcal{T}_{20} - y_0\frac{b_{23}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\mathcal{T}_{30}\right] +$$

$$+ \beta_0^2\varkappa_{20}\frac{P_0}{P_{20}}\left(\mathcal{T}_{20} + y_0\frac{b_{23}}{b_{22}}\mathcal{T}_{30}\right)\cos\tau,$$

$$E_{31} = -\varkappa\beta_1^2\left[a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}b_{13} - a_{\hat{\omega}}^4\frac{z_0}{h^2}c_{13}\right]\mathcal{T}''_{10} + \frac{1}{b_z^4}\frac{a_{j1}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\left[a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}a_{13} - \right. \tag{37}$$

$$\left. - a_{\hat{\omega}}^4\frac{z_0}{h^2}b_{13}\right](2\beta_0^2\beta_1^2\mathcal{T}_{10} + \beta_0^4\mathcal{T}_{10}\cos\tau) + \varkappa\beta_1^2\left[a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}b_{23} - a_{\hat{\omega}}^4\frac{y_0}{h^2}c_{23}\right]\mathcal{T}''_{20} -$$

$$- \frac{1}{b_z^4}\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\left[a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}a_{23} - a_{\hat{\omega}}^4\frac{y_0}{h^2}b_{23}\right](2\beta_0^2\beta_1^2\mathcal{T}_{20} + \beta_0^4\mathcal{T}_{20}\cos\tau) -$$

$$- a_f^2 c_{33}\left[\varkappa(\varkappa_{30}+\varkappa_{40})\beta_1^2\mathcal{T}''_{30} + \varkappa_{30}\varkappa_{40}\left(1 - \frac{P_0}{P_{30}}\right)2\beta_0^2\beta_1^2\mathcal{T}_{20} - \varkappa_{30}\varkappa_{40}\frac{P_0}{P_{30}}\beta_0^4\mathcal{T}_{30}\cos\tau\right],$$

și, respectiv, sistemul:

$$E_{12}=-\varkappa_{10}\left(1-\frac{P_0}{P_{10}}\right)[\beta_1^2\mathcal{T}_{11}+\beta_2^2\mathcal{T}_{10}]+\varkappa_{10}\frac{P_0}{P_{10}}[\beta_0^2\mathcal{T}_{11}+\beta_1^2\mathcal{T}_{10}]\cos\tau-$$

$$-z_0\varkappa_{10}\frac{b_{13}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}[\beta_1^2\mathcal{T}_{31}+\beta_2^2\mathcal{T}_{30}+(\beta_0^2\mathcal{T}_{31}+\beta_1^2\mathcal{T}_{30})\cos\tau],$$

$$E_{22}=-\varkappa_{20}\left(1-\frac{P_0}{P_{20}}\right)[\beta_1^2\mathcal{T}_{21}+\beta_2^2\mathcal{T}_{20}]+\varkappa_{20}\frac{P_0}{P_{20}}[\beta_0^2\mathcal{T}_{21}+\beta_1^2\mathcal{T}_{20}]\cos\tau+$$

$$+y_0\varkappa_{20}\frac{b_{23}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}[\beta_1^2\mathcal{T}_{31}+\beta_2^2\mathcal{T}_{30}+(\beta_0^2\mathcal{T}_{31}+\beta_1^2\mathcal{T}_{30})\cos\tau],$$

$$E_{32}=-\varkappa\left[a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}b_{13}-a_\omega^4\frac{z_0}{h^2}c_{13}\right](\beta_1^2\mathcal{T}_{11}''+\beta_2^2\mathcal{T}_{10}'')+\frac{1}{b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\times$$

$$\times\left[a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}a_{13}-a_\omega^4\frac{z_0}{h^2}b_{13}\right][2\beta_0^2\beta_1^2\mathcal{T}_{11}+(\beta_1^4+2\beta_0^2\beta_2^2)\mathcal{T}_{10}+(\beta_0^4\mathcal{T}_{11}+$$

$$+2\beta_0^2\beta_1^2\mathcal{T}_{10})\cos\tau]+\varkappa\left[a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}b_{23}-a_\omega^4\frac{y_0}{h^2}c_{23}\right](\beta_1^2\mathcal{T}_{21}''+\beta_2^2\mathcal{T}_{20}'')-$$

$$-\frac{1}{b_y^4}\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\left[a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}a_{23}-a_\omega^4\frac{y_0}{h^2}b_{23}\right][2\beta_0^2\beta_1^2\mathcal{T}_{21}+(\beta_1^4+2\beta_0^2\beta_2^2)\mathcal{T}_{20}+$$

$$+(\beta_0^4\mathcal{T}_{21}+2\beta_0^2\beta_1^2\mathcal{T}_{20})\cos\tau]-a_f^2c_{33}\Big\{\varkappa(\varkappa_{30}+\varkappa_{40})(\beta_1^2\mathcal{T}_{31}''+\beta_2^2\mathcal{T}_{30}'')+$$

$$+\varkappa_{30}\varkappa_{49}\left(1-\frac{P_0}{P_{30}}\right)[2\beta_0^2\beta_1^2\mathcal{T}_{31}+(\beta_1^4+2\beta_0^2\beta_2^2)\mathcal{T}_{30}]-\varkappa_{30}\varkappa_{40}\frac{P_0}{P_{30}}\times$$

$$\times(\beta_0^4\mathcal{T}_{31}+2\beta_0^2\beta_1^2\mathcal{T}_{30})\cos\tau\Big\}.$$

Sistemul omogen

$$\begin{aligned}E_{1j}&=0,\\E_{2j}&=0,\\E_{3j}&=0\end{aligned}\qquad(39)$$

este alcătuit din ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți. El admite soluții de forma

$$\mathcal{T}_{ij}=A_{ij}^n\cos\frac{n\tau}{2}\qquad(40)$$

sau de forma

$$\mathcal{T}_{ij} = B_{ij}^{n} \sin \frac{n\tau}{2}, \tag{41}$$

unde n este un număr natural.

Înlocuind oricare din aceste soluţii în sistemul considerat, acesta se reduce la un sistem algebric în care necunoscutele sînt constantele A_{ij}^{n} sau B_{ij}^{n} şi a cărui condiţie de compatibilitate este

$$\begin{vmatrix}
\varkappa_{10}\beta_0^2\left(1-\frac{P_0}{P_{10}}\right)-\varkappa\frac{n^2}{4} & 0 & z_0\varkappa_{10}\left[\varkappa\frac{n^2}{4}b_z^4\frac{c_{13}}{a_{11}}+\right. \\
 & & \left.+\beta_0^2\frac{b_{13}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\right] \\
0 & \varkappa_{20}\beta_0^2\left(1-\frac{P_0}{P_{20}}\right)-\varkappa\frac{n^2}{4} & -y_0\varkappa_{20}\left[\varkappa\frac{n^2}{4}b_y^4\frac{c_{23}}{a_{22}}+\right. \\
 & & \left.+\beta_0^2\frac{b_{23}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\right] \\
-a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}\left[\varkappa^2\frac{n^4}{16}c_{13}+\right. & a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}\left[\varkappa^2\frac{n^4}{16}c_{23}+\right. & a_f^2c_{33}\left[\varkappa^2\frac{n^4}{16}-\right. \\
+\varkappa\frac{n^2}{4}\beta_0^2b_{13}+ & +\varkappa\frac{n^2}{4}\beta_0^2b_{23}+ & -\varkappa\frac{n^2}{4}\beta_0^2(\varkappa_{30}+\varkappa_{40})+ \\
\left.+\beta_0^4\frac{a_{13}}{b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\right]+ & \left.+\beta_0^4\frac{a_{23}}{b_y^4}\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\right]- & \left.+\beta_0^4\varkappa_{30}\varkappa_{40}\left(1-\frac{P_0}{P_{30}}\right)\right] \\
+a_\omega^4\frac{z_0}{h^2}\left[\varkappa\frac{n^2}{4}\beta_0^2c_{13}+\right. & -a_\omega^4\frac{y_0}{h^2}\left[\varkappa\frac{n^2}{4}\beta_0^2e_{23}+\right. & \\
\left.+\beta_0^4\frac{b_{13}}{b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\right] & \left.+\beta_0^4\frac{b_{23}}{b_y^4}\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\right] &
\end{vmatrix} = 0. \tag{42}$$

Se observă că dacă

$$\beta_0 = \frac{n}{2}, \tag{43}$$

relaţia (42) devine identică cu ecuaţia pulsaţiilor proprii (17). Întrucît sistemul (36) se poate obţine din sistemul (39) punînd $j = 0$, soluţiile lui sînt date de relaţiile (40) şi (41) scrise pentru acest caz particular, adică

$$\mathcal{T}_{i0} = A_{i0}^{n} \cos \frac{n\tau}{2}, \tag{44}$$

$$\mathcal{T}_{i0} = B_{i0}^{n} \sin \frac{n\tau}{2}. \tag{45}$$

Determinarea termenilor secunzi ai seriilor (34) se face cu ajutorul sistemului (37) după ce în prealabil în acesta au fost substituite una din soluțiile (44) sau (45). Înlocuind soluția (44) în sistemul (37), acesta devine :

$$E_{11} = -\varkappa_{10}\beta_1^2\left[\left(1-\frac{P_0}{P_{10}}\right)A_{10}^n + z_0\frac{b_{13}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}A_{30}^n\right]\cos\frac{n\tau}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\varkappa_{10}\beta_0^2\frac{P_0}{P_{10}}\left(A_{10}^n - z_0\frac{b_{13}}{b_{11}}A_{30}^n\right)\left[\cos\frac{n+2}{2}\tau + \cos\frac{n-2}{2}\tau\right],$$

$$E_{21} = -\varkappa_{20}\beta_1^2\left[\left(1-\frac{P_0}{P_{20}}\right)A_{20}^n - y_0\frac{b_{23}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}A_{30}^n\right]\cos\frac{n\tau}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\varkappa_{20}\beta_0^2\frac{P_0}{P_{20}}\left(A_{20}^n + y_0\frac{b_{23}}{b_{11}}A_{30}^n\right)\left[\cos\frac{n+2}{2}\tau + \cos\frac{n-2}{2}\tau\right],$$

$$E_{31} = -\left\{\left[-a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}\left(\varkappa\frac{n^2}{4}b_{13} + 2\beta_0^2\frac{a_{13}}{b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\right) + \right.\right.$$

$$+a_{\overset{\wedge}{\omega}}^4\frac{z_0}{h^2}\left(\varkappa\frac{n^2}{4}c_{13} + 2\beta_0^2\frac{b_{13}}{b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\right)\Big]A_{10}^n + \qquad (46)$$

$$+\left[a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}\left(\varkappa\frac{n^2}{4}b_{23} + 2\beta_0^2\frac{a_{23}}{b_y^4}\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\right) -\right.$$

$$\left.-a_{\overset{\wedge}{\omega}}^4\frac{y_0}{h^2}\left(\varkappa\frac{n^2}{4}c_{23} + 2\beta_0^2\frac{b_{23}}{b_y^4}\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\right)\right]A_{20}^n +$$

$$\left.+a_f^2c_{33}\left[-\varkappa\frac{n^2}{4}(\varkappa_{30}+\varkappa_{40}) + 2\beta_0^2\varkappa_{30}\varkappa_{40}\left(1-\frac{P_0}{P_{30}}\right)\right]A_{30}^n\right\}\beta_1^2\cos\frac{n\tau}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\beta_0^4\left\{\left[a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}a_{13} - a_{\overset{\wedge}{\omega}}^4\frac{z_0}{h^2}b_{13}\right]\frac{1}{b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}A_{10}^n -\right.$$

$$-\frac{1}{b_y^4}\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\left[a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}a_{23} - a_{\overset{\wedge}{\omega}}^4\frac{y_0}{h^2}b_{23}\right]A_{20}^n +$$

$$\left.+a_f^2c_{33}\varkappa_{30}\varkappa_{40}\frac{P_0}{P_{30}}A_{30}^n\right\}\left(\cos\frac{n+2}{2}\tau + \cos\frac{n-2}{2}\tau\right).$$

În baza celor arătate mai sus rezultă că pentru orice $n \neq 1$ termenii în $\cos\frac{n\tau}{2}$ din ecuațiile (46) sînt termeni seculari. Pentru ca sistemul (46) să aibă soluție periodică este necesar ca termenii seculari să fie nuli. Aceasta corespunde cu satisfacerea condițiilor :

$$\varkappa_{10}\beta_1^2\left[\left(1-\frac{P_0}{P_{10}}\right)A_{10}^n+z_0\frac{b_{13}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}A_{30}^n\right]=0,$$

$$\varkappa_{20}\beta_1^2\left[\left(1-\frac{P_0}{P_{20}}\right)A_{20}^n-y_0\frac{b_{23}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}A_{30}^n\right]=0,$$

$$\beta_0^2\beta_1^2\left\{\left[-a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}\left(\varkappa b_{13}+2\frac{a_{13}}{b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+a_{\overset{\wedge}{\omega}}^4\frac{z_0}{h^2}\left(\varkappa c_{13}+2\frac{b_{13}}{b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\right)\right]A_{10}^n+ \tag{47}$$

$$+\left[a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}\left(\varkappa b_{23}+2\frac{a_{23}}{b_y^4}\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\right)-\right.$$

$$\left.\left.-a_{\overset{\wedge}{\omega}}^4\frac{y_0}{h^2}\left(\varkappa c_{23}+2\frac{b_{23}}{b_y^4}\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\right)\right]A_{20}^n+\right.$$

$$\left.+a_f^2c_{33}\left[-\varkappa(\varkappa_{30}+\varkappa_{40})+2\varkappa_{30}\varkappa_{10}\left(1-\frac{P_0}{P_{30}}\right)\right]A_{30}^n\right\}=0.$$

Constantele A_{i0}^n fiind ne nule, relațiile (47) sînt satisfăcute numai dacă $\beta_1{}^2=0$ sau dacă ecuațiile omogene obținute după simplificarea cu factorii din fața parantezelor alcătuiesc un sistem compatibil. Întrucît condiția de compatibilitate nu este satisfăcută decît de anumite valori ale componentei statice P_0, rezultă că în cazul general, cînd P_0 este arbitrar, condițiile (47)sînt îndeplinite numai dacă $\beta_1^2=0$.

Dacă în sistemul (47) se înlocuiește soluția (45) se obține un sistem asemănător cu (46). El conține funcția sinus și constantele B_{i0}^n în locul funcției cosinus și al constantelor A_{i0}^n. Și în acest caz se obțin concluzii identice cu cele de mai sus.

Așadar, soluția sistemului (46) este de forma :

$$\mathcal{T}_{i1}=A_{i1}^n\cos\frac{n+2}{2}\tau+C_{i1}^n\cos\frac{n-2}{2}\tau \tag{48}$$

sau de forme

$$\mathcal{T}_{i1} = B_{i1}^{n} \sin \frac{n+2}{2}\tau + D_{i1}^{n} \sin \frac{n-2}{2}\tau \tag{49}$$

și se caracterizează prin aceea că ea conține subarmonice care pot da rezonanță cu modurile de vibrație inferioare. Este evident că pentru $n=2$, termenul secund al soluției (48) devine constant, iar cel al soluției (49) se anulează; în consecință rezonanța subarmonică nu se mai produce.

Deoarece la $n=1$ are loc egalitatea $\cos \frac{n\tau}{2} = \cos \frac{n-2}{2}\tau$, structura sistemului (46) se modifică și, ca urmare, condiția de absență a termenilor seculari se exprimă prin relațiile:

$$\left[-\beta_1^2\left(1-\frac{P_0}{P_{10}}\right)+\frac{1}{8}\frac{P_0}{P_{10}}\right]A_{10}^{1} - z_0\frac{b_{13}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\left(\beta_1^2+\frac{1}{8}\right)A_{30}^{1} = 0,$$

$$\left[-\beta_1^2\left(1-\frac{P_0}{P_{20}}\right)+\frac{1}{8}\frac{P_0}{P_{20}}\right]A_{20}^{1} + y_0\frac{b_{23}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\left(\beta_1^2+\frac{1}{8}\right)A_{30}^{1} = 0,$$

$$\left\{\frac{1}{4}\left[a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}\left(\varkappa b_{13}+2\frac{a_{13}}{b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\right)-a_{\overset{\wedge}{\omega}}^{4}\frac{z_0}{h^2}\left(\varkappa c_{13}+2\frac{b_{13}}{b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\right)\right]\beta_1^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{32}\left(a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}a_{13}-a_{\overset{\wedge}{\omega}}^{4}\frac{z_0}{h^2}b_{13}\right)\frac{1}{b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\right\}A_{10}^{1} -$$

$$-\left\{\frac{1}{4}\beta_1^2\left[a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}\left(\varkappa b_{23}+2\frac{a_{23}}{b_y^4}\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\right)-\right.\right. \tag{50}$$

$$\left.-a_{\overset{\wedge}{\omega}}^{4}\frac{y_0}{h^2}\left(\varkappa c_{23}+2\frac{b_{23}}{b_y^4}\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\right)\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{32}\frac{1}{b_y^4}\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\left(a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}a_{23}-a_{\overset{\wedge}{\omega}}^{4}\frac{y_0}{h^2}b_{23}\right)\right\}A_{20}^{1}+$$

$$+\left\{\frac{1}{4}\beta_1^2 a_f^2 c_{33}\left[\varkappa(\varkappa_{30}+\varkappa_{40})-2\varkappa_{30}\varkappa_{40}\left(1-\frac{P_0}{P_{30}}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{32}a_f^2 c_{33}\varkappa_{30}\varkappa_{40}\frac{P_0}{P_{30}}\right\}A_{30}^{1} = 0.$$

Ecuațiile (50) alcătuiesc un sistem algebric omogen, a cărui condiție de compatibilitate este :

$$\begin{vmatrix} -\beta_1^2\left(1-\frac{P_0}{P_{10}}\right)\pm & 0 & -z_0\frac{b_{13}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\left(\beta_1^2\pm\frac{1}{8}\right) \\ \pm\frac{1}{8}\frac{P_0}{P_{10}} & & \\ 0 & -\beta_1^2\left(1-\frac{P_0}{P_{20}}\right)\pm & y_0\frac{b_{23}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\left(\beta_1^2\pm\frac{1}{8}\right) \\ & \pm\frac{1}{8}\frac{P_0}{P_{20}} & \\ \left(a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}b_{13}- & -\left(a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}b_{23}- & a_f^2c_{33}(\varkappa_{30}+\varkappa_{40})\frac{\varkappa}{4}\beta_1^2+ \\ -a_{\hat{\omega}}^4\frac{z_0}{h^2}c_{13}\Big)\frac{\varkappa}{4}\beta_1^2+ & -a_{\hat{\omega}}^4\frac{y_0}{h^2}c_{23}\Big)\frac{\varkappa}{4}\beta_1^2- & +a_f^2c_{33}\varkappa_{30}\varkappa_{40}\Big[-\frac{1}{2}\beta_1^2\times \\ +\frac{1}{b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\times & -\frac{1}{b_y^4}\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\times & \times\left(1-\frac{P_0}{P_{30}}\right)\pm\frac{1}{32}\frac{P_0}{P_{30}}\Big] \\ \times\left(a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}a_{13}-\right. & \times\left(a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}a_{23}-\right. & \\ -a_{\hat{\omega}}^4\frac{z_0}{h_2}b_{13}\Big)\times & -a_{\hat{\omega}}^4\frac{y_0}{h^2}b_{23}\Big)\Big[\frac{1}{2}\beta_1^2\pm & \\ \times\left[\frac{1}{2}\beta_1^2\pm\frac{1}{32}\right] & \pm\frac{1}{32}\Big] & \end{vmatrix} = 0 \tag{51}$$

și servește la determinarea valorilor lui β_1^2.

Întrucît la $n = 1$ are loc egalitatea $\sin\frac{n\tau}{2} = -\sin\frac{n-2}{2}\tau$, pentru soluția în sinus condițiile de absorbție atermenilor seculari sînt asemănătoare relațiilor (50) dar avînd constantele B_{i0}^1 în locul constantelor A_{i0}^1 și factorii 1/8 și 1/32 cu semnul minus.

Cu scopul de a fi valabilă atît pentru soluția în cosinus cît și pentru cea în sinus, relația (51) conține termeni cu semn dublu : semnul plus corespunde primei soluții, iar semnul minus celei de a doua.

Din examinarea sistemului (46) rezultă că soluțiile (48) și(49) rămîn valabile și pentru $n = 1$, dacă cel de-al doilea termen al acestora este nul, respectiv dacă $C_{i1}^1 = 0$ și $D_{i1}^1 = 0$.

Pentru $n = 0$, relațiile (43) și (44) conduc la $\beta_0 = 0$ și, respectiv, $\mathcal{T}_{i0} = A_{i0}$, iar sistemul (46) conține termeni constanți care, pentru a se conserva periodicitatea soluției, trebuie să fie nuli. Această condiție este

exprimată de relațiile (47) în care ultima ecuație este identic nulă deoarece conține pe β_0 ca factor, iar primele două sînt satisfăcute dacă $\beta_1^2 = 0$. În felul acesta, avînd $n = \beta_0 = \beta_1 = 0$, sistemul (46) devine omogen și identic cu sistemul (39) scris pentru $j = 1$. Se observă însă că pentru $\beta_0 = 0$ și $j = 1$ ecuațiile sistemului (39) conțin pe $\varkappa$ ca factor; ele sînt satisfăcute pentru $\varkappa = 0$ sau $A_{i1}^0 + C_{i1}^0 = 0$, deoarece sistemul algebric omogen obținut prin introducerea soluției (48) este incompatibil întrucît condiția sa de compatibilitate contrazice relația (17). La același rezultat se ajunge și pentru soluția în sinus deoarece, pentru $n = 0$, soluția (45) se anulează și sistemul (37) devine identic cu sistemul (39). Așadar cazul $n = 0$ corespunde instabilității statice.

Constantele A_{i1}^n și C_{i1}^n pot fi exprimate în funcție de constantele A_{i0}^n cu ajutorul sistemului (46) înlocuind soluția (48) și ținînd seama de condițiile care determină absența termenilor seculari. Identificînd termenii în $\cos\dfrac{n+2}{2}\tau$ și în $\cos\dfrac{n-2}{2}\tau$, se obțin două sisteme algebrice prin rezolvarea cărora rezultă relații de forma:

$$\begin{aligned} A_{i1}^n &= k_{i1}^n A_{10}^n + k_{i2}^n A_{20}^n + k_{i3}^n A_{30}^n, \\ C_{i1}^n &= \lambda_{i1}^n A_{10}^n + \lambda_{i2}^n A_{20}^n + \lambda_{i3}^n A_{30}^n, \end{aligned} \tag{52}$$

în care coeficienții k_{ij}^n și λ_{ij}^n reprezintă rapoarte de determinanți ce pot fi scrișI folosind regula lui Kramer și procedeul de descompunere a unui determinant în sume de determinanți. Relațiile (52) sînt valabile pentru orice $n \neq 0$, cu observația că la $n = 1$ ultima relație dispare deoarece s-a presupus $C_{i1}^1 = 0$.

Procedînd în mod similar pentru soluția (49) rezultă

$$\begin{aligned} B_{i1}^n &= k_{i1}^n B_{10}^n + k_{i2}^n B_{20}^n + k_{i3}^n B_{30}^n, \\ D_{i1}^n &= \lambda_{i1}^n B_{10}^n + \lambda_{i2}^n B_{20}^n + \lambda_{i3}^n B_{30}^n, \end{aligned} \tag{53}$$

unde $\lambda_{ij}^1 = 0$ deoarece $D_{i1}^1 = 0$ și $\lambda_{ij}^2 = 0$ întrucît la $n = 2$ soluția (49) nu conține decît primul termen.

Înlocuind relațiile (44) și (48) în sistemul (38) și grupînd termenii rezultă:

$$E_{12} = \left\{ -\beta_2^2 \varkappa_{10} \left[\left(1 - \frac{P_0}{P_{10}}\right) A_{10}^n + z_0 \frac{b_{13}}{b_{11}} \frac{P_0}{P_{10}} A_{30}^n \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \beta_0^2 \varkappa_{10} \frac{P_0}{P_{10}} \left[(A_{11}^n + C_{11}^n) - z_0 \frac{b_{13}}{b_{11}} (A_{31}^n + C_{31}^n) \right] \right\} \cos\frac{n\tau}{2} +$$

$$+ \left\{ -\beta_1^2 \varkappa_{10} \left[\left(1 - \frac{P_0}{P_{10}}\right) A_{11}^n + z_0 \frac{b_{13}}{b_{11}} \frac{P_0}{P_{10}} A_{31}^n \right] + \frac{1}{2} \beta_1^2 \varkappa_{10} \frac{P_0}{P_{10}} \left[A_{10}^n - \right.\right.$$

$$- z_0 \frac{b_{13}}{b_{11}} A_{30}^n \Big] \Big\} \cos \frac{n+2}{2} \tau + \Big\{ - \beta_1^2 \varkappa_{10} \Big[\Big(1 - \frac{P_0}{P_{10}} \Big) C_{11}^n +$$

$$+ z_0 \frac{b_{13}}{b_{11}} \frac{P_0}{P_{10}} C_{31}^n \Big] + \frac{1}{2} \beta_1^2 \varkappa_{10} \frac{P_0}{P_{10}} \Big[A_{10}^n - z_0 \frac{b_{13}}{b_{11}} A_{30}^n \Big] \Big\} \cos \frac{n-2}{2} \tau +$$

$$+ \frac{1}{2} \beta_0^2 \varkappa_{10} \frac{P_0}{P_{10}} \Big[A_{11}^n - z_0 \frac{b_{13}}{b_{11}} A_{31}^n \Big] \cos \frac{n+4}{2} \tau + \frac{1}{2} \beta_0^2 \varkappa_{10} \frac{P_0}{P_{10}} \Big[C_{11}^n -$$

$$- z_0 \frac{b_{13}}{b_{11}} C_{31}^n \Big] \cos \frac{n-4}{2} \tau,$$

$$E_{22} = \Big\{ - \beta_2^2 \varkappa_{20} \Big[\Big(1 - \frac{P_0}{P_{20}} \Big) A_{20}^n - y_0 \frac{b_{23}}{b_{22}} A_{30}^n \Big] + \frac{1}{2} \beta_0^2 \varkappa_{20} \frac{P_0}{P_{20}} \Big[(A_{21}^n + C_{21}^n) +$$

$$+ y_0 \frac{b_{23}}{b_{22}} (A_{31}^n + C_{31}^n) \Big] \Big\} \cos \frac{n\tau}{2} + \Big\{ - \beta_1^2 \varkappa_{20} \Big[\Big(1 - \frac{P_0}{P_{20}} \Big) A_{21}^n -$$

$$- y_0 \frac{b_{23}}{b_{22}} \frac{P_0}{P_{20}} A_{31}^n \Big] + \frac{1}{2} \beta_1^2 \varkappa_{20} \frac{P_0}{P_{20}} \Big(A_{20}^n + y_0 \frac{b_{23}}{b_{22}} A_{30}^n \Big) \Big\} \cos \frac{n+2}{2} \tau +$$

$$+ \Big\{ - \beta_1^2 \varkappa_{20} \Big[\Big(1 - \frac{P_0}{P_{20}} \Big) C_{21}^n - y_0 \frac{b_{23}}{b_{22}} \frac{P_0}{P_{20}} C_{31}^n \Big] + \frac{1}{2} \beta_1^2 \varkappa_{20} \frac{P_0}{P_{20}} \Big(A_{20}^n +$$

$$+ y_0 \frac{b_{23}}{b_{22}} A_{30}^n \Big) \Big\} \cos \frac{n-2}{2} \tau + \frac{1}{2} \beta_0^2 \varkappa_{20} \frac{P_0}{P_{20}} \Big[A_{21}^n + y_0 \frac{b_{23}}{b_{22}} A_{31}^n \Big] \cos \frac{n+4}{2} \tau +$$

$$+ \frac{1}{2} \beta_0^2 \varkappa_{20} \frac{P_0}{P_{20}} \Big[C_{21}^n + y_0 \frac{b_{23}}{b_{22}} C_{31}^n \Big] \cos \frac{n-4}{2} \tau, \qquad (54)$$

$$E_{32} = \Big\{ \Big[\varkappa \Big(a_f^2 \frac{z_0 + z_f}{h_f^2} b_{13} - a_{\hat{\omega}}^4 \frac{z_0}{h^2} c_{13} \Big) \beta_2^2 \Big(\frac{n}{2} \Big)^2 + \frac{1}{b_z^4} \frac{a_{11}}{b_{11}} \frac{P_0}{P_{10}} \Big(a_f^2 \frac{z_0 + z_f}{h_f^2} a_{13} -$$

$$- a_{\hat{\omega}}^4 \frac{z_0}{h^2} b_{13} \Big) (\beta_1^4 + 2\beta_0^2 \beta_2^2) \Big] A_{10}^n - \Big[\varkappa \Big(a_f^2 \frac{y_0 + y_f}{h_f^2} b_{23} - a_{\hat{\omega}}^4 \frac{y_0}{h^2} c_{23} \Big) \beta_2^2 \Big(\frac{n}{2} \Big)^2 +$$

$$+ \frac{1}{b_y^4} \frac{a_{22}}{b_{22}} \frac{P_0}{P_{20}} \Big(a_f^2 \frac{y_0 + y_f}{h_f^2} a_{23} - a_{\hat{\omega}}^4 \frac{y_0}{h^2} b_{23} \Big) (\beta_1^4 + 2\beta_0^2 \beta_2^2) \Big] A_{20}^n -$$

$$- a_f^2 c_{33} \Big[- \varkappa (\varkappa_{30} + \varkappa_{40}) \beta_2^2 \Big(\frac{n}{2} \Big)^2 + \varkappa_{30} \varkappa_{40} \Big(1 - \frac{P_0}{P_{30}} \Big) (\beta_1^4 + 2\beta_0^2 \beta_2^2) \Big] A_{30}^n +$$

$$+ \frac{1}{2b_z^4} \beta_0^4 \frac{a_{11}}{b_{11}} \frac{P_0}{P_{10}} \Big(a_f^2 \frac{z_0 + z_f}{h_f^2} a_{13} - a_{\hat{\omega}}^4 \frac{z_0}{h^2} b_{13} \Big) (A_{11}^n + C_{11}^n) -$$

$$- \frac{1}{2b_y^4} \beta_0^4 \frac{a_{22}}{b_{22}} \frac{P_0}{P_{20}} \Big(a_f^2 \frac{y_0 + y_f}{h_f^2} a_{23} - a_{\hat{\omega}}^4 \frac{y_0}{h^2} b_{23} \Big) (A_{21}^n + C_{21}^n) +$$

$$+\frac{1}{2}\beta_0^4 a_f^2 c_{33}\varkappa_{30}\varkappa_{40}\frac{P_0}{P_{30}}(A_{31}^n+C_{31}^n)\Big\}\cos\frac{n\tau}{2}+\Big\{\varkappa\Big(a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}b_{13}-$$

$$-a_{\hat{\omega}}^4\frac{z_0}{h_2}c_{13}\Big)\beta_1^2\Big(\frac{n+2}{2}\Big)^2A_{11}^n+\frac{1}{b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\Big(a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}a_{13}-$$

$$-a_{\hat{\omega}}^4\frac{z_0}{h^2}b_{13}\Big)\beta_0^2\beta_1^2(2A_{11}^n+A_{10}^n)-\varkappa\Big(a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}b_{23}-$$

$$-a_{\hat{\omega}}^4\frac{y_0}{h^2}c_{23}\Big)\beta_1^2\Big(\frac{n+2}{2}\Big)^2A_{21}^n-\frac{1}{b_y^4}\frac{a_{22}}{b_{22}}\beta_0^2\beta_1^2\frac{P_0}{P_{20}}\Big(a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}a_{23}-$$

$$-a_{\hat{\omega}}^4\frac{y_0}{h^2}b_{23}\Big)(2A_{21}^n+A_{20}^n)+a_f^2c_{33}\Big[\varkappa(\varkappa_{30}+\varkappa_{40})\beta_1^2\Big(\frac{n+2}{2}\Big)^2-$$

$$-2\beta_0^2\beta_1^2\varkappa_{30}\varkappa_{40}\Big(1-\frac{P_0}{P_{30}}\Big)\Big]A_{31}^n+a_f^2c_{33}\varkappa_{30}\varkappa_{40}\beta_0^2\beta_1^2\frac{P_0}{P_{30}}A_{30}\Big\}\cos\frac{n+2}{2}\tau+$$

$$+\Big\{\varkappa\Big(a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}b_{13}-a_{\hat{\omega}}^4\frac{z_0}{h^2}C_{13}\Big)\beta_1^2\Big(\frac{n-2}{2}\Big)^2C_{11}^n+$$

$$+\frac{1}{b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\beta_0^2\beta_1^2\frac{P_0}{P_{10}}\Big(a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}a_{13}-a_{\hat{\omega}}^4\frac{z_0}{h^2}b_{13}\Big)(2C_{11}^n+A_{10}^n)-$$

$$-\varkappa\Big(a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}b_{23}-a_{\hat{\omega}}^4\frac{y_0}{h^2}c_{23}\Big)\beta_1^2\Big(\frac{n-2}{2}\Big)^2C_{21}^n-$$

$$-\frac{1}{b_y^4}\frac{a_{22}}{b_{22}}\beta_0^2\beta_1^2\frac{P_0}{P_{20}}\Big(a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}a_{23}-a_{\hat{\omega}}^4\frac{y_0}{h^2}b_{23}\Big)(2C_{21}^n+A_{20}^n)+$$

$$+a_f^2c_{33}\Big[\varkappa(\varkappa_{30}+\varkappa_{40})\beta_1^2\Big(\frac{n-2}{2}\Big)^2-2\beta_0^2\beta_1^2\varkappa_{30}\varkappa_{40}\Big(1-\frac{P_0}{P_{30}}\Big)\Big]C_{31}^n+$$

$$+a_f^2c_{33}\varkappa_{30}\varkappa_{40}\beta_0^2\beta_1^2\frac{P_0}{P_{30}}A_{30}\Big\}\cos\frac{n-2}{2}\tau+\Big\{\frac{1}{2b_z^4}\beta_0^4\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\Big(a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}a_{13}-$$

$$-a_{\hat{\omega}}^4\frac{z_0}{h^2}b_{13}\Big)A_{11}^n-\frac{1}{2b_y^4}\beta_0^4\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\Big(a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}a_{23}-a_{\hat{\omega}}^4\frac{y_0}{h^2}b_{23}\Big)A_{21}^n+$$

$$+\frac{1}{2}a_f^2c_{33}\varkappa_{30}\varkappa_{40}\beta_0^2\frac{P_0}{P_{30}}A_{31}^n\Big\}\cos\frac{n+4}{2}\tau+$$

$$+\Big\{\frac{1}{2b_z^4}\beta_0^4\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\Big(a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}a_{13}-a_{\hat{\omega}}^4\frac{z_0}{h^2}b_{13}\Big)C_{11}^n-$$

$$-\frac{1}{2b_y^4}\beta_0^4\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\Big(a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}a_{23}-a_{\hat{\omega}}^4\frac{y_0}{h^2}b_{23}\Big)C_{21}^n+$$

$$+\frac{1}{2}a_f^2c_{33}\varkappa_{30}\varkappa_{40}\beta_0^2\frac{P_0}{P_{30}}C_{31}^n\Big\}\cos\frac{n-4}{2}\tau.$$

Pentru $n \neq 1$, ecuațiile (54) nu conțin termeni seculari dacă sînt satisfăcute condițiile:

$$
\begin{aligned}
&-\beta_2^2\varkappa_{10}\left[\left(1-\frac{P_0}{P_{10}}\right)A_{10}^n+z_0\frac{b_{13}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}A_{30}^n\right]+\\
&\quad+\frac{1}{2}\beta_0^2\varkappa_{10}\frac{P_0}{P_{10}}\left[(A_{11}^n+C_{11}^n)-z_0\frac{b_{13}}{b_{11}}(A_{31}^n+C_{31}^n)\right]=0,\\
&-\beta_2^2\varkappa_{20}\left[\left(1-\frac{P_0}{P_{20}}\right)A_{20}^n-y_0\frac{b_{23}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}A_{30}^n\right]+\\
&\quad+\frac{1}{2}\beta_0^2\varkappa_{20}\frac{P_0}{P_{20}}\left[(A_{21}^n+C_{21}^n)+y_0\frac{b_{23}}{b_{22}}(A_{31}^n+C_{31}^n)\right]=0,\\
&\beta_2^2\Bigg[\varkappa\left(a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}b_{13}-a_\omega^4\frac{z_0}{h^2}c_{13}\right)\left(\frac{n}{2}\right)^2+\\
&\quad+\frac{2}{b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\beta_0^2\left(a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}a_{13}-a_\omega^4\frac{z_0}{h^2}b_{13}\right)\Bigg]A_{10}^n-\\
&\quad-\beta_2^2\Bigg[\varkappa\left(a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}b_{23}-a_\omega^4\frac{y_0}{h^2}c_{23}\right)\left(\frac{n}{2}\right)^2+\\
&\quad+\frac{2}{b_y^4}\beta_0^2\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\left(a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}a_{23}-a_\omega^4\frac{y_0}{h^2}b_{23}\right)\Bigg]A_{20}^n+\\
&\quad+a_f^2c_{33}\beta_2^2\left[\varkappa(\varkappa_{30}+\varkappa_{40})\left(\frac{n}{2}\right)^2-2\beta_0^2\varkappa_{30}\varkappa_{40}\left(1-\frac{P_0}{P_{30}}\right)\right]A_{30}^n+\\
&\quad+\frac{1}{2b_z^4}\beta_0^4\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\left(a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}a_{13}-a_\omega^4\frac{z_0}{h^2}b_{13}\right)(A_{11}^n+C_{11}^n)-\\
&\quad-\frac{1}{2b_y^4}\beta_0^4\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\left(a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}a_{23}-a_\omega^4\frac{y_0}{h^2}b_{23}\right)(A_{21}^n+C_{21}^n)+\\
&\quad+\frac{1}{2}a_f^2c_{33}\beta_0^4\varkappa_{30}\varkappa_{40}\frac{P_0}{P_{30}}(A_{31}^n+C_{31}^n)=0.
\end{aligned}
\tag{55}
$$

În scrierea relațiilor (55) s-a ținut seama că, pentru valorile considerate ale lui n, anterior s-a obținut $\beta_1 = 0$. Rezultă că sistemul (54) conține numai termeni în $\cos\frac{n+4}{2}\tau$ și $\cos\frac{n-4}{2}\tau$.

Substituind relațiile (52) în ecuațiile (55) rezultă un sistem algebric omogen avînd ca necunoscute constantele A_{10}^n, A_{20}^n și A_{30}^n a cărui condiție de compatibilitate este

$$
\begin{vmatrix}
-\beta_2^2\left(1-\frac{P_0}{P_{10}}\right)+\frac{1}{2}\,\beta_0^2\frac{P_0}{P_{10}}\times & \frac{1}{2}\,\beta_0^2\frac{P_0}{P_{10}}\left[(k_{12}^n+\lambda_{12}^n)-\right. & -\beta_2^2 z_0\frac{b_{13}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}+\frac{1}{2}\,\beta_0^2\frac{P_0}{P_{10}}\times \\
\times\left[(k_{11}^n+\lambda_{11}^n)-z_0\frac{b_{13}}{b_{11}}(k_{31}^n+\lambda_{31}^n)\right] & \left.-z_0\frac{b_{13}}{b_{11}}(k_{32}^n+\lambda_{32}^n)\right] & \times\left[(k_{13}^n+\lambda_{13}^n)-z_0\frac{b_{13}}{b_{11}}(k_{33}^n+\lambda_{33}^n)\right] \\
\frac{1}{2}\,\beta_0^2\frac{P_0}{P_{20}}\left[(k_{21}^n+\lambda_{21}^n)+\right. & -\beta_2^2\left(1-\frac{P_0}{P_{20}}\right)+\frac{1}{2}\,\beta_0^2\frac{P_0}{P_{20}}\times & \beta_2^2 y_0\frac{b_{23}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}+\frac{1}{2}\,\beta_0^2\frac{P_0}{P_{20}}\left[(k_{23}^n+\right. \\
\left.+y_0\frac{b_{23}}{b_{22}}(k_{31}^n+\lambda_{31}^n)\right] & \times\left[(k_{22}^n+\lambda_{22}^n)+y_0\frac{b_{23}}{b_{22}}(k_{32}^n+\lambda_{32}^n)\right] & \left.+\lambda_{23}^n)+y_0\frac{b_{23}}{b_{22}}(k_{33}^n+\lambda_{33}^n)\right] \\
\beta_2^2\left[\varkappa\left(a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}b_{13}-a_{\hat{\omega}}^4\frac{z_0}{h^2}c_{13}\right)\frac{n^2}{4}+\right. & -\beta_2^2\left[\varkappa\left(a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}b_{23}-a_{\hat{\omega}}^4\frac{y_0}{h^2}c_{23}\right)\times\right. & \beta_2^2 a_f^2 c_{33}\left[\varkappa(\varkappa_{30}+\varkappa_{40})\frac{n^2}{4}-\right. \\
+\frac{2\beta_0^2}{b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\left(a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}a_{13}-\right. & \times\frac{n^2}{4}+\frac{2\beta_0^2}{b_y^4}\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\left(a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}a_{23}-\right. & -2\beta_0^2\varkappa_{30}\varkappa_{40}\left(1-\frac{P_0}{P_{30}}\right)\left.\right]+\frac{\beta_0^4}{2b_z^4}\times \\
\left.-a_{\hat{\omega}}^4\frac{z_0}{h^2}b_{13}\right)\left.\right]+\frac{\beta_0^4}{2b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\times & \left.-a_{\hat{\omega}}^4\frac{y_0}{h^2}b_{23}\right)\left.\right]+\frac{\beta_0^4}{2b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\times & \times\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\left(a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}a_{13}-a_{\hat{\omega}}^4\frac{z_0}{h^2}\times\right. \\
\times\left(a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}a_{13}-a_{\hat{\omega}}^4\frac{z_0}{h^2}b_{13}\right)\times & \times\left(a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}a_{13}-a_{\hat{\omega}}^4\frac{z_0}{h^2}b_{13}\right)\times & \left.\times b_{13}\right)(k_{13}^n+\lambda_{13}^n)-\frac{\beta_0^4}{2b_y^4}\frac{a_{22}}{b_{22}}\times \\
\times(k_{11}^n+\lambda_{11}^n)-\frac{\beta_0^4}{2b_y^4}\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\times & \times(k_{12}^n+\lambda_{12}^n)-\frac{\beta_0^4}{2b_y^4}\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\times & \times\frac{P_0}{P_{20}}\left(a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}a_{23}-a_{\hat{\omega}}^4\frac{y_0}{h^2}b_{23}\right)\times \\
\times\left(a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}a_{23}-a_{\hat{\omega}}^4\frac{y_0}{h^2}\right)\times & \times\left(a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}a_{23}-a_{\hat{\omega}}^4\frac{y_0}{h^2}b_{23}\right)\times & \times(k_{23}^n+\lambda_{23}^n)+\frac{1}{2}\,\beta_0^4 a_f^2\times \\
\times(k_{21}^n+\lambda_{21}^n)+\frac{1}{2}\,\beta_0^4 a_f^2 c_{33}\varkappa_{30}\varkappa_{40}\times & \times(k_{22}^n+\lambda_{22}^n)+\frac{1}{2}\,\beta_0^4 a_f^2 c_{33}\times & \times c_{33}\varkappa_{30}\varkappa_{40}\frac{P_0}{P_{30}}(k_{33}^n+\lambda_{33}^n) \\
\times\frac{P_0}{P_{30}}(k_{31}^n+\lambda_{31}^n) & \times\varkappa_{30}\varkappa_{40}\frac{P_0}{P_{30}}(k_{32}^n+\lambda_{32}^n) &
\end{vmatrix}=0. \quad (56)
$$

Această ecuație servește la determinarea lui β_2^2.

Înlocuind în sistemul (38) soluțiile (45) și (49) se obține aceeași relație. Rezultă că ecuația (56) este valabilă atît pentru soluția în sinus, cît și pentru cea în cosinus dar numai dacă $n > 2$. La $n = 2$, trebuie ținut seama că pentru soluția în cosinus $\lambda_{ij}^2 \neq 0$, în timp ce pentru soluția în sinus $\lambda_{ij}^2 = 0$.

Pentru $n = 1$ sînt îndeplinite egalitățile: $C_{i1}^1 = 0$ și $\cos\frac{n\tau}{2} = \cos\frac{n-2}{2}\tau$. Ca urmare, sistemul (54) nu conține termeni seculari dacă sînt satisfăcute relațiile:

$$
\begin{aligned}
&-\beta_2^2\left[\left(1-\frac{P_0}{P_{10}}\right)A_{10}^1+z_0\frac{b_{13}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}A_{30}^1\right]+\\
&+\frac{1}{2}\frac{P_0}{P_{10}}\left[\frac{1}{4}A_{11}^n+\beta_1^2A_{10}^1-z_0\frac{b_{13}}{b_{11}}\left(\frac{1}{4}A_{31}^1+\beta_1^2A_{30}^1\right)\right]=0,\\
&-\beta_2^2\left[\left(1-\frac{P_0}{P_{20}}\right)A_{20}^1-y_0\frac{b_{23}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}A_{30}^1\right]+\\
&+\frac{1}{2}\frac{P_0}{P_{20}}\left[\frac{1}{4}A_{21}^1+\beta_1^2A_{20}^1+y_0\frac{b_{23}}{b_{22}}\left(\frac{1}{4}A_{31}^1+\beta_1^2A_{30}^1\right)\right]=0,\\
&\frac{1}{4}\varkappa\beta_2^2\left(a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}b_{13}-a_\omega^4\frac{z_0}{h^2}c_{13}\right)A_{10}^1+\\
&+\frac{1}{b_z^4}\frac{a_{11}}{b_{11}}\frac{P_0}{P_{10}}\left(a_f^2\frac{z_0+z_f}{h_f^2}a_{13}-a_\omega^4\frac{z_0}{h^2}b_{13}\right)\left[\left(\beta_1^4+\frac{1}{2}\beta_2^2\right)A_{10}^1+\right.\\
&\left.+\frac{1}{32}A_{11}^1+\frac{1}{4}\beta_1^2A_{10}^1\right]-\frac{1}{4}\varkappa\beta_2^2\left(a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}b_{23}-a_\omega^4\frac{y_0}{h^2}c_{23}\right)A_{20}^1-\\
&-\frac{1}{b_y^4}\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{P_0}{P_{20}}\left(a_f^2\frac{y_0+y_f}{h_f^2}a_{23}-a_\omega^4\frac{y_0}{h^2}b_{23}\right)\left[\left(\beta_1^4+\frac{1}{2}\beta_2^2\right)A_{20}^1+\right.\\
&\left.+\frac{1}{32}A_{21}^1+\frac{1}{4}\beta_1^4A_{20}^1\right]+a_f^2c_{33}\left[\varkappa(\varkappa_{30}+\varkappa_{40})\frac{1}{4}\beta_2^2-\right.\\
&\left.-\varkappa_{30}\varkappa_{40}\left(1-\frac{P_0}{P_{30}}\right)\left(\beta_1^4+\frac{1}{2}\beta_2^2\right)\right]A_{30}^1+\\
&+a_f^2c_{33}\varkappa_{30}\varkappa_{40}\frac{P_0}{P_{30}}\left[\frac{1}{32}A_{32}^1+\frac{1}{4}\beta_1^2A_{30}^1\right]=0.
\end{aligned}
\tag{57}
$$

Înlocuind constantele A_{i1}^1 în funcție de A_{i0}^1 cu ajutorul primei relații (52), condiția de compatibilitate a sistemului algebric omogen (57) se scrie:

$$
\begin{vmatrix}
-\beta_2^2\left(1-\frac{P_0}{P_{10}}\right)+ & \frac{1}{2}\,\frac{P_0}{P_{10}}\left[\frac{1}{4}\,k_{12}^1-z_0\,\frac{b_{13}}{b_{11}}\,\frac{1}{4}\,k_{32}^1\right] & -z_0\,\frac{b_{13}}{b_{11}}\,\frac{P_0}{P_{10}}\left(\beta_2^2+\frac{1}{8}\,k_{33}^1\pm\right. \\
+\frac{1}{2}\,\frac{P_0}{P_{10}}\left[\frac{1}{4}\,k_{11}^1\pm\right. & & \left.\pm\frac{1}{2}\,\beta_1^2\right)+\frac{1}{8}\,\frac{P_0}{P_{10}}\,k_{13}^1 \\
\left.\pm\beta_1^2-z_0\,\frac{b_{13}}{b_{11}}\,\frac{1}{4}\,k_{31}^1\right] & & \\
\frac{1}{2}\,\frac{P_0}{P_{20}}\left[\frac{1}{4}\,k_{21}^1+y_0\,\frac{b_{23}}{b_{22}}\,\frac{1}{4}\,k_{31}^1\right] & -\beta_2^2\left(1-\frac{P_0}{P_{20}}\right)+\frac{1}{2}\,\frac{P_0}{P_{20}}\left[\frac{1}{4}\,k_{22}^1\pm\right. & y_0\,\frac{b_{23}}{b_{22}}\,\frac{P_0}{P_{20}}\left[\beta_2^2+\frac{1}{8}\,k_{33}^1\pm\right. \\
& \left.\pm\beta_1^2+y_0\,\frac{b_{23}}{b_{22}}\,\frac{1}{4}\,k_{32}^1\right] & \left.\pm\frac{1}{2}\,\beta_1^2\right]+\frac{1}{8}\,\frac{P_0}{P_{20}}\,k_{23}^1 \\
\frac{1}{4}\,\varkappa\beta_2^2\left(a_f^2\,\frac{z_0+z_f}{h_f^2}\,b_{13}-a_{\overset{\wedge}{\omega}}^4\,\frac{z_0}{h^2}\,c_{13}\right)+ & -\frac{1}{4}\,\varkappa\beta_2^2\left(a_f^2\,\frac{y_0+y_f}{h_f^2}\,b_{23}-a_{\overset{\wedge}{\omega}}^4\,\frac{y_0}{h^2}\,c_{23}\right)- & a_f^2\,c_{33}\left[\varkappa\,(\varkappa_{30}+\varkappa_{40})\frac{1}{4}\,\beta_2^2-\varkappa_{30}\times\right. \\
+\frac{1}{b_z^4}\,\frac{a_{11}}{b_{11}}\,\frac{P_0}{P_{10}}\left(a_f^2\,\frac{z_0+z_f}{h_f^2}\,a_{13}-a_{\overset{\wedge}{\omega}}^4\times\right. & -\frac{1}{b_y^4}\,\frac{a_{22}}{b_{22}}\,\frac{P_0}{P_{20}}\left(a_f^2\,\frac{y_0+y_f}{h_f^2}\,a_{23}- & \left.\times\varkappa_{40}\left(1-\frac{P_0}{P_{30}}\right)\left(\beta_1^4+\frac{1}{2}\,\beta_2^2\right)\right]+ \\
\left.\times\frac{z_0}{h^2}\,b_{13}\right)\left(\beta_1^4+\frac{1}{2}\,\beta_2^2+\frac{1}{32}\,k_{11}^1\pm\right. & \left.-a_{\overset{\wedge}{\omega}}^4\,\frac{y_0}{h^2}\,b_{23}\right)\left(\beta_1^4+\frac{1}{2}\,\beta_2^2+\frac{1}{32}\,k_{22}^1\pm\right. & +a_f^2\,c_{33}\,\varkappa_{30}\,\varkappa_{40}\,\frac{P_0}{P_{30}}\left[\frac{1}{32}\,k_{33}^1\pm\frac{1}{4}\,\beta_1^2\right]+ \\
\left.\pm\frac{1}{4}\,\beta_1^2\right)-\frac{1}{b_y^4}\,\frac{a_{22}}{b_{22}}\,\frac{P_0}{P_{20}}\left(a_f^2\,\frac{y_0+y_f}{h_f^2}\,a_{23}-\right. & \left.\pm\frac{1}{4}\,\beta_1^2\right)+\frac{1}{b_z^4}\,\frac{a_{11}}{b_{11}}\,\frac{P_0}{P_{10}}\left(a_f^2\,\frac{z_0+z_f}{h_f^2}\,a_{13}-\right. & +\frac{1}{b_z^4}\,\frac{a_{11}}{b_{11}}\,\frac{P_0}{P_{10}}\left(a_f^2\,\frac{z_0+z_f}{h_f^2}\,a_{13}-a_{\overset{\wedge}{\omega}}^4\,\frac{z_0}{h^2}\times\right. \\
\left.-a_{\overset{\wedge}{\omega}}^4\,\frac{y_0}{h^2}\;\;b_{23}\right)\frac{1}{32}\,k_{21}^1+ & \left.-a_{\overset{\wedge}{\omega}}^4\,\frac{z_0}{h^2}\,b_{13}\right)\frac{1}{32}\,k_{12}^1+a_f^2\,c_{33}\times & \left.\times b_{13}\right)\frac{1}{32}\,k_{13}^1-\frac{1}{b_y^4}\,\frac{a_{22}}{b_{22}}\,\frac{P_0}{P_{20}}\left(a_f^2\,\frac{y_0+y_f}{h_f^2}\times\right. \\
+a_f^2\,c_{33}\,\varkappa_{30}\,\varkappa_{40}\,\frac{P_0}{P_{10}}\,\frac{1}{32}\,k_{31}^1 & \times\varkappa_{30}\,\varkappa_{40}\,\frac{P_0}{P_{30}}\,\frac{1}{32}\,k_{32}^1 & \left.\times\,a_{23}-a_{\overset{\wedge}{\omega}}^4\,\frac{y_0}{h^2}\,b_{23}\right)\frac{1}{32}\,k_{23}^1.
\end{vmatrix}=0 \quad (58)
$$

După înlocuirea lui β_1 cu valorile obținute din rezolvarea ecuației (51), această relație permite determinarea lui β_2^2.

Se observă că întrucît pentru soluția în sinus, la $n = 1$ sînt îndeplinite relațiile $D_{i1}^1 = 0$ și $\sin \frac{n\tau}{2} = -\sin \frac{n-2}{2}\tau$, condițiile de absență a termenilor seculari din sistemul (54) sînt asemănătoare cu ecuațiile (57) dar avînd constantele B_{i0}^1 și B_{i1}^1 în locul constantelor A_{i0}^1 și A_{i1}^1 precum și unele modificări de semn care au fost puse în evidență direct pe condiția de compatibilitate (58) a acestora.

Ca și în cazul relației (51), termenii avînd semn dublu se iau cu semnul plus pentru soluția în cosinus și respectiv cu semnul minus pentru cea în sinus.

Pentru $n = 0$ sistemul (54) conține termeni constanți care, în scopul conservării periodicității soluției, trebuie să fie nuli. Această condiție este exprimată de relațiile (55) care, întrucît $\beta_0 = 0$, sînt satisfăcute numai pentru $\beta_2^2 = 0$, dacă componenta statică P_0 a forței de compresiune are o valoare diferită de cea critică.

Deoarece la $n = 0$ s-a obținut $\beta_0^2 = \beta_1^2 = \beta_2^2 = 0$, din ultima serie (34) rezultă $\beta^2 = 0$, care, în conformitate cu relația (20), este echivalentă cu $p = 0$. Așadar cazul $n = 0$ corespunde pierderii stabilității statice, fenomen care se produce indiferent de valoarea raportului ϵ.

Presupunînd că raportul ϵ este mult mai mic decît unu, în relațiile (34) se pot neglija puterile superioare ale acestuia. Astfel, odată determinate valorile coeficienților β_0^2, β_1^2 și β_2^2, ultima relație (34) poate fi reprezentată grafic obținîndu-se zonele de stabilitate dinamică. Din relațiile (43), (51), (56) și (58) se constată că pentru $n = 1$ și $n = 2$ rezultă cîte două curbe tangente în punctele lor de intersecție ca axa β, în timp ce pentru celelalte valori ale lui n cîte una singură. Zonele de instabilitate dinamică sînt cuprinse între cele două curbe care rezultă pentru un n dat. Evident că pentru valorile lui n superioare lui doi, zonele de instabilitate se reduc la o linie.

Deși în cazul barei de secțiune oarecare relațiile care servesc la calculul lui β_1 și β_2 sînt destul de complicate, ele se simplifică substanțial pentru secțiunile simetrice. Astfel, dacă secțiunea admite două axe de simetrie, ecuația (51) are soluțiile :

$$\beta_1^2 = \pm \frac{1}{8} \frac{P_0}{P_{10} - P_0}, \quad \beta_1^2 = \pm \frac{1}{8} \frac{P_0}{P_{20} - P_0}, \tag{59}$$

$$\beta_1^2 = \pm \frac{\varkappa_4}{8(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \cdot \frac{P_0}{P_{30} - P_0}, \quad \beta_1^2 = \pm \frac{\varkappa_3}{8(\varkappa_3 - \varkappa_4)} \cdot \frac{P_0}{P_{30} - P_0}. \tag{60}$$

Soluțiile (59) servesc la studiul stabilității dinamice de încovoiere în cele două plane longitudinale de simetrie ale barei, iar soluțiile (60) la studiul stabilității dinamice de răsucire. Se observă că în timp ce pentru încovoiere se obține o singură soluție, pentru răsucire rezultă două soluții, întrucît la acest mod de solicitare barele cu pereți subțiri prezintă două pulsații proprii [4].

La secțiunile biaxial simetrice coeficienții k_{ij}^n și λ_{ij}^n din relațiile (52) sînt diferiți de zero numai pentru $i = j$. Coeficienții k_{ii}^n au expresiile:

$$k_{11}^n = -\frac{n^2}{8(n+1)} \cdot \frac{P_0}{P_{10} - P_0}, \quad k_{22}^n = -\frac{n^2}{8(n+1)} \cdot \frac{P_0}{P_{20} - P_0}, \tag{61}$$

$$k_{33}^n = \frac{n^4 \varkappa_4}{8(n+1)\,[(n+2)^2 \varkappa_3 - n^2 \varkappa_4]} \cdot \frac{P_0}{P_{30} - P_0}, \tag{62}$$

$$k_{33}^n = \frac{n^4 \varkappa_3}{8(n+1)\,[(n+2)^2 \varkappa_4 - n^2 \varkappa_3]} \cdot \frac{P_0}{P_{30} - P_0},$$

unde n este număr natural, iar coeficienții λ_{ii}^n au expresiile:

$$\lambda_{11}^n = \frac{n^2}{8(n-1)} \cdot \frac{P_0}{P_{10} - P_0}, \quad \lambda_{22}^n = \frac{n^2}{8(n-1)} \cdot \frac{P_0}{P_{20} - P_0}, \tag{63}$$

$$\lambda_{33}^n = -\frac{n^4 \varkappa_4}{8(n-1)\,[(n-2)^2 \varkappa_3 - n^2 \varkappa_4]} \cdot \frac{P_0}{P_{30} - P_0}, \tag{64}$$

$$\lambda_{33}^n = -\frac{n^4 \varkappa_3}{8(n-1)\,[(n-2)^2 \varkappa_4 - n^2 \varkappa_3]} \cdot \frac{P_0}{P_{30} - P_0},$$

care sînt definite numai pentru $n > 1$.

Ținînd seama de observația că la secțiunile biaxial simetrice $k_{ij}^n = 0$ și $\lambda_{ij}^n = 0$ pentru $i \neq j$, ecuația (56) conduce la soluțiile:

$$\beta_2^2 = \frac{n^2}{8}(k_{11}^n + \lambda_{11}^n) \frac{P_0}{P_{10} - P_0}, \quad \beta_2^2 = \frac{n^2}{8}(k_{22}^n + \lambda_{22}^n) \frac{P_0}{P_{20} - P_0}, \tag{65}$$

$$\beta_2^2 = -\frac{n^2 \varkappa_4}{8(\varkappa_3 - \varkappa_4)} \frac{P_0}{P_{30} - P_0} (k_{33}^n + \lambda_{33}^n), \tag{66}$$

$$\beta_2^2 = -\frac{n^2 \varkappa_3}{8(\varkappa_4 - \varkappa_3)} \frac{P_0}{P_{30} - P_0} (k_{33}^n + \lambda_{33}^n),$$

iar ecuația (58) la soluțiile :

$$\beta_2^2 = \frac{7}{128}\left[\frac{P_0}{P_{10}-P_0}\right]^2, \quad \beta_2^2 = \frac{7}{128}\left[\frac{P_0}{P_{20}-P_0}\right]^2, \tag{67}$$

$$\beta_2^2 = -\left(\frac{\varkappa_4}{\varkappa_4-\varkappa_3}\right)^2\left(\frac{P_0}{P_{30}-P_0}\right)^2\left[\frac{1}{16}\frac{\varkappa_4}{\varkappa_4-\varkappa_3}-\frac{1}{8}\right]-$$

$$-\frac{\varkappa_4^2}{128\,(9\varkappa_3-\varkappa_4)\,(\varkappa_3-\varkappa_4)}\left(\frac{P_0}{P_{30}-P_0}\right)^2,$$

$$\beta_2^2 = -\left(\frac{\varkappa_3}{\varkappa_3-\varkappa_4}\right)^2\left(\frac{P_0}{P_{30}-P_0}\right)^2\left[\frac{1}{16}\frac{\varkappa_3}{\varkappa_3-\varkappa_4}-\frac{1}{8}\right]-$$

$$-\frac{\varkappa_3^2}{128\,(9\varkappa_4-\varkappa_3)\,(\varkappa_4-\varkappa_3)}\left(\frac{P_0}{P_{30}-P_0}\right)^2. \tag{68}$$

Ca și pentru β_1^2, din relațiile (61) — (68) rezultă că atît coeficienții k_{ii}^n și λ_{ii}^n, cît și β_2^2 posedă cîte o singură soluție pentru încovoiere și cîte două soluții pentru răsucire.

Utilizînd relațiile (43), (65), (66) și $\beta_1^2=0$ pentru $n>1$ și relațiile (59), (60), (67), (68) și $\beta_0^2 = \frac{1}{4}$ pentru $n=1$, cu ajutorul celei de a doua formule (34) se pot scrie ecuațiile curbelor de stabilitate dinamică de încovoiere și de răsucire atît la soluția în cosinus, cît și la cea în sinus. Deoarece coeficienții acestor ecuații conțin rapoartele $\frac{P_0}{P_{10}}$, $\frac{P_0}{P_{20}}$, $\frac{P_0}{P_{30}}$ ca parametri, fiecare ecuație în parte descrie o familie de curbe. Rezultă că pentru încovoiere aceste curbe nu depind decît de parametrii respectivi; ele nu sînt afectate de forma și dimensiunile secțiunii transversale care trebuie să îndeplinească numai condiția de a avea două axe de simetrie. În cazul răsucirii, curbele de stabilitate dinamică depind atît de forma și dimensiunile secțiunii transversale, cît și de lungimea barei prin intermediul celor două pulsații proprii $\varkappa_3$ și $\varkappa_4$.

Folosind aceste observații, în figura 1 au fost reprezentate cu linie continuă curbele stabilității dinamice de încovoiere pentru $n=1$ și $n=2$, la un raport $\frac{P_0}{P_{10}} = \frac{1}{5}$. Curbele repezentate cu linie întreruptă corespund stabilității dinamice de răsucire la aceleași valori ale lui n, pentru $\frac{P_0}{P_{30}} = \frac{1}{5}$. Ele au fost trasate pentru bara cheson dreptunghiurilor cu pereții de grosime constantă, încastrată la ambele capete și avînd rapoartele $\frac{h}{b} = 2$ și $\frac{l}{b} = 20$. Folosind ultima relație (16) și procedînd ca în lucrarea [4], pentru bara considerată, nesolicitată axial, rezultă următoarele valori ale pulsației

proprii adimensionale de răsucire: $\varkappa_{30} = 939{,}15$ și $\varkappa_{40} = 3{,}11$. Înlocuind în ultima relație (17 a), pentru $\frac{P_0}{P_{30}} = \frac{1}{5}$, se obține $\varkappa_3 = 944{,}73$ și $\varkappa_4 = 2{,}48$.

Întrucît prima pulsație proprie este de peste 380 de ori mai mare decît a doua, în relațiile (60), (66) și (68) poate fi neglijat $\varkappa_4$ în comparație cu $\varkappa_3$ și raportul $\frac{\varkappa_4}{\varkappa_3}$ față de unitate, obținîndu-se simplificări importante ale acestora. Curbele stabilității dinamice de încovoiere, reprezentate în figura 1, au ecuațiile:

$$\begin{aligned} &- \text{pentru } n = 1: \beta^2 = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{32}\epsilon + \frac{7}{2048}\epsilon^2, \\ &- \text{pentru } n = 2: \beta^2 = 1 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{48} \pm \frac{1}{16}\right)\epsilon^2, \end{aligned} \tag{69}$$

iar cele ale stabilității dinamice de răsucire, ecuațiile:

— pentru $n = 1$:

$$\beta^2 \approx \frac{1}{4}, \tag{70}$$

$$\beta^2 \approx \frac{1}{4} \pm \frac{1}{32}\epsilon + \frac{1}{256}\epsilon^2, \tag{71}$$

— pentru $n = 2$:

$$\beta^2 \cong 1. \tag{72}$$

$$\beta^2 \cong 1 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{48} \pm \frac{1}{16}\right)\epsilon^2. \tag{73}$$

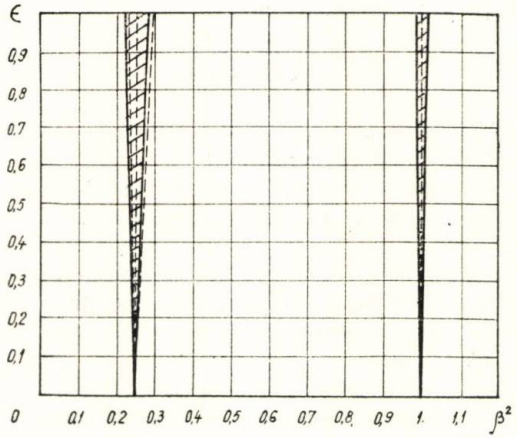


Fig. 1

Relațiile (70) și (72) corespund pulsației proprii de răsucire $\varkappa_3$, iar relațiile (71) și (73) pulsației $\varkappa_4$.

Din relaţiile (69), (71) şi (73) şi din diagrame rezultă că la $n = 1$, curbele stabilităţii dinamice de răsucire, corespunzătoare pulsaţiei $\varkappa_4$, sînt foarte apropiate de cele ale stabilităţii de încovoiere, iar la $n = 2$ se confundă cu acestea. De asemenea, din relaţţile (70) şi (72) se vede că atît la $n = 1$, cît şi la $n = 2$ curbele stabilităţii dinamice de răsucire, corespunzătoare pulsaţiei $\varkappa_3$, se reduc la dreapta de ecuaţie $\beta^2 = \frac{n^2}{4}$.

Rezultă deci că zonele de instabilitate dinamică sînt cu atît mai înguste cu cît frecvenţa proprie a barei este mai mare şi că la rapoarte $\frac{P_0}{P_{i0}}$ egale zonele de instabilitate dinamică de răsucire au aceeaşi întindere cu cele de încovoiere numai pentru pulsaţiile proprii de încovoiere şi răsucire de acelaşi ordin de mărime. Este evident că pentru rapoarte $\frac{P_0}{P_{10}}$ sau $\frac{P_0}{P_{20}}$ diferite de $\frac{P_0}{P_{30}}$, zonele instabilităţii dinamice de răsucire şi cele ale instabilităţii de încovoiere la acelaşi ordin, au intinderi diferite dar sînt tot suprapuse.

Cu toate că zonele instabilităţii dinamice de răsucire şi de încovoiere se suprapun, la acelaşi ordin, simultaneitatea celor două feluri de instabilităţi nu se produce decît dacă, pentru valori date ale lui ϵ şi Ω, rapoartele β^2 — corespunzătoare pulsaţiilor proprii de încovoiere şi de răsucire — sînt cuprinse între valorile absciselor punctelor de ordonată ϵ de pe curbele ce delimitează cea mai îngustă zonă de instabilitate dinamică. Bineînţeles că există posibilitatea producerii simultane a instabilităţii de încovoiere de ordinul întîi sau doi şi a unei instabilităţi de răsucire de ordin superior, corespunzătoare uneia din cele două pulsaţii proprii $\varkappa_3$ sau $\varkappa_4$.

Pentru $n = 1$ şi $n = 2$, zonele de pierdere a stabilităţii dinamice se află în regiunile haşurate ale diagramelor din figura 1, iar pentru $n > 2$ ele se reduc la o linie aşa cum s-a arătat anterior.

Primită la redacţie la 20 decembrie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. N. Bogolioubov, L. Mitropolski, *Les méthodes asymptotiques en théorie des oscillations non linéaires*, Gauthier-villars, Paris, 1962.
2. R. Bellman, *Stability theory of differential equations*, Dover Publications, Inc. New York, 1959.
3. N. Minorsky, *Nonlinear oscillations*, D. van Nostrand company, Inc., Princeton, NewJersey, 1962.
4. T. Pană, *Calculul pulsaţiilor proprii ale vibraţiilor de încovoiere-răsucire la barele cu pereţi subţiri avînd profilul închis*, St. cerc. mec. apl., **18**, 2 (1965).
5. — *Stabilitatea statică a barelor cu pereţi subţiri avînd profilul închis*, St. cerc. mec. apl., **27**, 5 (1968).
6. T. Pană, H. Gheorghiu, *Vibrations en flexion-torsion des barres à parois minces ayant le profil fermé soumises a compression*, ZAMM, *51* (1971).
7. — *Calculul pulsaţiilor proprii ale vibraţiilor de încovoiere-răsucire la barele cu pereţi subţiri avînd profilul închis solicitate la compresiune*, Bul. Inst. politehnic Bucureşti, **XXXIII**, 5 (1971).
8. J. J. Stoker, *Nonlinear vibrations*, Interscience Publishers, Inc. New York, 1950.
9. S. P. Timoshenko, J. M. Gere, *Teoria stabilităţii elastice*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1967.

STUDIUL FLUTTERULUI SUPERSONIC AL ÎNVELITORILOR CILINDRICE ORTOTROPE ŞI ETEROGENE. INFLUENŢA PARAMETRILOR CONSTRUCTIVI ŞI FIZICO-MECANICI

de G. V. VASILIEV
I.M.F.C.A.

În lucrare se studiază influenţa diferiţilor parametri geometrici şi fizico-mecanici asupra vitezei critice de flutter, a învelitorilor cilindrice-circulare, de lungime finită, formate din mai multe straturi ortotrope.
Ecuaţiile de mişcare ale învelitorii se deduc în baza teoriei tehnice Donnell-Vlasov, iar sarcina aerodinamică se stabileşte cu ajutorul teoriei pistonului. Se studiază forma axial-simetrică a flutterului, a cărui viteză critică se determină prin examinarea valorilor proprii ale problemei de limită.
Se face o analiză comparativă a condiţiilor de apariţie a vibraţiilor de tipul flutterului, în cazul variaţiei unor parametri geometrici şi fizico-mecanici ai structurii şi se trag concluzii asupra legăturii lor cu acest fenomen aeroelastic şi asupra influenţei separate şi de interacţiune ce o au asupra lui.

1. NOTAŢII ŞI SIMBOLURI

A — viteza redusă — parametru conform (4.13);
A_{cr} — valoarea critică a parametrului A;
A_{ik} — notaţie (4.4);
$\bar{a}_j$ — notaţii (5.9);
a_h — viteza sunetului a curentului de gaz neperturbat, în atmosfera standard, la altitudine H deasupra nivelului mării;
B — parametru (4.16);
b — coeficientul de amortizare al materialului (cap. 4);
$B_{ik}^{(i)}$ — constante „tehnice" (4.7);
C — parametru (4.35);
C_{ik} — notaţie (4.6);
D_{11} — rigiditatea învelitorii (4.3);
$E_\alpha^{(j)}, E_\beta^{(j)}$ — modulele de elasticitate ale stratului j pe direcţiile elasticităţii;

E_α, E_β — (fără indicarea stratului) — idem, ale stratului exterior;
$G^{(j)}$ — modulul elasticității transversale (4.7);
H_1, H_2 — parametrii de calcul (5.11), (5.12);
h — grosimea totală a învelitorii;
$\Delta h_{(j)}$ — grosimea stratului j (22);
h^* — parametru (2.1);
j — numărul stratului;
$k_{(j)}$ — coeficientul de ortotropie al stratului j, (2.6);
L — lungimea învelitorii;
L^* — parametru (2.1);
m_0 — notație (4.8);
$\mathfrak{M}$ — numărul lui Mach (4.17);
$\mathfrak{M}_{cr}$ — numărul lui Mach, critic;
p, $\overline{p}$ — greutăți specifice (9.1), (9.2);
Δp — presiunea exterioară (2.7);
$q_{(j)}, \overline{q}_{(j)}, \widetilde{q}_{(j)}$ — parametrii stratului (j) (2.6);
R — raza suprafeței mediane a învelitorii;
T_{11} — efortul axial, în ecuația (4.1);
t — timpul;
U — viteza curentului neperturbat;
u, v, w componentele vectorului deplasării pe generatoare, direc-toare și normală;
$\overline{w}(\eta)$ — funcția (v. 4.10);
x, y, z — sistemul de coordonate rectangulare;
z — număr complex (4.19);
$z_1 \ldots z_4$ — rădăcinile ecuației caracteristice (4.21);
α, β — sistemul de coordonate curbilinii;
$\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ — parametrii (4.24);
ζ — parametru (5.8);
η — coordonata adimensională (4.9)
$\varkappa^{(j)}$ — coeficient, în formula (4.7);
λ, λ^* — valori proprii (4.14), (4.15);
$\mu_\alpha^{(j)}, \mu_\beta^{(j)}$ — coeficienții lui Poisson ai stratului j;
$\Xi_B \Xi_C \Xi_{\mathfrak{M}}$ — parametrii, (5.5), (5.6), (5.7);
$\xi_{(j)}$ — parametrul grosimii stratului j (2.2);
$\overline{\xi}_1$ — parametru (5.10);
$\rho_{\mathfrak{M}}^{(j)}$ — densitatea masică a stratului j, cap. 4;
ρ_H — densitatea aerului la altitudinea H;
ψ, $\overline{\psi}$ — parametrii (9.3), (9.6);
Ψ — notație (9.5);
Ω — notație (4.5);
ω — frecvența complexă, cap. 4.

2. RELAȚII GEOMETRICE ȘI FIZICO-MECANICE

Învelitoarea cilindrică examinată (fig. 2.1) de lungime finită L și grosime totală h, este compusă din $2l-1$ ($l = 1,2,\ldots$) straturi omogene ortotrope sau izotrope de grosime constantă, așezate simetric în jurul

suprafeței mediane a învelitorii, de rază R, care este în același timp și suprafața mediană a stratului 1 (mediu) (fig. 2.2). Lungimea și grosimea învelitorii se exprimă prin parametrii adimensionali

$$L^* = \frac{L}{R}; \quad h^* = \frac{h}{R}. \tag{2.1}$$

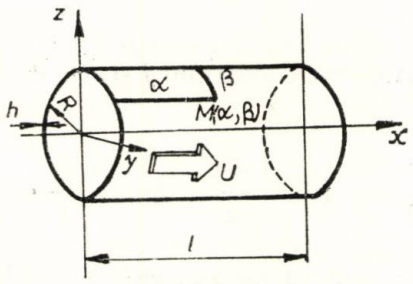


Fig. 2.1

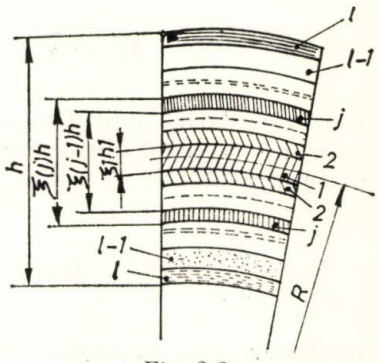


Fig. 2.2

Învelitoarea se raportează la sistemele de coordonate cartezian $Oxyz$ (fig. 2.1) și curbiliniu α, β pe suprafața mediană a învelitorii, liniile $\alpha(\beta = \text{const.})$ fiind îndreptate în sensul generatoarelor, iar $\beta(\alpha = \text{const.})$ în sensul cercurilor directoare.

Grosimea stratului curent j se exprimă în raport cu grosimea h a învelitorii cu ajutorul relației

$$\Delta h_{(j)} = \frac{\xi_{(j)} - \xi_{(j-1)}}{2} h, \tag{2.2}$$

unde $\xi_{(j)}$ și $\xi_{(j-1)}$ sînt parametrii adimensionali care reprezintă raportul distanțelor suprafețelor exterioare (respectiv celor interioare) ale stratului j la grosimea învelitorii.

Caracteristicile elastice și mecanice ale stratului j sînt:

— modulele de elasticitate pe direcțiile α, β: $E_\alpha^{(j)}$, $E_\beta^{(j)}$;

— coeficienții lui Poisson pe direcțiile α, β: $\mu_\alpha^{(j)}$, $\mu_\beta^{(j)}$;

— densitatea masică: $\rho_m^{(j)}$.

E_α și E_β se exprimă prin $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right]$, iar ρ_m prin $\left[\frac{\text{kgs}^2}{\text{m}^4}\right]$.

Direcțiile principale elastice ale fiecărui strat coincid cu direcțiile liniilor de coordonate α și β, iar învelitoarea în ansamblul ei este o învelitoare cilindrică ortotropă, cu direcțiile principale elastice corespunzătoare liniilor de coordonate α, β.

În calculele ulterioare, caracteristicile elastice pe direcția β se exprimă prin cele pe direcția α cu ajutorul relațiilor

$$E_\beta^{(j)} = k_{(j)} E_\alpha^{(j)}; \quad \mu_\beta^{(j)} = k_{(j)} \mu_\alpha^{(j)},$$

iar cele elastice şi fizice ale stratului j prin caracteristicile respective ale stratului l (exterior) (pentru simplificare se vor omite indicii (l) şi α ale caracteristicilor stratului exterior):

$$E_{\alpha}^{(j)} = q_{(j)}E; \quad E_{\beta}^{(j)} = q_{(j)}k_{(j)}E, \tag{2.3}$$

$$\mu_{\alpha}^{(j)} = \overline{q}_{(j)}\mu; \quad \mu_{\beta}^{(j)} = \overline{q}_{(j)}k_{(j)}\mu, \tag{2.4}$$

$$\rho_{m}^{(j)} = \widetilde{q}_{(j)}\rho_{m}. \tag{2.5}$$

În aceste relaţii s-au utilizat coeficienţii adimensionali $k_{(j)}$, $q_{(j)}$, $\overline{q}_{(j)}$, $\widetilde{q}_{(j)}$ care reprezintă raportul dintre caracteristicile stratului j şi cele corespunzătoare ale stratului l:

$$k_{(j)} = \frac{E_{\beta}^{(j)}}{E_{\alpha}^{(j)}} = \frac{\mu_{\beta}^{(j)}}{\mu_{\alpha}^{(j)}}; \quad q_{(j)} = \frac{E_{\alpha}^{(j)}}{E}; \quad \overline{q}_{(j)} = \frac{\mu_{\alpha}^{(j)}}{\mu}; \quad \widetilde{q}_{(j)} = \frac{\rho_{m}^{(j)}}{\rho_{m}}. \tag{2.6}$$

Învelitoarea este aşezată într-un curent de gaz, care se deplasează cu o viteză supersonică mare U ($U \geqslant 1{,}4\ \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$ fiind numărul lui Mach (v. 4.17).

Curentul se scurge pe partea exterioară a învelitorii, în interior fiind o presiune statică

$$p_i = 0.$$

Fie $\rho_H\left[\frac{\text{kgs}^2}{\text{m}^4}\right]$ — densitatea masică a gazului (aerului),

$a_H\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$ — viteza sunetului a gazului (aerului),

indicele H arată altitudinea în (m) deasupra nivelului mării.

Repartiţia presiunii aerodinamice pe suprafaţa învelitorii este dată de următoarea formulă din *teoria pistonului* (21), (23):

$$\Delta p(\alpha, t) = -a_H\rho_H\left(U\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial t}\right), \tag{2.7}$$

unde $w[m]$ — este deplasarea unui punct al suprafeţei mediane în sensul normalei (+ spre exterior),

t [s] — timpul,

Δp se exprimă în $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right]$ este (+) cînd acţionează spre interior (este suprapresiune).

Δp nu depinde de β deoarece scurgerea este axial-simetrică.

3. IPOTEZE DE CALCUL

I. Învelitoarea de lungime finită L este *rezemată liber* în secțiunile frontale

$$x = 0 \text{ și } x = L.$$

II. Învelitoarea este considerată *subțire*. Are loc inegalitatea

$$\frac{h}{R} \leqslant \frac{1}{20}.$$

III. Straturile din care se compune învelitoarea sînt legate rigid între ele pe întreaga suprafață de contact, și lucrează împreună fără lunecări, astfel ca învelitoarea să se deformeze ca un corp monolit.

IV. Se admite ipoteza Love-Kirchhoff pentru învelitoarea în ansamblul ei.

V. Materialul fiecărui strat se consideră elastic, omogen, ortotrop sau izotrop.

VI. Amortizarea structurală este neglijabilă în comparație cu cea aerodinamiclă (v. 5.13).

4. SCURTA EXPUNERE A TEORIEI, CARE STĂ LA BAZA METODEI DE CALCUL

Expunerea detaliată a părții teoretice poate fi găsită în lucrările (1)—(6), (36).

Pentru a face prezenta lucrare cît mai independentă, vom reproduce în cele ce urmează principalele puncte teoretice:

Ecuația rezolvată de mișcare a învelitorii se deduce în baza *teoriei tehnice Donnell-Vlasov* (27), (28) și are, în cazul ipotezelor de calcul adoptate, următorul aspect:

$$-D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + T_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{R^2 A_{22}} w - a_H \rho_H \left(U\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) -$$

$$- m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + b\frac{\partial w}{\partial t} = 0. \tag{4.1}$$

Condițiile de limită sînt:

$$w(0,\ t) = w(L,\ t) = 0\,;\ \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\right]_{\alpha=0} = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\right]_{\alpha=L} = 0. \tag{4.2}$$

Ecuația rezolvantă (4.1), împreună cu condițiile la limită (4.2), constituie *problema de limită inițială* pentru determinarea deplasărilor W și a altor mărimi legate de ele, care caracterizează viteza critică de flutter.

În relaţiile de mai sus s-au utilizat următoarele notaţii (*v*[10]):

$$D_{11} = \frac{1}{12}\sum_{j=1}^{l} B_{11}^{(j)} h^3 (\xi_{(j)}^3 - \xi_{(j-1)}^3), \tag{4.3}$$

$$A_{22} = \frac{C_{11}C_{66} - C_{16}^2}{\Omega}, \tag{4.4}$$

$$\Omega = (C_{11}C_{22} - C_{12}^2)\, C_{66} + 2C_{12}C_{16}C_{26} - C_{11}C_{26}^2 - C_{22}C_{16}^2, \tag{4.5}$$

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{l} B_{ik}^{(j)} h (\xi_{(j)} - \xi_{(j-1)})_{(i=1,\,2;\; k=1,\,2)}. \tag{4.6}$$

Mărimile B_{ik} sînt denumite „constante tehnice" [10] şi pentru straturile *ortotrope* au următoarele semnificaţii:

$$B_{11}^{(j)} = \frac{E q_{(j)}}{1 - k_{(j)} \bar{q}_{(j)}^2 \mu^2}; \quad B_{22}^{(j)} = \frac{E k_{(j)} q_{(j)}}{1 - k_{(j)} \bar{q}_{(j)}^2 \mu^2},$$

$$B_{12}^{(j)} = \frac{E \mu k_{(j)} q_{(j)} \bar{q}_{(j)}}{1 - k_{(j)} \bar{q}_{(j)}^2 \mu^2}; \quad B_{66}^{(j)} = \frac{\varkappa^{(j)} \sqrt{k_{(j)}}\, q_{(j)} E}{2(1 + \sqrt{k_{(j)}}\, \bar{q}_{(j)} \mu)} = G^{(j)},$$

$$B_{16} = B_{26} = 0. \tag{4.7}$$

Conform convenţiei de la § 2, prin E şi μ se înţeleg caracteristicile elastice în sensul α ale stratului l, adică

$$E = E_{\alpha}^{(l)} \text{ şi } \mu = \mu_{\alpha}^{(l)}; \qquad \varkappa^{(l)} \cong 1$$

este ceficientul din formulă care arată legătura între modulul lui Young şi cel transversal [$(4.7)_4$]

$$m_0 = \sum_{j=1}^{l} \rho_m^{(j)} h\, (\xi_{(j)} - \xi_{(j-1)}) = h \rho_m \sum_{j=1}^{l} \tilde{q}_{(j)} (\xi_{(j)} - \xi_{(j-1)}) \quad \text{în} \left[\frac{\text{kgs}^2}{\text{m}^3}\right], \tag{4.8}$$

$\rho_m = \rho_m^{(l)}$ — densitatea masică a stratului l,

$T_{11} = 0$ în $\left[\frac{\text{kgf}}{\text{m}}\right]$ — efortul normal axial care apare în învelitoare sub acţiunea presiunii interioare. Se ia egal cu zero în baza argumentării din [1],

$U \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$ — viteza curentului de gaz,

b — coeficientul de amortizare al mişcării datorită viscozităţii interne a materialului învelitorii.

În continuare, problema la limită inițială (4.1)—(4.2) se transformă, prin schimbare de variabilă

$$\eta = \frac{\alpha}{L}. \tag{4.9}$$

Soluția problemei se caută sub forma

$$w(\eta, t) = \overline{w}(\eta)e^{i\omega t}, \tag{4.10}$$

unde $\overline{w}(\eta)$ este o funcție reală a variabilei η,

ω — frecvența complexă.

Funcția (4.10) *este soluția problemei atunci, și numai atunci, cînd* $\overline{w}(\eta)$ *este funcția proprie a problemei de limită, iar parametrul* λ *(sau* λ^**) — valoare proprie a acestei probleme* :

$$\frac{d^4\overline{w}}{d\eta^4} + A\frac{d\overline{w}}{d\eta} = \lambda\overline{w} \qquad (0 \leqslant \eta \leqslant 1), \tag{4.11}$$

$$\overline{w}(0) = \overline{w}(1) = \left(\frac{d^2\overline{w}}{d\eta^2}\right)_{\eta=0} = \left(\frac{d^2\overline{w}}{d\eta^2}\right)_{\eta=1} = 0, \tag{4.12}$$

în care

$$A = a_H^2 \rho_H \frac{\mathfrak{M}L^3}{D_{11}} \tag{4.13}$$

este parametrul denumit *viteză redusă*,

$$\lambda = \lambda^* - B, \tag{4.14}$$

$$\lambda^* = \frac{L^4}{D_{11}}(m_0\omega^2 - i\omega\langle a_H\rho_H + b\rangle), \tag{4.15}$$

$$B = \frac{L^4}{D_{11}R^2A_{22}}, \tag{4.16}$$

$$\mathfrak{M} = \frac{U}{a_H} \text{ — numărul lui Mach.} \tag{4.17}$$

Avînd A și λ fixate, soluția generală a ecuației (4.11) este

$$\overline{w} = \sum_{i=1}^{4} C_i\overline{w}_i(A, \lambda; \eta), \tag{4.18}$$

în care $C_{i\,(i=1,2,3,4)}$ sînt constante de integrare.

Se înlocuiește

$$\overline{w} = \mathrm{e}^{-z\eta} \tag{4.19}$$

și rezultă *ecuația caracteristică*:

$$p(z, A, \lambda) \equiv z^4 - Az - \lambda = 0 \qquad (A \geqslant 0), \tag{4.20}$$

a cărei rădăcini $z_{i\,(i=1,2,3,4)}$ satisfac ecuația

$$F\underset{(i=1\ldots4)}{(z_i)} \equiv \frac{1}{g}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathrm{e}^{-z_1} & \mathrm{e}^{-z_2} & \mathrm{e}^{-z_3} & \mathrm{e}^{-z_4} \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & z_4^2 \\ z_1^2\mathrm{e}^{-z_1} & z_2^2\mathrm{e}^{-z_2} & z_3^2\mathrm{e}^{-z_3} & z_4^2\mathrm{e}^{-z_4} \end{vmatrix}, \tag{4.21}$$

unde

$$g(z_i) = (z_1-z_2)\,(z_1-z_3)\,(z_1-z_4)\,(z_2-z_3)\,(z_2-z_4)\,(z_3-z_4), \tag{4.22}$$

atunci și numai atunci *cînd* λ *este o valoare proprie a problemei de limită* (*4.11*)—(*4.12*).

În continuare, exprimînd rădăcinile z_3 și z_4 prin z_1 și z_2

$$z_{3,4} = -\frac{1}{2}(z_1 + z_2) \pm \sqrt{z_1 z_2 - \frac{3}{4}(z_1 + z_2)^2}, \tag{4.23}$$

și introducînd parametrii $\overline{\alpha}$ și $\overline{\beta}$,

$$\overline{\alpha} = \frac{1}{2}(z_1 + z_2); \qquad \overline{\beta} = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z_1 - z_2), \tag{4.24}$$

se obțin următoarele relații:

$$\left.\begin{aligned} &z_1 = \overline{\alpha} + \mathrm{i}\overline{\beta}; \qquad z_2 = \overline{\alpha} - \mathrm{i}\overline{\beta}; \\ &z_3 = -\overline{\alpha} + \sqrt{\overline{\beta} - \overline{\alpha}^2}; \qquad z_4 = -\overline{\alpha} - \sqrt{\overline{\beta}^2 - 2\overline{\alpha}^2}, \end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

$$A = 4\overline{\alpha}(\overline{\alpha}^2 - \overline{\beta}^2), \tag{4.26}$$

$$\lambda = (\overline{\alpha}^2 + \overline{\beta}^2)\,(\overline{\beta}^2 - 3\overline{\alpha}^2), \tag{4.27}$$

$$g(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) = 16\,\mathrm{i}\beta\sqrt{(\overline{\beta}^2 - 2\overline{\alpha}^2)\,[(3\overline{\alpha}^2 - \overline{\beta}^2)^2 + 4\overline{\alpha}^2\overline{\beta}^2}, \tag{4.28}$$

iar ecuația (4.21) exprimată prin $\bar{\alpha}$ și $\bar{\beta}$ se poate scrie:

$$F(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \equiv$$

$$\equiv \frac{(3\bar{\alpha}^4+\bar{\beta}^4-2\bar{\alpha}^2\bar{\beta}^2)\dfrac{\sin\bar{\beta}}{\bar{\beta}}\cdot\dfrac{\mathrm{sh}\sqrt{\bar{\beta}^2-2\bar{\alpha}^2}}{\sqrt{\bar{\beta}^2-2\bar{\alpha}^2}} - 2\bar{\alpha}^2\cos\bar{\beta}\,\mathrm{ch}\sqrt{\bar{\beta}^2-2\bar{\alpha}^2}+2\bar{\alpha}^2\mathrm{ch}(2\bar{\alpha})}{(3\bar{\alpha}^2-\bar{\beta}^2)+4\bar{\alpha}^2\bar{\beta}^2} = 0. \tag{4.29}$$

Sistemul (4.26)—(4.29);

$$F(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = 0, \qquad A = 4\bar{\alpha}(\bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2), \tag{4.30}$$

se numește *sistemul caracteristic* și are proprietatea că pentru o anumită valoare dată a parametrului A, *fiecărei soluții* $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ *îi corespunde o valoare proprie* λ *a problemei* (*4.11*)—(*4.12*). Invers, fiecărei valori proprii a problemei (4.11)—(4.12) îi corespunde, la un anumit A, cel puțin o soluție $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ a sistemului (4.30).

Prin eliminarea parametrului $\bar{\beta}$ din sistemul (4.30) rezultă ecuația

$$F^*(A, \bar{\alpha}) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{7\bar{\alpha}^4+\left(\bar{\alpha}^2-\dfrac{A}{4\bar{\alpha}}\right)^2}\left[\left(2\bar{\alpha}^4+\frac{A}{16\bar{\alpha}^2}\right)\frac{\sin\sqrt{\left(\bar{\alpha}^2-\dfrac{A}{4\bar{\alpha}}\right)}\sin\sqrt{\left(\bar{\alpha}^2+\dfrac{A}{4\bar{\alpha}}\right)}}{\sqrt{\left(\bar{\alpha}^2-\dfrac{A}{4\bar{\alpha}}\right)}\sqrt{\left(\bar{\alpha}^2+\dfrac{A}{4\bar{\alpha}}\right)}} - \right.$$

$$\left. - 2\bar{\alpha}^2\cos\sqrt{\left(\bar{\alpha}^2-\frac{A}{4\bar{\alpha}}\right)}\cos\sqrt{\left(\bar{\alpha}^2+\frac{A}{4\bar{\alpha}}\right)} + 2\bar{\alpha}^2\mathrm{ch}(2\bar{\alpha})\right] = 0, \tag{4.31}$$

valabilă pentru $A \geqslant 0$,
și din relațiile (4.27) și (4.30) se deduce ecuația

$$\lambda = \frac{A^2}{16\bar{\alpha}^2} - 4\bar{\alpha}^4. \tag{4.32}$$

Valoarea frecvenței complexe ω se explicitează din ecuația (4.15)

$$\omega_{n1.2} = \mathrm{i}\,\frac{a_H\rho_H + b}{2m_0}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m_0\lambda_n^* D_{11}}{(a_H\rho_H + b)^2 L^4}}\right]. \tag{4.33}$$

Pentru fiecare valoare proprie λ_n există două valori ω_n. Partea imaginară a uneia din aceste valori poate fi pozitivă, neutră sau negativă, corespunzîndu-i, respectiv, mişcarea oscilatorie stabilă, neutră sau nestabilă, la care amplitudinile vibraţiilor se sting, rămîn staţionare sau se amplifică în raport cu timpul.

Ecuaţia

$$\mathrm{Re}\ (\lambda) + B = C[\mathrm{Im}\ (\lambda)]^2, \tag{4.34}$$

în care

$$C = \frac{m_0 D_{11}}{(a_H \rho_H + b)^2 L^4} \tag{4.35}$$

defineşte în planul complex Re (λ)—Im (λ) *parabola stabilităţii* (fig. 4.1)

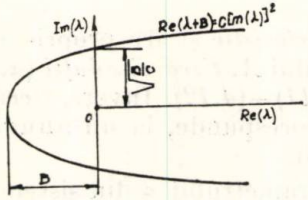


Fig. 4.1

care împarte planul Re (λ)—Im (λ) în zona stabilităţii, în interiorul parabolei, şi zona instabilităţii, în exteriorul ei.

În interiorul parabolei se află toate valorile proprii λ_n, cărora le corespund frecvenţele ω_n*), iar în exterior, acele care dau o mişcare cu amplitudine crescătoare în timp. Pe parabolă se află λ_n cărora le corespunde mişcarea neutră.

Sistemul caracteristic (4.30) are în funcţie de mărimea parametrului A, soluţii $\overline{\alpha}_n$, $\overline{\beta}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ cărora le corespund valorile proprii reale sau complexe $\lambda_n(A)$. Pentru găsirea vitezei critice de flutter se variază parametrul A (alţi parametri fiind fixaţi) pînă la obţinerea valorii A_{cr}, căreia îi corespund λ_n situate pe parabola stabilităţii.

Ne interesează numai valorile proprii λ complexe, deoarece în problema de faţă numai ele, conform [1], [2], pot fi situate şi în domeniul instabilităţii. Trecerea oricărei valori proprii complexe $\lambda_n(A)$, cînd variază parametrul A, prin parabola stabilităţii corespunde unei anumite viteze critice $A_{cr}\lambda_n$). Valoarea cea mai scăzută a A_{cr} corespunde valorii proprii $\lambda_1(A)$, de aceea este necesar să se determine numai această valoare proprie şi punctul de intersecţie al ei (cînd variază A) cu parabola stabilităţii.

În acest scop se trasează în planul $\mathrm{Re}(\lambda)$—$\mathrm{Im}(\lambda)$ curba $\mathrm{Re}(\lambda_1) = f[\mathrm{Im}(\lambda_1)]$ a valorii proprii λ_1 pentru parametrul A variabil şi se determină punctul de intersecţie a acestei curbe cu parabola stabilităţii (4.34). Acest punct va da valoarea vitezei reduse critice A_{cr} corespunzătoare valorii proprii λ_1 (fig. 4.2).

---

* care dau o mişcare oscilatorie amortizată.

Graficele funcției $\mathrm{Re}[\lambda_1(A)] = f[\mathrm{Im}\lambda_1(A)]$ reproduse din [1] sînt arătate în figura 4.3 pentru valorile A cuprinse între A_2 și $A \cong 3\,500$, iar în figura 4.4 între A_2 și $A = 110.000$.

NOTĂ. 1. A_2 este valoarea minimă A la care teoretic poate să se producă mișcarea nestabilă.

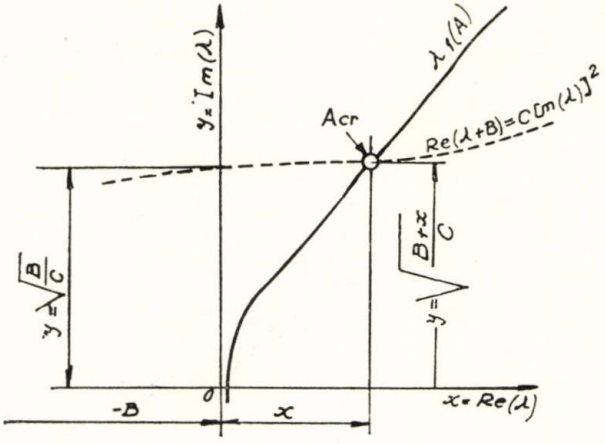


Fig. 4.2

Punctul de intersecție al curbei $\lambda_1(A)$ cu parabola stabilității, precum și viteza redusă A_{cr}, corespunzătoare acestui punct, se determină grafic din figurile 4.3 sau 4.4.

Ordonata punctului de intersecție se determină din ecuația (4.34).

$$y \equiv \mathrm{Im}[\lambda_1(A)] = \sqrt{\frac{B + \mathrm{Re}\,(\lambda_1)}{C}} \cong \sqrt{\frac{B}{C}}. \tag{4.36}$$

Simplificarea preconizată în (4.36) se bazează pe faptul că în cazurile concrete de calcul mărimea $\mathrm{Re}\,(\lambda_1)$ este mică în comparație cu B și, practic, poate fi neglijată. În felul acesta, ramura parabolei care intersectează curba $\lambda_1(A)$ se aproximează cu o linie orizontală.

2. Parabola stabilității are configurația arătată în figura 4.2 (------)*) pentru motivul că ordonata y se ia în acest grafic la scara logaritmică.

5. ORDINEA DE CALCUL ȘI FORMULELE DE LUCRU

În prezenta lucrare, care apare ca o continuare și dezvoltare a studiului [36] ne vom limita la investigarea influenței parametrilor k, q, ξ, L.

Ne limităm, de asemenea, la învelișul format din trei straturi, cu proprietăți de ortotropie sau izotropie, acesta fiind cazul cel mai important din punctul de vedere practic.

*) care nu seamănă cu o parabolă trasată în cordonatele obișnuite.

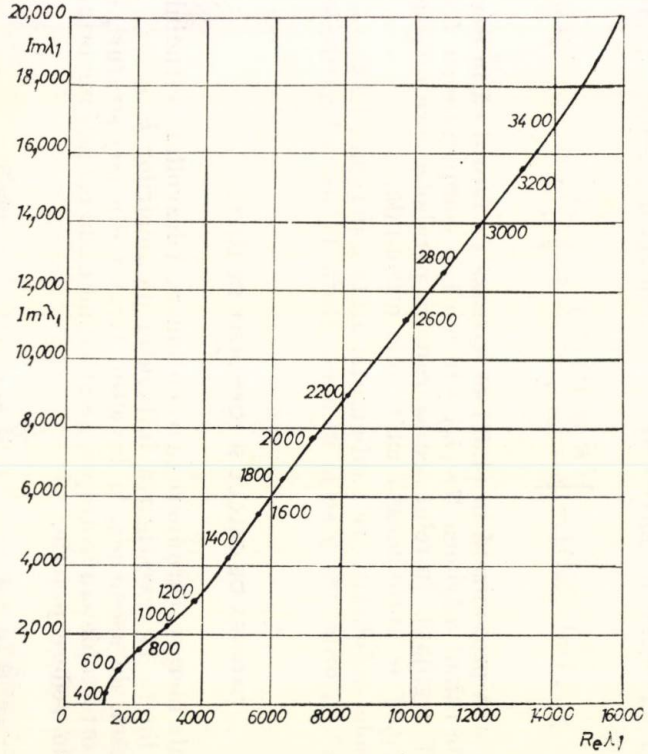

20,000
Imλ1
18,000
16,000
14,000
12,000
Imλ1
10,000
8,000
6,000
4,000
2,000
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
14000
16000
Reλ1
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
2200
2600
2800
3000
3200
3400

Fig. 4.3

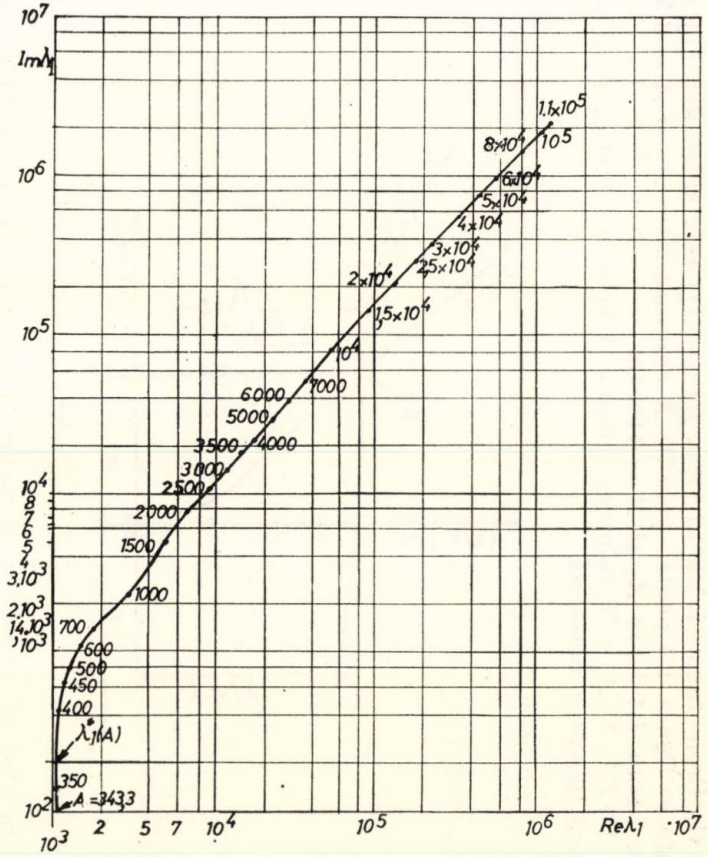

10^7
Imλ1
10^6
10^5
10^4
8
7
6
5
4
3,10^3
2.10^3
14.10^3
10^3
10^2
10^3
2
5
7
10^4
10^5
10^6
Reλ1
·10^7
1,1x10^5
8x10^4
10^5
6x10^4
5x10^4
4x10^4
3x10^4
2,5x10^4
2x10^4
1,5x10^4
10^4
7000
6000
5000
4000
3500
3000
2500
2000
1500
1000
700
600
500
450
400
λ1(A)
350
A =3433

Fig. 4.4

De aceea, vor fi indicate operațiile de calcul și formulele de lucru necesare numai pentru aceste cazuri. O dezvoltare mai completă, pentru cazuri mai generale (învelișuri cu $2l-1$ straturi — ortotrope) poate fi găsită în [36].

5.1. PARAMETRII DE CALCUL

Se stabilesc prin condițiile inițiale sau se calculează următorii parametri:

a) **parametrii geometrici:**

L, h, R, l (vezi §2),
L^*, h^* conf. (2.1); $\xi_{(j)}$ conf (2.2),

b) **parametrii elasto-fizici:**

E, μ, ρ_m (parametrii stratului l pe direcția α, conf. §2).
$k_{(j)}$, $q_{(j)}$, $\overline{q}_{(j)}$, $\widetilde{q}_{(j)}$, conf (2.6),

c) **parametri mediului gazos:**

ρ_H, a_H,

d) **parametrii structurali.**

Se ia în considerație o învelitoare formată din trei straturi ($l = 2$) (fig. 5.1),

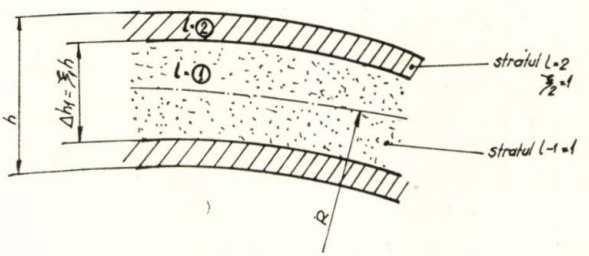


Fig. 5.1

se admite

$$\overline{q}_{(j)} = 1 \tag{5.1}$$

(straturile au același coeficient μ)

$$q_{(j)} = \widetilde{q}_{(j)} \tag{5.2}$$

(densitatea variază în același raport cu modulul de elasticitate).

În cazul izotropiei straturilor: $k_{(j)} = 1$. (5.3)

În cazul trecerii la monostrat: $q_{(j)} = \widetilde{q}_{(j)} = 1$. (5.4)

Se introduc următorii parametri structurali:
α) *înveliș cu trei straturi ortotrope*:

$$\Xi_B = \frac{(\bar{a}_1\xi_1+\bar{a}_2\bar{\xi}_1)(k_1\bar{a}\xi_1+k_2\bar{a}_2\bar{\xi}_1)-\mu^2(k_1\bar{q}_1\bar{a}_1\xi_1+k_2\bar{a}_2\bar{\xi}_1)^2}{(\bar{a}_1\xi_1^3+\bar{a}_2\langle 1-\xi_1^3\rangle)(\bar{a}_1\xi_1+\bar{a}_2\bar{\xi}_1)}, \tag{5.5}$$

$$\Xi_C = [\bar{a}_1\xi_1^3+\bar{a}_2\langle 1-\xi_1^3\rangle][1-\xi_1(1-\tilde{q}_1)], \tag{5.6}$$

$$\Xi_{\mathfrak{M}} = \bar{a}_1\xi_1^3+\bar{a}_2(1-\xi_1^3), \tag{5.7}$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{\Xi_B}{\Xi_C}}. \tag{5.8}$$

În aceste relații s-au utilizat notațiile:

$$\bar{a}_1 = \frac{q_1}{1-k_1\bar{q}_1^2\mu^2}, \quad \bar{a}_2 = \frac{1}{1-k_2\mu^2}, \tag{5.9}$$

$$\xi_2-\xi_1 = 1-\xi_1 = \bar{\xi}_1. \tag{5.10}$$

β) *Invelișul cu trei straturi izotrope* $(\bar{q}_1=1)(k_1=k_2=1)$:

$$\Xi_B = (1-\mu^2)\frac{\xi_1 q_1+\bar{\xi}_1}{1-\xi_1^3(1-q_1)}, \tag{5.5}'$$

$$\Xi_C = \bar{a}_2[1-\xi_1^3(1-q_1)][1-\xi_1(1-\tilde{q}_1)], \tag{5.6}'$$

$$\Xi_{\mathfrak{M}} = \bar{a}_2[1-\xi_1^3(1-q_1)], \tag{5.7}'$$

$$\zeta = \frac{1}{\Xi_{\mathfrak{M}}}\sqrt{\frac{\xi_1 q_1+\bar{\xi}_1}{1-\xi_1(1-\tilde{q}_1)}}, \tag{5.8}'$$

în cazul $q_1\cong\tilde{q}_1$, $\zeta = \dfrac{1}{\Xi_{\mathfrak{M}}}$. (5.8)''

γ) *Invelișul monostrat* $(l=1)$ *ortotrop*:

$$(q_1=\bar{q}_1=1;\ \bar{\xi}_1=1;\ k_1=k;\ \mu_\alpha=\mu;\ \mu_\beta=k\mu).$$

$$\bar{a}_1=\bar{a}_2=\bar{a}=\frac{1}{1-k\mu^2}, \tag{5.9}'$$

$$\Xi_B = k(1-k\mu^2), \tag{5.5}'''$$

$$\Xi_C = \Xi_{\mathfrak{M}} = \bar{a} = \frac{1}{1-k\mu^2} \tag{5.6}'''-(5.7)'''$$

$$\zeta = \sqrt{k}(1-k\mu^2). \tag{5.8}'''$$

ϑ) *Învelișul monostrat-izotrop* ($k = 1$; $\mu_\alpha = \mu$):

$$\Xi_B = 1 - \mu^2, \tag{5.5}'''$$

$$\Xi_c = \Xi_{\mathfrak{M}} = \frac{1}{1 - \mu^2}, \tag{5.6}''''-(5.7)''''$$

$$\zeta = \Xi_B = 1 - \mu^2. \tag{5.8}''''$$

e) *parametrii de calcul micști* (*structura* + *mediu*):

$$H_1 = \frac{12\,(a_H \varrho_H + b)}{\sqrt{E \varrho_m}}, \tag{5.11}$$

$$H_2 = \frac{E}{12\, a_H^2 \varrho_H}. \tag{5.12}$$

Se va considera în calcul $b \cong 0$ (5.13)

(amortizarea structurală este neglijabilă în raport cu cea aerodinamică) (vezi ipoteza VI). Această ipoteză s-a adoptat în lucrările din care derivă prezenta ([1], [36]).

5.2. CALCULUL VITEZEI CRITICE DE FLUTTER

a) *Determinarea ordonatei y*

$$y = H_1 \frac{L^{*4}}{h^{*3}} \zeta \tag{5.14}$$

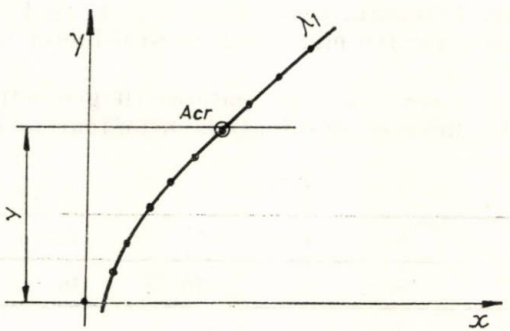


Fig. 5.2

Această relație s-a obținut din ecuația (4.36).

b) *Determinarea vitezei critice — reduse* A_{cr} *(4.13)*

Determinarea se face grafic, utilizînd figurile 4.3 sau 4.4.

Se face intersecția ordonatei y, calculată conform (5.14) cu curba $\mathrm{Re}\,[\lambda_1(A)] = f[\mathrm{Im}\lambda_1(A)]$ (vezi și fig. 4.2), și se determină $A = A_{cr}$, corespunzător punctului de intersecție.

c) *Determinarea Numărului Mach critic*

$$\mathfrak{M}_{cr} = H_2 \left(\frac{h^*}{L^*}\right)^3 \Xi_{\mathfrak{M}} A_{cr}. \tag{5.15}$$

6. INFLUENȚA PARAMETRILOR CONSTRUCTIVI ȘI FIZICO-MECANICI ASUPRA VITEZEI CRITICE DE FLUTTER

În continuare, în baza teoriei prezentate în capitolele precedente se face o investigație referitoare la influența diferiților parametri constructivi și fizico-mecanici asupra vitezei critice de flutter, la învelitorile de categoria celora propuse spre examinare în prezenta lucrare.

După cum s-a arătat anterior, scopul final al acestei investigații este obținerea unor structuri aeronautice optime din punctul de vedere al vitezei critice de flutter.

Se va urmări în mod special studiul influenței parametrilor : k, h^*, L^* și ξ, luați separat și în interacțiune reciprocă.

În calcule ne vom limita la învelitorile cilindrice compuse dintr-un număr maxim de trei straturi ($l = 2$) ortotrope sau izotrope. Acesta este cazul structurilor care se întîlnesc efectiv în construcțiile aeronautice, deci cel mai important din punctul de vedere al calculului pratic. Afară de aceasta, simplitatea maximă a eterogeneității va permite o evidențiere mai precisă și o claritate în problema interacțiunii și influenței diferiților parametri.

Parametrii q și $\widetilde{q}$ se iau la o valoare constantă destul de redusă (1/10) pentru a se evidenția influența diferenței proprietăților elastice ale straturilor componente. Totodată, parametrul $\overline{q}$ se ia egal cu 1, pentru simplificarea calculelor și pentru eliminarea acestui factor mai puțin importtant, din relațiile finale.

O importanță deosebită o au parametrii geometrici ξ, h^* și L^*.

În prezentul studiu ei sînt luați la următoarele valori :

Tabela 6.1

ξ	0 ;	0,25 ;	0,5 ;	0,75 ;	1
h^*	10^{-3} ;		5.10^{-3} ;	10^{-2}	
L^*	0,5 ;	1 ;	2 ;	3 ;	5.

Pentru o claritate a concluziilor variația acestor parametri se va face la o valoare fixată a parametrului k, și anume :

$$k_{(1)} = k_{(2)} = 1,$$

adică, se admite că învelitoarea este formată în acest caz din straturi izotrope.

Influența parametrului k se cercetează searat, în combinație cu L^* și h^*), dar eliminînd alți parametri. Se ajunge la o învelitoare formată dintr-un singur strat, dar cu proprietăți de ortotropie, cu lungime și grosime relativă, diferite.

Parametrii respectivi se iau la următoarele valori:

Tabela 6.2

k	0,3;	0,5;	0,7
h^*	10^{-3};	5.10^{-3}	10^{-2}
L^*	0,5; 1;	2; 3;	5.

Rezultatele calculelor sînt prezentate în capitolele următoare.

7. INFLUENȚA PARAMETRILOR k, h*, L*

Se ia în considerație o învelitoare cilindrică, formată dintr-un singur strat, cu proprietăți de ortotropie.

Parametrii variabili sînt cei arătați în tabela 6.2.

Alte caracteristici ale materialului învelitorii sînt

$$E_\alpha = E = 2,\ 1\ .\ 10^{10}\ \text{kgf/m}^2,$$

$$\mu_\alpha = \mu = 0{,}316,$$

$$\rho_m = 800\ \text{kgs}^2/\text{m}^4.$$

Materialul: oțel.

Caracteristicile curentului:

— altitudinea $H = 0$m,

$$\rho_0 = 0{,}125\ \text{kgs}^2/\text{m}^4,$$

$$a_0 = 340\ \text{m/s},\ \text{viteza sunetului.}$$

Caracteristica de amortizare structurală:

$$b = 0.$$

Cu aceste valori, parametrii H_1 și H_2 (5.11), (5.12) capătă următoarele valori:

$$H_1 = 1{,}245\ .\ 10^{-4}\ \text{(dimensiunea — [0])},$$

$$H_2 = 1{,}22\ .\ 10^5 (-\ ,,\ -),$$

iar parametrii Ξ_B, Ξ_C, $\Xi_{\mathfrak{M}}$ și ζ, conf. (5.5)‴, (5.6)⁗, (5.7)‴, (5.8)‴ au valori cuprinse în tabela 7.1.

Tabela 7.1

k	0,3	0,5	0,7
Ξ_B	0,029	0,0475	0,065
$\Xi_C = \Xi_{\mathfrak{M}}$	1,030	1,050	1,075
ζ	0,535	0,670	0,777

În continuare, calculele efectuate în ordinea indicată în § 5.2, sînt grupate în tabela 7.2.

Curbele $h^* = f(\mathfrak{M}_{cr})$ $(k = \text{const},\ L^* = \text{const})$

și $L^* = \varphi(\mathfrak{M}_{cr})$ $(h^* = \text{const},\ k = \text{const})$

sînt trasate în figurile 7.1 și 7.2.

8. INFLUENȚA PARAMETRILOR ξ, h^*, L^*

Pentru studiul acestei variații, se examinează o învelitoare cilindrică eterogenă, formată din trei straturi izotrope.

Parametrii care variază și limitele variației lor sînt arătate în tabela 6.1. Celelalte caracteristici și anume : cele elastice și mecanice ale stratului exterior ($l = 2$) ale mediului gazos și de amortizare sînt identice cu cele luate în capitolul 7.

Caracteristicile stratului exterior :

$E = 2{,}1 \cdot 10^{10}$ kgf/m^2 (oțel),

$\mu = 0{,}316$,

$\rho_m = 800$ kgfs/m^4,

iar cele ale stratului interior ($l = 1$) sînt legate de primele prin următoarele valori ale parametrilor (2.6) :

$$q_{(1)} = \tilde{q}_{(1)} = \frac{1}{10}; \quad \bar{q}_{(1)} = 1.$$

Totodată, datorită izotropiei straturilor se ia

$$k_{(1)} = k_{(2)} = 1.$$

Valorile parametrilor H_1 și H_2 sînt aceleași ca în capitolul 7.

Tabela 7.2

1	L^*	0,5			1			2			3			5		
2	$10^3 h^*$	10	5	1	10	5	1	10	5	1	10	5	1	10	5	1
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	A) $k = 0{,}3$															
3	A_{cr}	—	—	1400	~300	380	9500	600	2130	70000	1600	7500	—	7000	30000	—
4	$\mathfrak{M}_{cr}$	—	—	1,41	37,7	5,95	1,195	9,42	4,15	1,1095	7,35	4,36	—	7,030	3,78	—
	B) $k = 0{,}5$															
5	A_{cr}	—	—	1590	300	470	11000	700	2450	80000	1850	8000	—	7800	40000	—
6	$\mathfrak{M}_{cr}$	—	—	1,62	38,2	7,5	1,4	11,15	4,83	1,27	8,6	4,75	—	8	5,1	—
	C) $k = 0{,}7$															
7	A_{cr}	—	—	1750	300	530	12000	780	2800	90000	2000	9200	—	9000	43000	—
8	$\mathfrak{M}_{cr}$	—	—	18,4	39,3	8,68	1,57	12,75	5,68	1,475	9,6	5,6	—	9,45	5,64	

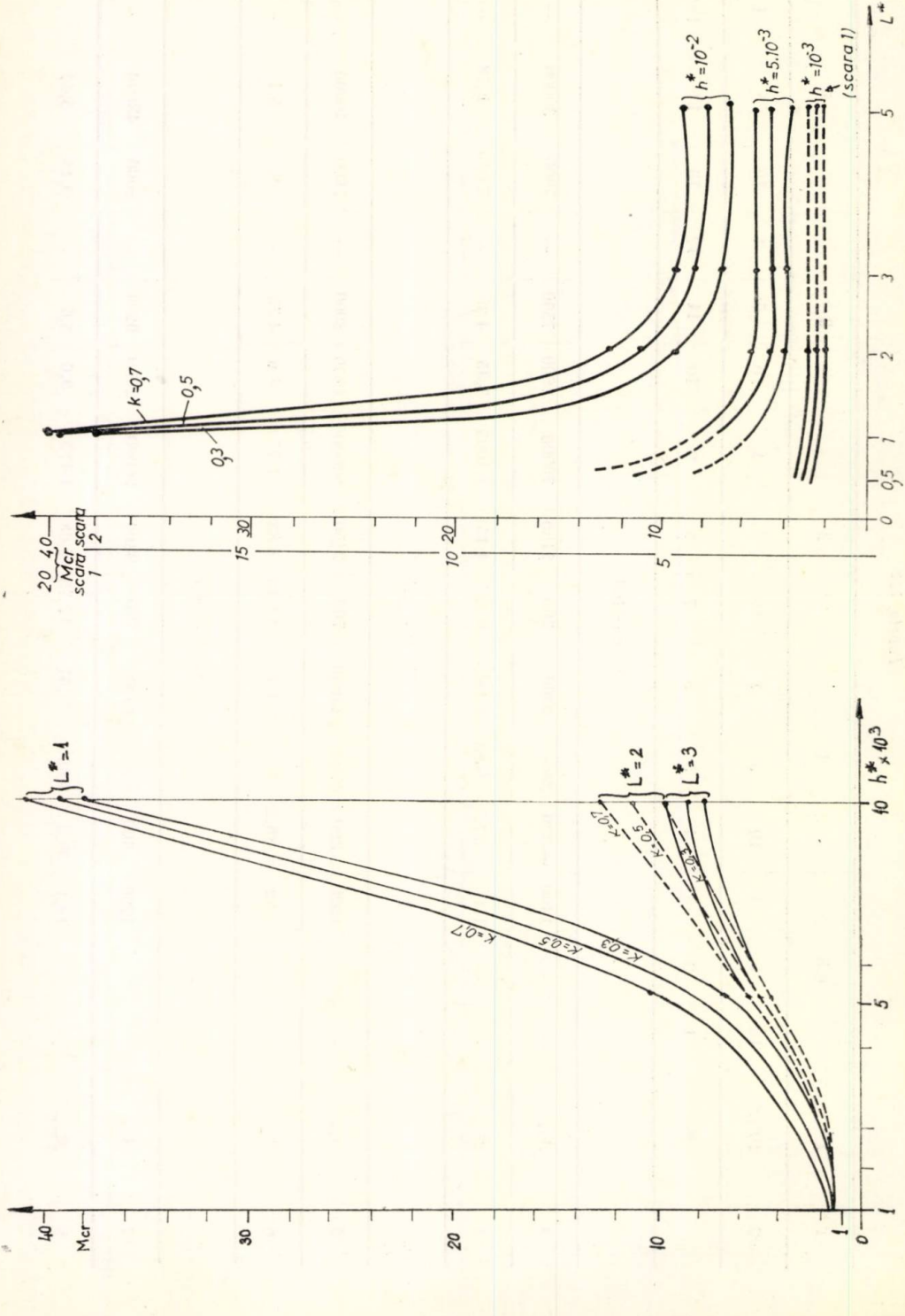

Mcr
140
30
20
10
1
0
1
5
10
h* x 10³
L*=1
L*=2
L*=3
k=0,7
k=0,5
k=0,3
k=0,7
k=0,5
k=0,3
20 40
Mcr
scara 1
scara 2
15 30
10 20
5 10
k=0,7
0,5
0,3
h*=10⁻²
h*=5.10⁻³
h*=10⁻³
(scara 1)
0
0,5
1
2
3
5
L*

Fig. 7.1.

Fig. 7.2.

Parametrii Ξ_B, Ξ_C, $\Xi_{\mathfrak{M}}$, ζ se calculează cu ajutorul relaţiilor (5.5)′; (5.6)′; (5.7)′, (5.8)″. Calculele sînt rezumate în tabela 8.1.

Tabela 8.1

1	ξ_s	1	0,75	0,50	0,25	0
	1	2	3	4	5	6
2	Ξ_B	0,900	0,470	0,557	0,705	0,900
3	$\Xi_{\mathfrak{M}}$	0,1111	0,692	0,984	1,095	1,111
4	Ξ_C	1,111	2,130	1,785	1,415	1,111
5	ξ	9	1,445	1,016	0,910	0,900

Calculul vitezei critice de flutter, conform § 5.2 este grupat în tabela 8.2.

Rezultatele sînt prezentate grafic în figurile 8.1, 8.2, 8.3, 8.4 şi 8.5.

În figura 8.1; curbele $\mathfrak{M}_{cr} = f(L^*)$ ($h^* = \text{const.}$, $\xi = \text{const.}$),

În fig. 8.2. „ $\mathfrak{M}_{cr} = \varphi(\xi_1)$ (h^*const., L^* const.),

În fig. 8.3. „ $\mathfrak{M}_{cr} = \varphi(\xi_1)$ ($h^* = 10^{-3}$, L^* const.),

În fig. 8.4. „ $\mathfrak{M}_{cr} = \varphi(\xi_1)$ ($h^* = 5.10^{-3}$; L^* const.),

În fig. 8.5. „ $\mathfrak{M}_{cr} = \varphi(\xi_1)$ ($h^* = 10^{-2}$; L^* const.).

9. INFLUENŢA PARAMETRILOR $\bar{\bar{\Psi}}$, L*, h*, ξ

În prezentul capitol se studiază variaţia parametrilor L^*, h^*, ξ în raport cu un nou parametru $\bar{\bar{\psi}}$, definit ca raportul dintre greutatea specifică (adimensionalizată) şi viteza critică de flutter. Această caracteristică este deosebit de importantă la studiul optimizării factorilor geometrici şi fizico-mecanici ai învelitorii din punctul de vedere al rezistenţei la flutter. Se caută o astfel de combinaţie a acestor caracteristici, la care raportul dintre greutatea specifică şi viteza critică de flutter să fie minim, obţinîndu-se astfel o structură de calitate optimă.

Tabela 8.2

1	L^*	0,5			1			2			3			5		
2	$10^3 h^*$	10	5	1	10	5	1	10	5	1	10	5	1	10	5	1
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	A) $\xi_1 = 1$; $\xi = 9$; $\Xi_{\mathfrak{M}} = 0{,}1111$;															
3	A_{cr}	300	450	10000	650	2200	68000	3500	16000	—	11500	5500	—	54000	—	—
4	$\mathfrak{M}_{cr}$	32,5	6,1	1,085	8,8	3,72	0,92	5,9	3,83	—	5,69	3,45	—	5,85	—	—
	B) $\xi_1 = 0{,}75$; $\xi = 1{,}145$; $\Xi_{\mathfrak{M}} = 0{,}692$															
5	A_{cr}	—	320	2600	360	650	59000	1100	4400	120000	3080	13500	—	13000	60000	—
6	$\mathfrak{M}_{cr}$	—	27	1,755	30,4	6,85	1,42	11,55	5,75	1,265	9,46	5,28	—	8,75	5,05	—
	C) $\xi_1 = 0{,}50$; $\xi = 1{,}016$; $\Xi\mathfrak{M} = 0{,}984$															
7	A_{cr}	—	250	2050	350	590	14000	950	3300	106000	2400	11500	—	10500	50000	—
8	$\mathfrak{M}_{cr}$	—	29,7	1,95	41,8	8,77	1,67	14,15	6,09	1,575	10,40	6,38	—	10	5,97	—
	D) $\xi_1 = 0{,}25$; $\xi = 0{,}91$; $\Xi = 1{,}095$															
9	A_{cr}	—	200	1900	374	560	13000	850	3060	100000	2200	10300	—	10000	47000	—
10	$\mathfrak{M}_{cr}$	—	26,7	2,015	46,1	9,3	1,73	14,1	6,29	1,66	10,62	6,36	—	10,62	6,26	—
	E) $\xi_1 = 0$; $\xi = 0{,}90$; $\Xi = 1{,}111$															
11	A_{cr}	—	190	1860	346	550	12800	820	3040	95000	2190	10100	—	9800	45000	—
12	$\mathfrak{M}_{cr}$	—	25,7	2,02	46,8	9,3	1,733	13,85	6,38	1,605	10,80	6,34	—	10,62	6,10	—

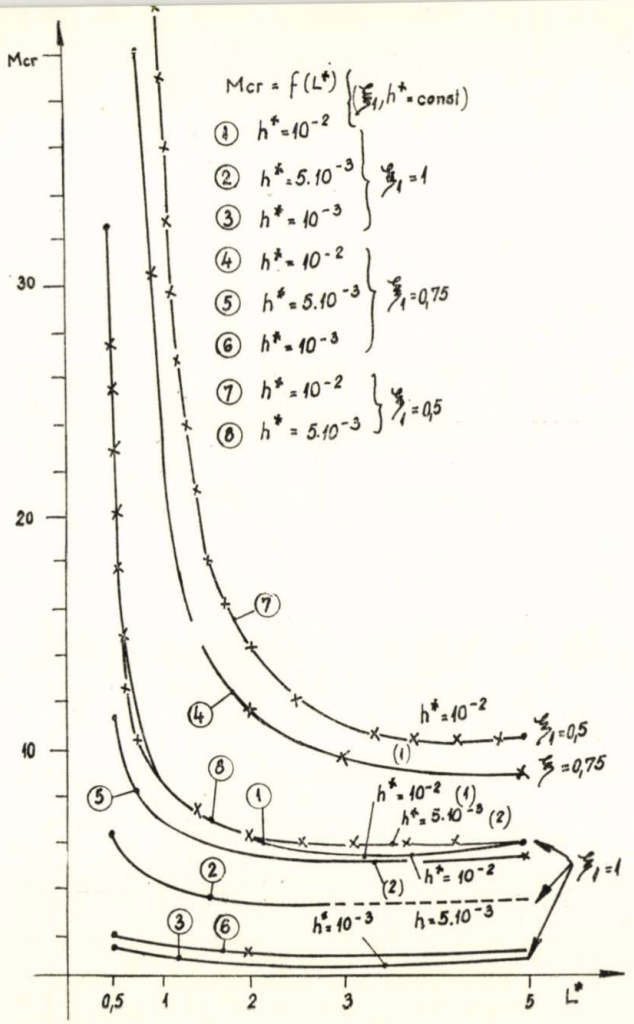

Mcr
Mcr = f(L*) (ξ1, h* = const)
① h* = 10⁻²
② h* = 5.10⁻³
③ h* = 10⁻³
ξ1 = 1
④ h* = 10⁻²
⑤ h* = 5.10⁻³
⑥ h* = 10⁻³
ξ1 = 0,75
⑦ h* = 10⁻²
⑧ h* = 5.10⁻³
ξ1 = 0,5
h* = 10⁻² (1)
h* = 5.10⁻³ (2)
h* = 10⁻²
h* = 10⁻³
h = 5.10⁻³
ξ1 = 0,5
ξ1 = 0,75
ξ1 = 1
30
20
10
0,5
1
2
3
5
L*

Fig. 8.1.

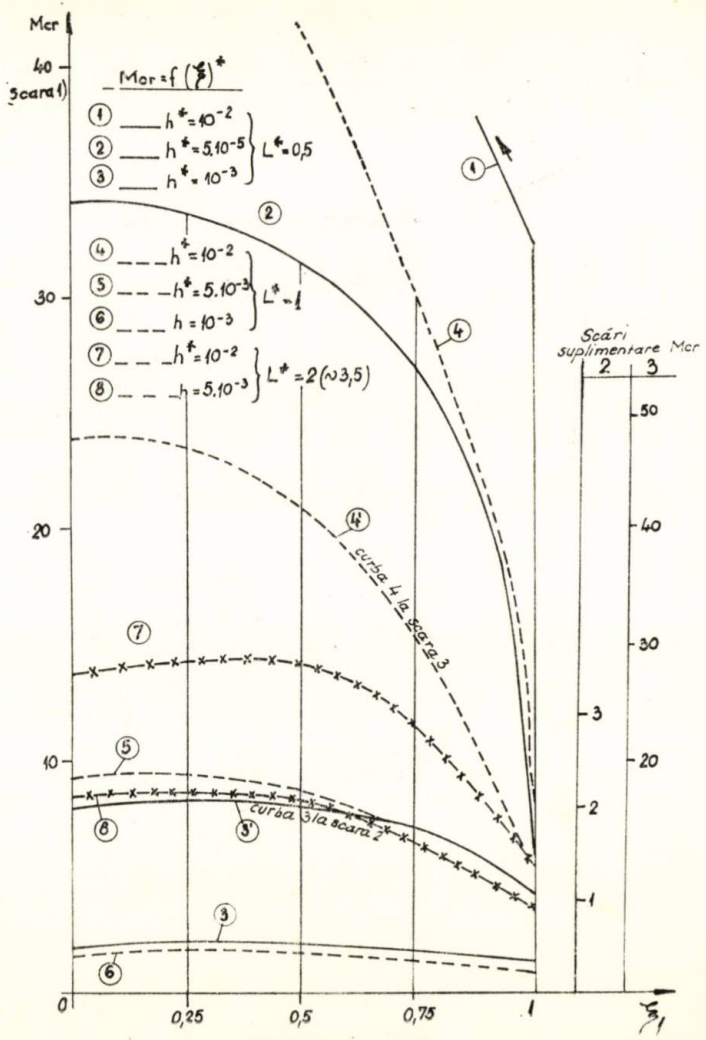

Mcr
40
Scara 1)
Mcr = f(ξ1)*
① h* = 10⁻²
② h* = 5.10⁻⁵
③ h* = 10⁻³
L* = 0,5
④ h* = 10⁻²
⑤ h* = 5.10⁻³
⑥ h = 10⁻³
L* = 1
⑦ h* = 10⁻²
⑧ h = 5.10⁻³
L* = 2 (≈ 3,5)
Scări suplimentare Mcr
2
3
50
40
30
20
3
2
1
curba 4 la scara 3
curba 3 la scara 2
30
20
10
0
0,25
0,5
0,75
1
ξ1

Fig. 8.2.

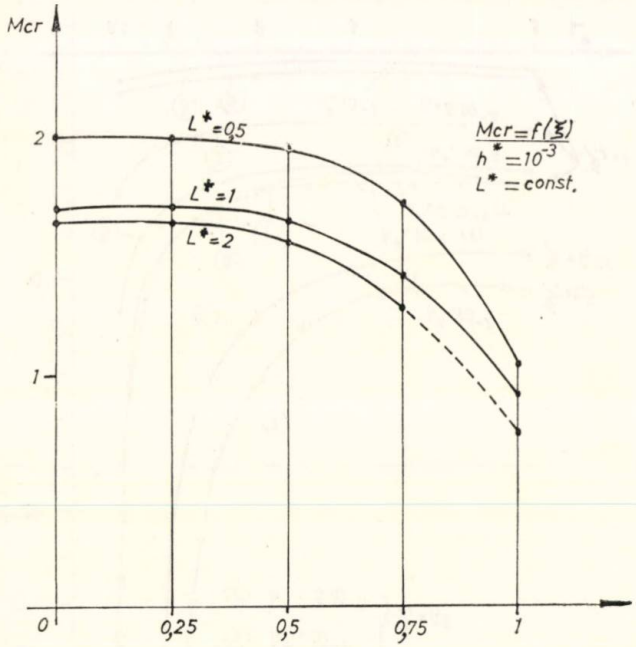

Mcr
2
1
0
0,25
0,5
0,75
1
L*=0,5
L*=1
L*=2
Mcr=f(ξ)
h*=10⁻³
L*=const.

Fig. 8.3.

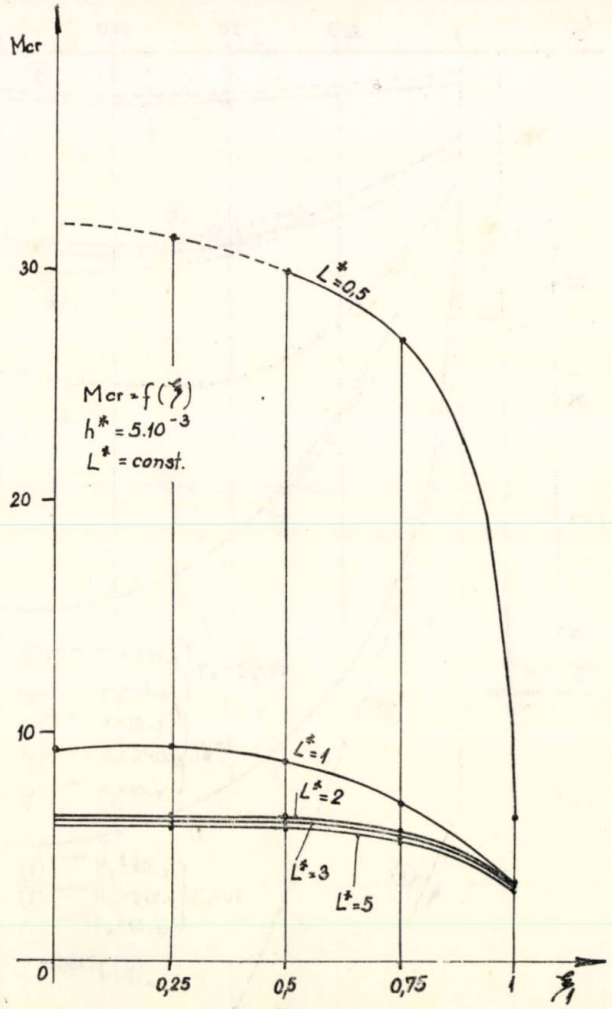

Mcr
30
20
10
0
0,25
0,5
0,75
1
ξ
L*=0,5
L*=1
L*=2
L*=3
L*=5
Mcr=f(ξ)
h*=5.10⁻³
L*=const.

Fig. 8.4.

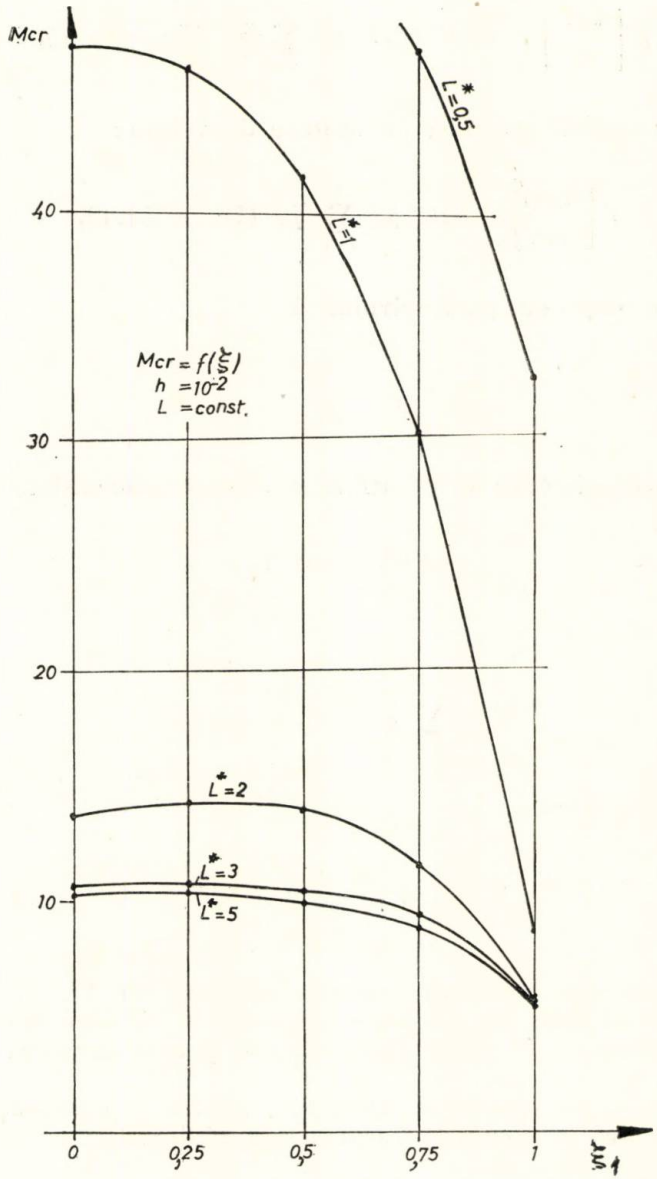


Fig. 8.5.

În lucrarea [36] s-a definit greutatea specifică pe unitate de lungime a învelitorii cilindrice eterogene, conform expresiei:

$$p\left[\frac{\text{kgf}}{\text{m}}\right] = \pi g R^2 h^* . 1 . \rho_m^{(l)} \sum_{j=1}^{l} \tilde{q}_{(j)} (\xi_{(j)} - \xi_{(j-1)}), \tag{9.1}$$

precum și greutatea specifică pe unitate de volum:

$$\bar{p}\left[\frac{\text{kgf}}{\text{m}^3}\right] = \pi g h^* \rho_m^{(l)} \sum_{j=1}^{l} \tilde{q}_{(j)} (\xi_{(j)} - \xi_{(j-1)}), \tag{9.2}$$

care intră în expresia parametrului ψ

$$\psi = \frac{\bar{p}}{\mathfrak{M}_{cr}}. \tag{9.3}$$

În prezenta lucrare se va utiliza o valoare adimensională a caracteristicii p:

$$\bar{\bar{p}}[0] = \pi h^* \Psi, \tag{9.4}$$

unde s-a notat

$$\Psi = \sum_{j=1}^{l} \tilde{q}_{(j)} (\xi_{(j)} - \xi_{(j-1)}), \tag{9.5}$$

precum și parametrul

$$\bar{\psi} = \frac{\bar{\bar{p}}}{\mathfrak{M}_{cr}}, \tag{9.6}$$

în raport cu care se va studia variația parametrilor L^*, ξ, h^*.

De notat că influența L^* apare indirect prin $\mathfrak{M}_{cr}$ care este influențat de acest parametru. (L^* nu intră în expresia $\bar{p}$ care se referă la unitate de lungime).

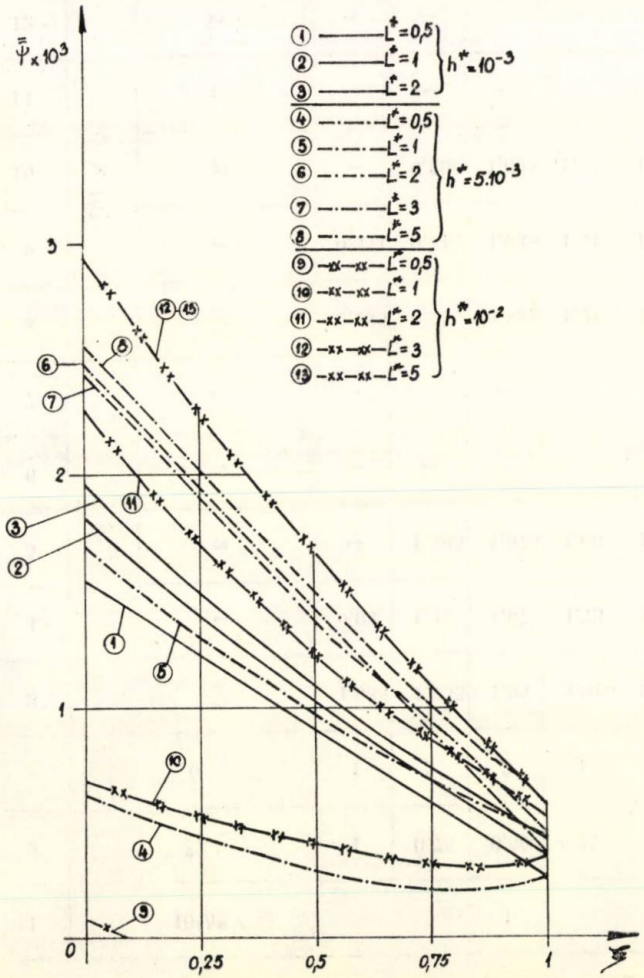
Calculele sînt rezumate în tabela 9.1, utilizîndu-se aceleași valori h^*, ξ, L^*, $\mathfrak{M}_{cr}$, $\tilde{q}_{(j)}$ ca în exemplul tratat în capitolul 8.

Se stabilesc relațiile:

$\bar{\bar{\psi}} = f(\xi)$ (L^*, $h^* = \text{const}$) și
$\bar{\bar{\psi}} = \varphi(L^*)$ (h^*, $b = \text{const}$),

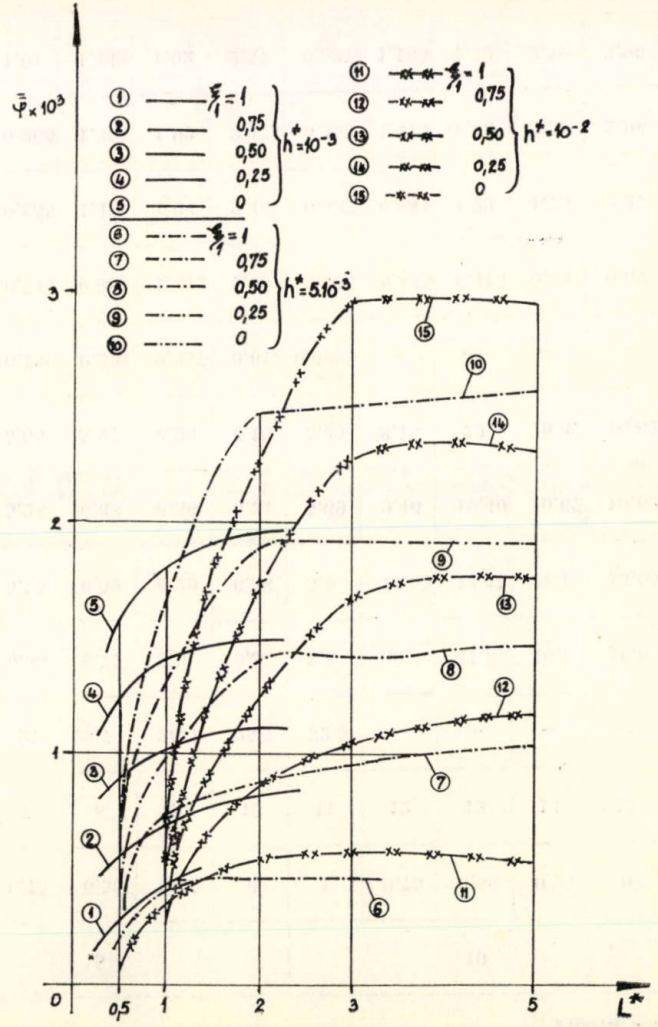
prezentate în figurile 9.1 și 9.2, ale unei învelitori formate din trei straturi izotrope.

1	$10^3 h^*$		1					5					10				
2	ξ_1		1	0,75	0,50	0,25	0	1	0,75	0,50	0,25	0	1	0,75	0,50	0,25	0
	0		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	$\mathfrak{M}_{cr}$	0,5	1,085	1,755	1,95	2,015	2,02	6,1	27	29,7	26,7	25,7	32,5	—	—	—	—
4		1	0,92	1,42	1,67	1,73	1,733	3,72	6,85	8,77	9,3	9,3	8,8	30,4	41,8	46,1	46,8
5		2	—	1,265	1,575	1,66	1,605	3,83	5,75	6,09	6,29	6,38	5,9	11,55	14,15	14,1	13,85
6		3	—	—	—	—	—	3,45	5,28	6,38	6,36	6,34	5,69	9,46	10,40	10,62	10,62
7		5	—	—	—	—	—	—	5,05	5,97	6,26	6,10	5,85	8,75	10	10,62	10,62
8	$\overline{\Psi} \times 10^3$	0,5	0,289	0,58	0,885	1,21	1,555	0,257	0,189	0,291	0,457	0,61	0,0965	—	—	—	—
9		1	0,341	0,718	1,035	1,41	1,81	0,422	0,744	0,985	1,312	1,69	0,357	0,335	0,413	0,53	0,67
10		2	—	0,806	1,095	1,47	1,96	0,410	0,888	1,42	1,94	2,46	0,532	0,884	1,22	1,73	2,27
11		3	—	—	—	—	—	0,453	0,966	1,355	1,92	2,475	0,552	1,075	1,66	2,30	2,96
12		5	—	—	—	—	—	—	1,01	1,448	1,92	2,57	0,537	1,165	1,725	2,30	2,96



$\bar{\bar{\psi}} \times 10^3$
① $L^* = 0,5$
② $L^* = 1$
③ $L^* = 2$
$h^* = 10^{-3}$
④ $L^* = 0,5$
⑤ $L^* = 1$
⑥ $L^* = 2$
⑦ $L^* = 3$
⑧ $L^* = 5$
$h^* = 5.10^{-3}$
⑨ $L^* = 0,5$
⑩ $L^* = 1$
⑪ $L^* = 2$
⑫ $L^* = 3$
⑬ $L^* = 5$
$h^* = 10^{-2}$
0
0,25
0,5
0,75
1
ξ

Fig. 9.1



$\bar{\bar{\psi}} \times 10^3$
① $\xi/1 = 1$
② 0,75
③ 0,50
④ 0,25
⑤ 0
$h^* = 10^{-3}$
⑥ $\xi/1 = 1$
⑦ 0,75
⑧ 0,50
⑨ 0,25
⑩ 0
$h^* = 5.10^{-3}$
⑪ $\xi/1 = 1$
⑫ 0,75
⑬ 0,50
⑭ 0,25
⑮ 0
$h^* = 10^{-2}$
0
0,5
1
2
3
5
L^*

Fig. 9.2.

10. DISCUȚIA ASUPRA REZULTATELOR. CONCLUZII

Investigația întreprinsă ne dă posibilitatea să se tragă concluzii referitoare la influența unei serii de parametri geometrici și fizco-mecanici asupra comportării din punctul de vedere al vibrațiilor de tipul flutter a învelitorilor cilindrice eterogene și ortotrope.

Pentru evidențierea cît mai mare a influenței parametrilor sus-menționați, s-a luat în studiu forma axial-simetrică a vibrațiilor, care, după unele indicații din literatura de specialitate, este forma cu cea mai joasă limită a vitezei critice, în comparație cu alte forme de vibrație de tipul flutter. Faptul că forma axial simetrică nu depinde de variabila β permite o tratare matematică clară și precisă, care este cea mai potrivită pentru scoaterea în evidență a influenței diferiților parmetri.

S-a utilizat metoda de calcul care cuprinde soluționarea exactă a problemei de limită, bazată pe studiul valorilor sale proprii. Această metodă este deosebit de adecvată la studiul flutterului învelitorilor cilindrice, pentru că în acest caz valorile vitezei reduse critice, A_{cr}, adică acele valori la care curba valorii proprii λ_1 (A) intersectează parabola stabilității sînt destul de ridicate (a fost necesar să fie investigat intervalul $350 < A < 110.000$).

În aceste condiții, conform [1], [2], aplicarea metodei lui Galerkin la rezolvarea problemei de limită dă rezultatul aproximativ apropiat de cel exact numai în cazul cînd se ia în calcul un număr destul de mare de termeni ai dezvoltării (de la opt în sus).

Înainte de a face analiza rezultatelor prezentei lucrări, vom trece în revistă concluziile din [36], care trebuie să fie puse în legătură cu cele stabilite aici.

CONCLUZIILE DIN LUCRAREA [36]:

Graficele 6.3, 6.4, 6.5, 6.7 și 6.8 din lucrarea sus-menționată arată o influență puternică a parametrului h^* asupra vitezei critice de flutter. Se poate spune că influența acestui factor este cea mai mare, în comparație cu influența altor factori studiați.

Influența ortotropiei este evidențiată în graficele 6.1—6.5. Se constată că și acest factor are o influență destul de însemnată asupra $\mathfrak{M}_{cr}$, dar mai redusă decît a parametrului h^*. Astfel, la o variație a modulului de elasticitate în sensul transversal E_β cu 100 %, (în timp ce E_α rămîne constant), $\mathfrak{M}_{cr}$ poate varia cu 15—25 %.

În graficele 6.5 și 6.6 se evidențiază influența parametrului ξ a unei învelitori compuse din trei straturi. Curbele $\xi = f(\mathfrak{M}_{cr})$ arată că pornind de la o învelitoare cu straturile exterioare (rezistente în comparație cu stratul inferior) subțiri ($\xi \leqslant 1$) și variind parametrul ξ în sensul micșorării lui ($\xi \to 0$), în prima parte a intervalului ($\xi > 0{,}6$) creșterea $\mathfrak{M}_{cr}$ este foarte rapidă, devenind apoi din ce în ce mai lentă. Această configurație a curbelor arată că din punctul de vedere al greutății cele mai avantajoase sînt învelitorile cu $\xi = 0{,}95—0{,}8$ (avînd straturile exterioare cît mai subțiri). Influența parametrului ξ crește cu mărirea grosimii relative h^*.

S-a luat în discuție și influența greutății specifice și a parametrului ψ (raportul greutății specifice la $\mathfrak{M}_{cr}$) asupra $\mathfrak{M}_{cr}$. Graficele 6.8—6.10 arată că învelitorile cu straturile exterioare dure cît mai subțiri și cu stratul mediu cît mai ușor sînt cele mai avantajoase. Asupra măririi $\mathfrak{M}_{cr}$ se poate acționa în modul cel mai eficace, prin mărirea parametrului h^*.

Toate aceste rezultate s-au obținut pentru valorile fixe ale celorlalți parametri ($L^* = 2$, $E\alpha = 2{,}1 \cdot 10^{10}$ kg/m^2; $\rho_m = 800$ kgs^2/m^4 $b = 0$, $H = 0$).

★

În prezenta lucrare s-a luat în studiu influența unor parametri care au fost anterior considerați constanți, precum și a interdependenței lor cu alte caracteristici constructive și fizico-mecanice, ale învelitorilor examinate.

În capitolul 7 s-a analizat influența reciprocă a parametrilor k, h^*, L^* a unei învelitori cilindrice formate dintr-un singur strat ortotrop.

Graficele 7.1 și 7.2 scot în evidență următoarele:

— *Parametrul h^** are, în general, o influență însemnată asupra $\mathfrak{M}_{cr}$.

Astfel, de exemplu, în cazul altor parametri fixați, s-au obținut următoarele valori (T 7.1):

$h^* = 10^{-3}$,	$\mathfrak{M}_{cr} = 1{,}475$	*variația* $\mathfrak{M}_{cr}$
$h^* = 5 \cdot 10^{-3}$,	$\mathfrak{M}_{cr} = 5{,}68$,	de 3,86 ori,
$h^* = 10^{-2}$,	$\mathfrak{M}_{cr} = 12{,}75$,	2,35 ori.

Influența h^* asupra $\mathfrak{M}_{cr}$ crește foarte mult cu scăderea L^*, dar tinde asimptotic spre o valoare constantă în cazul creșterii L^* peste o anumită limită ($L^* \cong 3$). Parametrul k influențează aproape constant variația $h^* = f(\mathfrak{M})$ sau $L^* = f(\mathfrak{M})$.

Parametrul k, care oglindește raportul modulelor de elasticitate pe cele două direcții de ortotropie, are o influență aproape constantă în raport cu variația altor parametri.

S-a obținut, de exemplu (cu alți parametri constanți):

$k = 0{,}3$, $\mathfrak{M}_{cr} = 4{,}15$,

$k = 0{,}5$, $\mathfrak{M}_{cr} = 4{,}83$,

$k = 0{,}7$, $\mathfrak{M}_{cr} = 5{,}68$,

de unde se poate conchide că la o variație a parametrului k de 2,35 ori $\mathfrak{M}_{cr}$ a variat de 1,37 ori.

Este o variație nu atît de puternică ca cea produsă de h^*.

Parametrul L^*

Variația parametrului L^* este în mare măsură legată de h^*.

În timp ce la h^* relativ mari (10^{-2}) valorile $\mathfrak{M}_{cr}$ cresc vertiginos cu scăderea L^*, în cazul h^* mai mici această creştere devine tot mai atenuată.

Ceea ce este comun pentru întreaga gamă a valorilor h^*, este faptul că de la o anumită valoare L^* în sus, curbele $L^* = f(\mathfrak{M})$ prezintă valori staţionare ale $\mathfrak{M}_{cr}$.

În capitolul 8 s-a analizat influenţa reciprocă a parametrilor ξ, h^*, L^* asupra variaţiei vitezei critice de flutter a unei familii de învelitori cilindrice, formate din trei straturi izotrope, dintre care cele exterioare sînt „rezistente", iar cel central este „uşor". Pentru a evidenţia influenţa acestei combinaţii de straturi, s-a considerat că între modulele lor de elasticitate este o diferenţă apreciabilă, raportul lor fiind de 1/10. Acelaşi raport s-a luat şi pentru densităţile celor două materiale.

Influenţa parametrilor analizaţi se poate urmări în figurile 8.1—8.5.

Parametrul h^*, ca şi în cazul precedent, joacă un rol important la stabilirea valorii $\mathfrak{M}_{cr}$. Astfel, în figura 8.1, curbele *4*, *5*, *6* sînt destul de semnificative : ele arată variaţia $\mathfrak{M}_{cr} = f(L^*)$ în cazul $\xi = 0{,}75 = \text{const.}$ şi a grosimilor relative $h^* = 10^{-2}; 5.10^{-3}; 10^{-3}$. Se vede că această variaţie este extrem de mare în cazul valorilor L^* mici şi apoi se reduce odată cu creşterea parametrului L^*. Astfel avem :

Valori $\mathfrak{M}_{cr}$	h^*	10^{-2}	5.10^{-3}	10^{-3}
	$L^* = 1$	30,4	6,85	1,42
	$L^* = 2$	11,55	5,75	1,265
	$L^* = 5$	8,75	5,05	⌣

Parametrul ξ. În figurile 8.2—8.5 se pot urmări curbele $\mathfrak{M}_{cr} = f(\xi)$ la anumite valori fixate ale parametrilor h^* şi L^*.

În figura 8.2 se prezintă o vedere de ansamblu, cuprinzînd opt curbe $\mathfrak{M}_{cr} = f(\xi)$, ($h^* = \text{const}$; $L^* = \text{const}$). Datorită unei dispersări foarte mari a rezultatelor a fost necesar să se utilizeze trei scări diferite pe acelaşi grafic. Datorită acestui fapt, graficul pierde din sinopticitate, fiecare categorie de curbe trebuind să fie analizată separat.

Pentru o claritate mai mare, în figurile 8.3, 8.4 şi 8.5 s-au trasat separat curbele $\mathfrak{M}_{cr} = f(\xi)$ pentru cîte o valoare fixată a parametrului h^*, care, după cum s-a arătat, are o influenţă însemnată asupra vitezei critice de flutter.

Astfel, în figura 8.3 sînt reprezentate curbele $\mathfrak{M}_{cr} = f(\xi)$ pentru diferite valori L^* şi pentru $h^* = 10^{-3}$ în figura 8.4, aceleaşi curbe pentru $h^* = 5.10^{-3}$, iar în figura 8.5 pentru $h^* = 10^{-2}$.

Deşi în aceste figuri diferă mult limita $\mathfrak{M}_{cr}$ ca valoare absolută, se constată că toate au aceeaşi alură. Valori mai reduse ale $\mathfrak{M}_{cr}$ apar la $\xi_1 = 1$ (stratul mediu „slab" ocupă întreaga grosime a învelitorii, cele exterioare fiind reduse la zero), apoi urmează o creştere rapidă a $\mathfrak{M}_{cr}$ în intervalul

$\xi = (1 + 0{,}5)$, iar în intervalul $\xi = (0{,}5 - 0)$ (adică atunci cînd straturile exterioare devin din ce în ce mai groase), această creștere devine din ce în ce mai lentă, devenind chiar valoare constantă în anumite cazuri.

Acest mod de variație al funcției $\mathfrak{M}_{cr} = f(\xi)$ confirmă rezultatele obținute în [36].

Din graficele 8.2—8.5 se mai observă că în cazul diferitelor valori L^* curbele au aproximativ aceeași alură. Variațiile sînt mai pronunțate în cazul L^* mici, iar cu creșterea acestui parametru devin mai aplatisate și mai apropiate între ele.

Parametrul L^*. Influența acestui parametru poate fi urmărită în figura 8.1, unde sînt trasate curbele $\mathfrak{M}_{cr} = f(L^*)$ pentru anumite valori fixate ale parametrilor h^* și ξ_1, dar această influență apare evidentă și din alte figuri.

Graficele arată că în cazul L^* reduse ($L^* \leqslant 2$), micșorarea L^* este un factor foarte eficace pentru mărirea vitezei critice de flutter, dar în cazul L^* mai mari ($L^* \geqslant 3$) variația lui nu mai are aproape nici o influență asupra mărimii $\mathfrak{M}_{cr}$.

Acest lucru apare cu toată evidența în figura 8.1. Variația $\mathfrak{M}_{cr} = f(L^*)$ este cu atît mai pronunțată cu cît h^* este mai mare și se atenuează la h^* mici. La $h^* = 10^{-2}$ și $L^* \leqslant 1$ practic nu se mai poate produce fenomenul de flutter.

Pentru a se vedea cît de însemnată este influența acestui parametru în anumite intervale ale mărimii sale, reproducem următoarele date din tabela 8.2 :

$h^* = 5.10^{-3}$ $\xi_1 = 0{,}75$

L^*	0,5	1	2	3	5
$\mathfrak{M}_{cr}$	27	6,85	5,75	5,28	5,05

Aceeași influență poate fi urmărită și în graficele 8.3—8.5 : se observă că curbele $\mathfrak{M}_{cr} = f(\xi)$ sînt mai distanțate în cazul L^* mici și aproape se confundă la $L^* = (3-5)$.

În capitolul 9 s-a analizat influența parametrilor L^*, h^* și ξ în raport cu parametrul $\bar{\bar{\psi}}$, definit conform (9.6) ca raportul dintre „greutatea specifică adimensională" $\bar{\bar{p}}$ și numărul Mach critic, $\mathfrak{M}_{cr}$.

Acest parametru ($\bar{\bar{\psi}}$), care este și el adimensional, s-a introdus pentru a scoate în evidență combinația altor parametri la care rezultă un optimum din punctul de vedere al vitezei critice de flutter și ușurinței construcției : se caută o structură cît mai ușoară, care să aibe un număr $\mathfrak{M}_{cr}$ cît mai ridicat. În figura 9.1 s-au trasat curbele $\bar{\bar{\psi}} = f(\xi)$ pentru diferite valori fixate ale L^* și h^*. Toate curbele arată că din punctul de vedere al parametrului ξ, este cel mai avantajos ca acesta să aibe valori apropiate de 1 (învelitoarea în care predomină stratul mediu ușor). La aceste valori parametrul $\bar{\bar{\psi}}$ ia valori minime (din examinarea expresiei (9.6) rezultă că pentru optimum $\bar{\bar{\psi}}$ trebuie să fie cît mai mic posibil). Cele mai mari valori $\bar{\bar{\psi}}$ (cînd alți parametri sînt fixați) rezultă la $\xi = 0$.

Pentru o anumită valoare ξ se constată că în cazul L^* mici (0,5—1) valorile mai mici $\bar{\bar{\psi}}$ rezultă la h^* mai mari, iar de la $L^* \geqslant 2$, astfel de valori rezultă la h^* mai mici. La $L^* = 2$, $h^* = 5.10^{-3}$ rezultă valorile mai mari ale parametrului $\bar{\bar{\psi}}$ decît cele rezultate la $h^* = 10^{-3}$ sau $h^* = 10^{-2}$. La $L^* \geqslant 3$ în discuție rămîn numai grosimile $h^* = 5.10^{-3}$ și $h^* = 10^{-2}$. Valorile mai mici ale $\bar{\bar{\psi}}$ rezultă pentru prima grosime.

Pentru a ilustra această variație se reproduce următorul extras din tabela 9.1 :

Valorile $\bar{\bar{\Psi}} \times 10^3$ pentru $\xi = 0{,}25$:

h^* \ L^*	0,5	1	2	3	5
10^{-3}	1,21	1,41	1,47	—	—
$5\text{-}10^{-3}$	0.457	1,312	1,94	1,92	1,92
10^{-2}	—	0,53	1,73	2,30	2,30

— Valori minime

în acest interval L^* $\bar{\bar{\psi}}$ min apare la valori mai mari ale h^*

în acest interval L^* $\bar{\bar{\psi}}$ min apare la valori mai mici ale h^*

Figura 9.2 arată variația grafică a funcției $\bar{\bar{\psi}} = f(L^*)$.

Concluzia generală, care apare evidentă, este că în orice situație ψ crește cu creșterea L^*, dar la valorile mici ale acestuia creșterea este rapidă, iar începînd cu aproximativ $L^* = 3$, creșterea devine lentă (sau dispare complet).

Ca și în cazul figurii 9.1, luînd în discuție influența ξ, se vede că în toate situațiile valorile minime $\bar{\bar{\psi}}$ rezultă pentru $\xi = 1$. În ceea ce privește interacțiunea $h^* — L^*$ se vede că la L^* mici valorile minime ale $\bar{\bar{\psi}}$ rezultă pentru h^* mari, iar de la $L^* \cong (2—3)$ situația se inversează.

Astfel, curbele $\bar{\bar{\psi}} = f(L^*)$ pentru $h^* = 10^{-3}$*) intersectează cele pentru $h^* = 5.10^{-3}$ și 10^{-2} încă în intervalul cuprins între $L^* = 0{,}5—1$. Curbele 6—10, pentru $h^* = 5.10^{-3}$ încep să crească de la $L^* = 0{,}5$, iar cele pentru $h^* = 10^{-2}$(11—15) de la $L^* = 1$. Intersecția dintre aceste două familii de curbe se produce în jurul $L^* = 2$.

Prin urmare, în intervalul $1 < L^* < 2$ curbele 11—15 corespund valorilor mai mici ale $\bar{\bar{\psi}}$, iar de la $L \geqslant 2$ valorile mai mici sînt realizate de curbele *6—10.*

*) notate pe desen ① — ⑤.

★

Analiza rezultatelor descrisă mai sus, permite să se tragă unele concluzii în legătură cu comportarea față de vibrațiile de tipul flutter a structurilor studiate. Scopul final este de a se obține structura cea mai ușoară și cu limita vitezei critice de flutter cît mai ridicată.

Variația parametrului k arată că în cazul materialelor cu proprietăți de ortotropie, se poate obține o mărire a frontierei $\mathfrak{M}_{cr}$, prin mărirea modulului de elasticitate în sensul transversal E_β (considerîndu-se $E_\alpha = \text{const.}$ luînd o valoare maximă). Valori maxime se obțin pentru $E_\beta = E_\alpha$ adică atunci cînd materialul devine izotrop, cu modulul de elasticitate de valoare maximă. Creșterea $\mathfrak{M}_{cr}$ în raport cu k poate atinge valori de ordinul a 30—40%, ceea ce arată importanța acestui factor. Variația $\mathfrak{M}_{cr}$ este aproape aceeași în cazul diferitelor valori h^*, iar atunci cînd variază L^*, ea înregistrează o creștere sensibilă în special la valorile mici ale acestui parametru (L^*).

Parametrul ξ, permite să se tragă concluzii importante în cazul structurilor formate din mai multe straturi, izotrope sau ortotrope: în vecinătatea $\xi_1 = 1$ (straturile exterioare — subțiri) se observă o creștere rapidă a $\mathfrak{M}_{cr}$ odată cu creșterea ξ; apoi pe măsura variației ξ de la 1 spre 0 această variație devine din ce în ce mai lentă, iar în intervalul $\xi = (0{,}5-0)$ se obțin valori aproape staționare ale $\mathfrak{M}_{cr}$. Acest lucru se petrece în condițiile unei sporiri continui a greutății structurii datorită îngroșării straturilor exterioare, avînd o greutate specifică mai mare decît stratul interior. De aici rezultă că o calitate optimă din punctul de vedere al acestui parametru se obține în intervalul $\xi = (0{,}80+0{,}95)$ corespunzător structurii cu straturile exterioare cît mai subțiri. Îngroșarea acestor straturi este cît se poate de dezavantajoasă: se obține o sporire neînsemnată a $\mathfrak{M}_{cr}$, dar, totodată, o creștere sensibilă a greutății. Această lege de variație $\mathfrak{M}_{cr} = f(\xi)$ își păstrează valabilitatea în toate cazurile de variație a altor parametri, fiind deosebit de pronunțată în cazul L^* mici.

Parametrul h^* este un factor de primă importanță pentru mărirea vitezei critice ca valoare absolută. El influențează direct această limită și asupra lui trebuie acționat, atunci cînd din calcule rezultă că viteza critică de flutter are o valoare prea joasă.

Parametrul L^* este o caracteristică de formă a structurii, care are o influență destul de consistentă asupra $\mathfrak{M}_{cr}$. La proiectarea vehicolelor aerospațiale trebuie să se țină cont de această caracteristică pentru îmbunătățirea calității structurii din punctul de vedere al rezistenței la flutter. S-a arătat că $\mathfrak{M}_{cr}$ este influențat puternic de parametrul L^*, atunci cînd acesta are valori mici ($L^* < 2$) și este avantajos ca el să fie cît mai mic (învelitoarea cilindrică să fie scurtă). După depășirea unei valori cuprinse între $L = (2-3)$, acest parametru începe să nu influențeze practic $\mathfrak{M}_{cr}$ (la $L^* = 3$ sau $L^* = 5$, alți parametri fiind fixați, $\mathfrak{M}_{cr}$ este practic același).

Sensibilitatea $\mathfrak{M}_{cr}$ la L^* (cînd acesta este mic) ne conduce să-l plasăm la același ordin de importanță cu parametrul h^*. Atunci cînd nu se poate acționa asupra acestui parametru, trebuie să se caute o mărire a $\mathfrak{M}_{cr}$ prin micșorarea L^*.

Parametrul $\bar{\psi}$ — variația lui în raport cu ξ sau L^*, ne permite să tragem direct concluziile asupra modului cum trebuie să se proiecteze struc-

tura studiată pentru a avea o calitate optimă la caracteristica [ușurință/stabilitate la flutter].

Pentru realizarea acestui deziderat, adică pentru ca structura să fie cît mai ușoară, dar în același timp cît mai stabilă la flutter, trebuie să se caute obținerea valorii cît mai mici a parametrului $\bar{\psi}$, iar structura trebuie să îndeplinească următoarele condiții :

— să aibe parametrul ξ cît mai aproape de valoarea 1 ($\xi \sim 1$), adică să predomine ca grosime stratul mediu ușor, iar straturile exterioare să fie foarte subțiri.

Acest deziderat este valabil pentru orice valori h^* sau L^* ;

— să aibe parametrul h^* cît mai mare și, în același timp L^*, cît mai mic. Această concluzie este valabilă pentru valori „mici" ale L^*.

Dacă L^* intră în domeniul valorilor „mari", pentru obținerea calității optime h^* trebuie să fie cît mai mic.

Această interacțiune a parametrilor h^* și L^* este de cea mai mare importanță în realizarea optimumului și este ilustrată în figura 9.2 în care se vede că curbele $\bar{\psi} = f(L^*)$ pentru diferite ($h^* = \text{const}$) se intersectează în intervalul în care L^* trece de la valorile „mici" la cele „mari" (această împărțire a L^* (în valori mici și mari) este dictată tocmai de intersecțiile respective). Este avantajos, ca structura să fie astfel proiectată ca să se afle în intervalul „valorilor mici" ale L^*. Atunci o sporire a grosimii relative h^* duce atît la îmbunătățirea calității, cît și la mărirea $\mathfrak{M}_{cr}$, ca valoare absolută. În celălalt interval se poate obține o mărire a $\mathfrak{M}_{cr}$ (mărind h^*) în dauna calității. Ținînd cont că și micșorarea L^* contribuie la mărirea $\mathfrak{M}_{cr}$ în sensul absolut, avantajul intervalului „L^* mici" apare și mai evident.

Deci, *structura optimă* trebuie să prezinte următoarele caracteristici :

$\xi \sim 1$,
$k \sim 1$,
L^* cît mai mic,
h^* cît mai mare,

la care se mai poate adăuga condiția:

$\tilde{q}$ cît mai mic (adică diferența de greutăți specifice ale straturilor să fie cît mai mare cu putință).

O structură avînd anumite dimensiuni poate fi îmbunătățită prin următoarele modificări ale geometriei ei : Păstrîndu-se raza R la o valoare constantă trebuie să se mărească grosimea h și să se micșoreze lungimea L. În felul acesta parametrul h^* crește, iar L^* scade.

În continuare, o îmbunătățire a stabilității la flutter păstrîndu-se totodată calitatea, trebuie căutată prin îmbunătățirea proprietăților fizico-mecanice. Se va căuta ca straturile exterioare să fie confecționate din materiale cu modulele de elasticitate în ambele sensuri cît mai mari (E_α și $E_\beta \to E_{MAX}$).

★

Prezenta investigație, care nu are pretenție de a fi epuizat subiectul studiului influenței parametrilor asupra vitezei critice de flutter, s-a referit la unii parametri constructivi geometrici și fizico-mecanici, considerînd

constanți alți parametri ai problemei (ca, de exemplu, cei privind mediul exterior (densitatea și viteza sunetului) sau cei de amortizare structurală — considerată egală cu zero).

Luarea în considerație a variației și a acestor parametri va permite, cu siguranță, să se tragă noi concluzii asupra factorilor care condiționează apariția flutterului. De asemenea, este foarte interesant să se extindă studiul și la învelitori de alte forme, de exemplu, conice. Toate aceste studii trebuie să fie întreprinse în continuare, în viitor.

Primită la redacție la 27.XII.1972

BIBLIOGRAFIE

ЛИТЕРАТУРА

1. Hans Krumhaar, *Supersonic Flutter of Cylindrical Shell of Finite Lenght in an Axisymmetrical Mode*, AFOSR 1574, Guggenheim Aeronautical Laboratory, California Institute of Technology Pasadena, California, 1961.
2. Hans Krumhaar, *Supersonic Flutter of a circular cylindrical Shell of Finite Lenght in an Axisymmetrical Mode*, Internat, Journal of Solids and Structures 1965.
3. А. А. Мовчан, *О колебаниях пластинки, движущейся в газе*, Прикладная математика и механика, ПММ, **XX**, *2* (1956).
4. А. А. Мовчан, *Об устойчивости панели, движущейся в газе*, ПММ, **XXI**, *2* (1957).
5. А. А. Мовчан, *О влиянии аэродинамического демпфирования на сверхзвуковой флаттер обшивки*, Изд. АНСССР, ОТН, Механика и машиностроение *1* (1960).
6. А. А. Мовчан, *Поведение комплексных собственных значений в задаче о флаттере панели*, Инженерный Сборник, **XXVII** (1960).
7. Р. Д. Степанов, *О флаттере цилиндрических оболочек и панелей, движущихся в потоке газа*, ПММ, **XXI**, *5* (1957).
8. A. A. Perlmutter, *On the Aeroelastic Stability of Orthotropic Panels in Supersonic Flow*, J. Aero-Space Sci. *11* (1962).
9. L. Librescu și E. Malaiu, *Supersonic Flutter of Circular Cylindrical Heterogeneous Orthotropic Thin Panels of Finite Lenght*, Journ. Sound Vibrations, *8* (1968).
10. L. Librescu, *Statica și Dinamica Structurilor Elastice Anizotrope și Eterogene*, București, Edit. Academiei, 1969.
11. — *Aeroelastic stability of orthotropic heterogeneous thin panels in the vicinity of the flutter critical boundary*, Journal de Mécanique, **6**, *1*, (1967).
12. M. Holt și S. Strack, *Supersonic Panel Flutter of a Cylindric Shell of Finite Length*, J. Aero/Sp. Sci., *3* (1961).
13. J. W. Milles, *Supersonic Flutter of a Cylindrical Shell*, JAS, *2* (1957).
14. D. J. Johns, *Supersonic Flutter of a Cylindrical Panel in an Axi-Symmetric Mode*, JRAS, June 1960.
15. В. С. Гонткевич, В. В. Пономаренко, *Собственные колебания цилиндрических оболочек в гиперзвуковом потоке жидкости*, Динамика и прочность машин. Вып. 3. Изд. Харьковского Ун-та, 1966.
16. Shigeo Kobayashi, *Supersonic Panel Flutter of Unstiffened Circular Cylindrical Shells Havind Simply Suported Ends*, Trans. of the Japan So c. for. Aero and Space Sci.

17. Ю.Ю. Швейко, *Устойчивость круговой цилиндрической оболочки в потоке газа*, Изв. АНСССР, ОТН, Механика и машиностроение, *6* (1960).
18. А. Д. Брусиловский, Л. М. Мельникова и Ю. Ю. Швейко, *Колебания и устойчивость цилиндрической оболочки в потоке газа*, Инженерный Журнал. Механика твердого тела, *1*, 67 (1966).
19. Ю. Ю. Швейко, *Флаттер круговой цилиндрической оболочки*, Труды Конференции по теории пластин и оболочек. Казань, 1960.
20. Z. Dzygadlo, *Self-Excited Vibrations of a Cylindrical Shell of Finite Length in Supersonic Flow*, Proceedings of Vibrat. Problems, **3**, 1 (1962).
21. Z. Dzygadlo, S. Kaliski, *Self-Excited Vibrations of a Stiffened Cylindrical Orthotropic Inelastic Shell in a Linearized Supersonic Flow*, Proc. Vibr. Probl. Polish. A.S. 3, 1962.
22. А. А. Ильюшин, *Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей*, ПММ, **XX**, *6* (1956).
23. H. Ashley şi G. Zartarian, *Piston Theory a New Aerodynamic Tool for the Aeroelastician*, JAS, Dec. 1956.
24. С. А. Амбарцумян, *Теория анизотропных пластин*, Прочность—Устойчивость—Колебания, Изд. Наука, М. 1967.
25. S. Timoshenko, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill. nr. 1940.
26. С. А. Амбарцумян, *Теория анизотропных оболочек*, Физматгиз. М. 1961.
27. В. З. Власов, *Общая теория оболочек и ее приложение к технике*, Изд. АНСССР, М. 1962.
28. L. H. Donnell, *A New Theory for the Buckling of Thin Cylinders under Axial Compression and Bending*, Trans. Am. Soc. Mech. Enggrs. *56*, 795 (1934).
29. Y. C. Fung, *A Summary of the Theories and Experiments on Panel Flutter*, AFOSR TN 60—224, California Inst. of Techn. — Guggenheim Aeronautical Lab. (1960).
30. Y. C. Fung, *Some recent contributions to panel flutter*, A.I.A.A.J. *4* (1963).
31. В. В. Болотин, *Современные направления в области динамики пластин и оболочек*, Сб. Теория пластин и оболочек, Киев, 1962.
32. Э. И. Григолюк, Р. Е. Лампер и Л. Г. Шанаров, *Флаттер панелей и оболочек*, АНСССР. Инст. Научной информации. Итоги науки „Механика", 1963.
33. D. J. Johns, *A Survey of Panel Flutter*, working paper F3 (AGARD Presented at the 19th Meeting of the Panel, Paris, 64.
34. П. Гудмен, И. Раттайя, *Обзор литературы по флаттеру панели и влиянию аэродинамического шума*, „Механика", Сб. переводов, *5* (1960).
35. В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков, Ю. Ю. Швейко, *Глава „Теория аэроупругости"*, Справочник Прочность—Устойчивость—Колебания, Машгиз, 1968.
36. Ю. В. Васильев, *Сверхзвуковый флаттер цилиндрических слоистых оболочек*, Rev. Roum. Sci. Techn-Méc. Appl. *4* (1970).

STUDII ŞI CERCETĂRI TEORETICE-EXPERIMENTALE PRIVIND SECURITATEA TEHNICĂ A CAPACULUI SEMISFERIC AL UNUI RECIPIENT CILINDRIC DE MARE PRESIUNE. II.

de A. PAVEL

Institutul de petrol, gaze şi geologie din Bucureşti

6. DETERMINAREA PRIN MĂSURĂRI TENSOMETRICE *) A EFORTURILOR UNITARE DIN CAPACUL SEMISFERIC

Măsurările tensometrice au fost efectuate în condiţiile încercării hidraulice de presiune la rece, în scopul determinării valorilor reale (experimentale) ale eforturilor unitare σ_{te}^{exp} şi σ_{me}^{exp}. Amplasarea poziţională a punctelor de măsurare, în care au fost fixaţi traductorii tensometrici, este indicată în figura 5. Se precizează că toate cele 4 puncte de măsurare au fost amplasate numai pe suprafaţa exterioară a capacului, în lungul aceluiaşi meridian situat în planul normal la planul urechilor de prindere, la intervale echidistante. În fiecare punct de măsurare s-au lipit cîte doi traductori tensometrici, orientaţi pe direcţiile principale (inelară şi meridiană) ale eforturilor unitare.

Pentru scopul precizat au fost folosiţi traductori tensometrici cu fir (mărci tensometrice) de fabricaţie TPW, ale căror caracteristici constructiv-funcţionale sînt indicate în tabela 12. Lipirea acestora pe corpul capacului, pregătit în mod corespunzător (curăţat şi şlefuit local pînă la luciu metalic), s-a făcut cu adeziv tensometric X60—H.B.M., cu priză rapidă, iar legarea lor la aparatura de măsurare s-a realizat cu ajutorul conductorilor telefonici multifilari cu 50 de fire, avînd, fiecare, o lungime de 25 m.

*) Măsurările tensometrice au fost făcute de către colectivul prof. dr. ing. Gh. Buzdugan, şeful catedrei de Rezistenţa materialelor de la Institutul politehnic din Bucureşti.

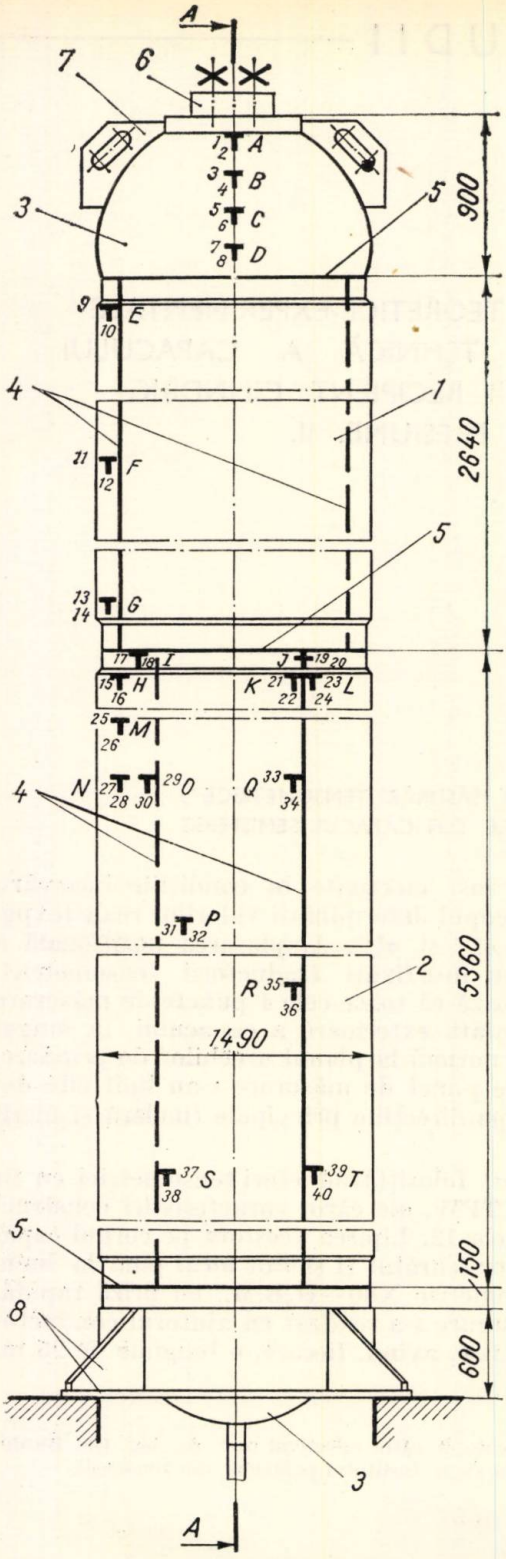


Fig. 5. — Amplasarea poziţională a traductorilor tensometrici pe corpul recipientului nr. 2:
1 — virola superioară; 2 — virola inferioară; 3 — capacele (fundurile) semisferice; 4 — cusăturile sudate longitudinale (cusăturile din spate s-au reprezentat punctat); 5 — cusăturile sudate inelare; 6 — sistemul de fixare a capacului gurii de vizitare; 7 — urechile de prindere la manevrele de montare-demontare; 8 — sistemul de rezemare pe fundaţie.
A, *B*, *C*, ..., *T* — puncte de măsurare;
1, 2, 5, ..., 39 — traductori tensometrici pentru măsurarea deformaţiilor specifice principale inelare ε_1;
2, 4, 6, ..., 40 — traductori tensometrici pentru măsurarea deformaţiilor specifice principale meridiane ε_2.

Măsurările s-au efectuat cu o punte tensometrică tranzistorizată Orion de tip RZ-007, care dă o eroare la măsurarea deformațiilor specifice de $\pm 10^{-5}$. Legătura dintre traductorii tensometrici și puntea tensometrică s-a realizat prin intermediul unei cutii de comutare Orion de tip RZ-004 cu 12 posturi.

Avînd în vedere starea fizică a capacului semisferic și condițiile de lucru ale recipientului nr. 2, încercarea (hidraulică) de presiune la rece s-a făcut pînă la presiunea maximă de lucru $p_{max} = p_c = Pn = 320$ kgf/cm² în trei cicluri, citirea indicațiilor punții tensometrice efectuîndu-se pentru fiecare ciclu în parte atît la încărcare (ridicarea lentă și treptată a presiunii), cît și la descărcare (coborîrea lentă și treptată a presiunii). Măsurările s-au făcut simultan pe toți cei 40 de traductori tensometrici, dintre care, așa cum s-a menționat anterior, numai 8 au fost amplasați pe capacul semisferic. Pentru cele trei cicluri de încărcare-descărcare (I, II și III), în tabela 13 sînt indicate valorile efective ale treptelor de presiune realizate și menținute un timp corespunzător în recipientul nr. 2.

Tabela 12

Caracteristici constructiv-funcționale ale traductorilor rezistivi cu fir utilizați pentru executarea măsurărilor tensometrice

Dimensiunea bazei traductorului, mm	Rezistența electrică a traductorului Ω	Constanta traductorului	Punctele de măsurare
5	302	1,75	A...D

Tabela 13

Treptele de presiune interioară la care s-au efectuat măsurările tensometrice în cazul recipientului nr. 2

Denumirea ciclului de încercare	Presiunea interioară p, kgf/cm²								
	La încărcare					La descărcare			
De referință*	0,0	100,0	200,0	250,0	320,0	250,0	200,0	100,0	0,0
I	23,5	101,0	193,5	248,0	325,0	250,0	201,0	100,0	23,0
II	23,0	100,0	203,5	243,0	330,0	242,0	200,5	98,5	22,5
III	22,5	—	—	—	317,5	—	—	—	—

* Datorită modului de funcționare al pompei folosite pentru ridicarea suprapresiunii și modului de realizare a închiderii etanșe a recipientului, nu a fost posibilă atingerea riguroasă exactă a treptelor de presiune corespunzătoare ciclului de referință.

În urma citirilor repetate pentru un același traductor tensometric, la o aceeași valoare a presiunii de încercare, au fost obținute mai multe valori măsurate ale aceleiași deformații specifice. Valoarea cea mai probabilă a deformației specifice respective s-a precizat în urma prelucrării statistice a datelor experimentale, după ce s-a observat că valorile maxime măsurate ale deformațiilor specifice nu atingeau în nici unul din punctele de măsurare valorile corespunzătoare limitei de curgere $\sigma_{0,2min}$ (tab. 2) a materialului capacului semisferic și deci se putea admite că între deformația specifică ε și presiunea de încercare p există o dependență liniară de forma

$$\varepsilon = ap, \tag{21}$$

în care a, în cm²/kgf, este un coeficient de proporționalitate, ale cărui valori probabile au fost calculate — prin procedeul celor mai mici patrate — pentru fiecare grup de indicații ale fiecărui traductor tensometric în parte.

Cunoscîndu-se valorile deformațiilor specifice principale ε_1 și ε_2, eforturile unitare principale $\sigma_1^{exp} = \sigma_{te}^{exp}$ și $\sigma_2^{exp} = \sigma_{me}^{exp}$ s-au evaluat, în conformitate cu legea lui Hooke generalizată, cu formulele:

$$\sigma_1^{exp} = \sigma_{te}^{exp} = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), \tag{22}$$

$$\sigma_2^{exp} = \sigma_{me}^{exp} = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1), \tag{23}$$

pentru o valoare a modulului de elasticitate longitudinal $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ kgf/cm² și o valoare a coeficientului lui Poisson $\mu = 0{,}30$.

Calculele s-au efectuat pe o mașină electronică de calcul Olivetti de tip Programma 101.

7. PRELUCRAREA ȘI INTERPRETAREA REZULTATELOR ÎN CAZUL CAPACULUI SEMISFERIC AL RECIPIENTULUI NR. 2

7.1. EFORTURILE UNITARE ȘI COEFICIENȚII DE SLĂBIRE

În figura 6 este prezentată, comparativ, dependența teoretică și cea experimentală dintre efortul unitar σ_{te} și presiunea (de încercare) p pentru fiecare traductor tensometric în parte. Valorile reale (experimentale) cele mai probabile ale coeficienților de proporționalitate k^{exp}, corespunzătoare fiecărui traductor tensometric, au fost obținute prin prelucrarea matematică după procedeul celor mai mici patrate a datelor experimentale și sînt indicate în tabela 14.

Din analiza atentă a dependențelor prezentate în figura 6 rezultă, în principal, următoarele:

— datele experimentale confirmă, în toate cazurile, dependența liniară dintre eforturile unitare inelare σ_t și presiunea interioară p, evidențiată anterior pe cale analitică (fig. 4); așadar, în domeniul valorilor p, în care s-au făcut încercările hidraulice de presiune la rece, comportarea oțelului 22K, din care este executat capacul semisferic, este, în mod cert, elastică;

— caracterul dependenței liniare dintre eforturile unitare inelare σ_t și presiunea p este același atît la încărcare, cît și la descărcare;

— eforturile unitare inelare σ_t^{ps} sînt — în mod practic, în toate punctele de măsurare — cu mult (peste 30%) mai mari decît eforturile unitare inelare σ_{te}^{exp}, aceasta confirmînd supraevaluarea grosimii de perete necesare și deci supradimensionarea capacului semisferic cu peste 30%;

— eforturile unitare inelare σ_{te}^{pg} sînt, în general, cu circa 12...32% mai mici decît eforturile unitare inelare σ_{te}^{exp}, însă pentru cazul de față ($s_t \neq$ $\neq$const. în lungul meridianului) aceasta nu înseamnă, așa cum se va dovedi

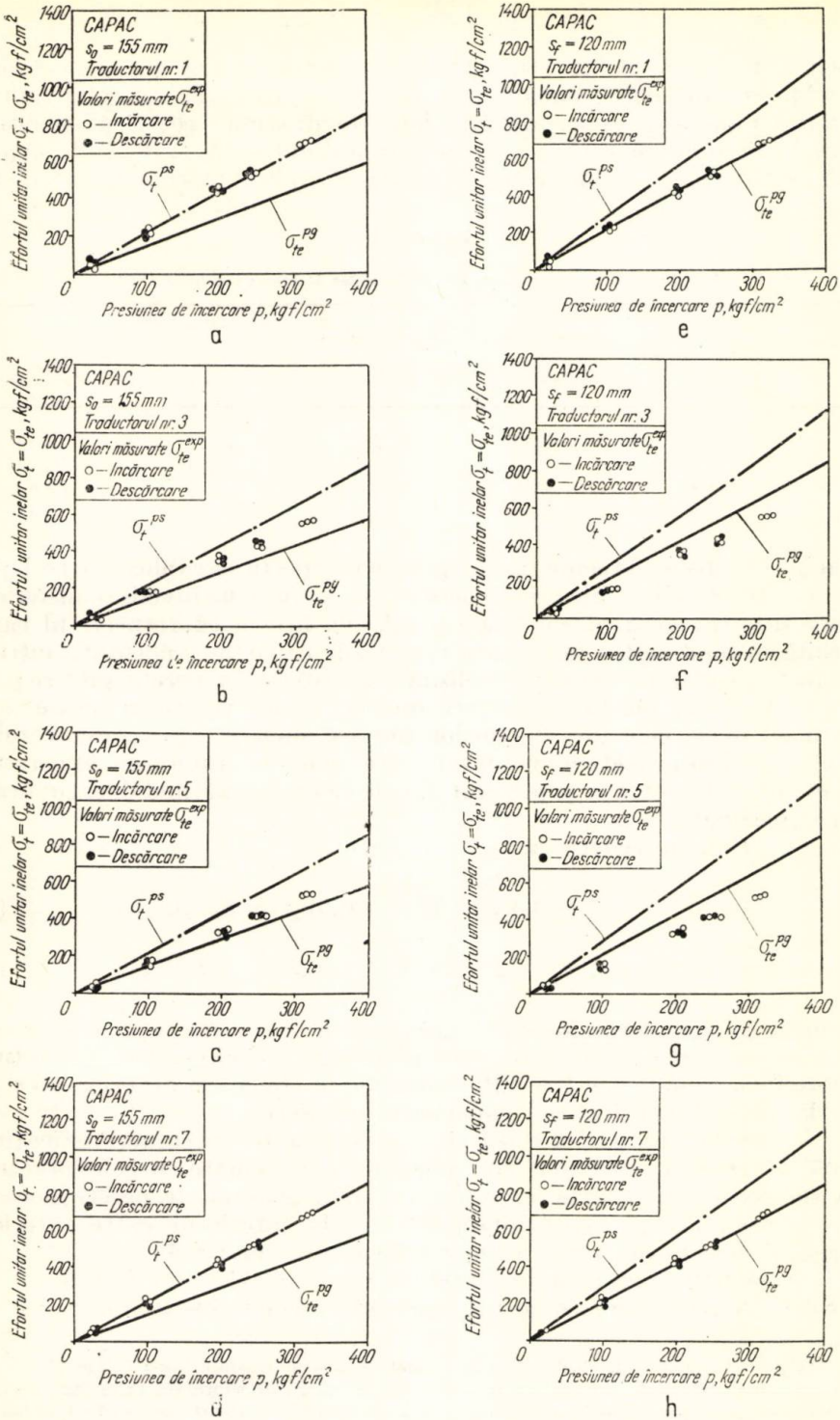


Fig. 6. — Dependența efortului unitar σ_{te} de presiunea (de încercare) p.

——— dependența teoretică corespunzătoare ipotezei învelișului semisferic cu perete gros ;

– – – – dependența teoretică corespunzătoare ipotezei învelișului cilindric cu perete subțire.

în cele ce urmează, că între teorie şi experiment a apărut o neconcordanţă supărătoare; de altfel, dacă s-ar avea în vedere numai simplul fapt că abaterile punctelor experimentale faţă de dreapta teoretică se înscriu totuşi în limitele abaterilor normale (de ordinul a 25...40 %) de experimentare, ar rezulta — fără alte justificări — că, la suprafaţa sa exterioară,

Tabela 14

Valorile reale (experimentale) ale coeficienţilor de proporţionalitate k^{exp}

Punctul de măsurare (fig. 5)	Numărul traductorului (fig. 5)	Coeficienţii de proporţionalitate			
		$k^{exp}_{ech\ e\ I} = k^{exp}_{te}$	k^{exp}_{me}	$k^{exp}_{ech\ e\ IV}$	$k^{exp}_{ech\ i\ IV}$
A	1; 2	2,17	2,03	2,10	3,14
B	3; 4	1,76	1,20	1,56	2,93
C	5; 6	1,68	0,85	1,45	2,80
D	7; 8	2,13	1,52	1,90	3,12

capacul semisferic al recipientului nr. 2 se comportă în exploatare (sub presiune) ca un înveliş semisferic cu perete gros şi nu ca un înveliş semisferic cu perete subţire; această concluzie prealabilă atestă că respectivul capac prezintă în mod cert o însemnată rezervă de capacitate portantă, întrucît el a fost calculat în ipoteza învelişului semisferic cu perete subţire;

— teoretic, eforturile unitare inelare σ_t^{ps} au valori cu peste 45 % mai mari decît cele ale eforturilor unitare inelare σ_{te}^{pg}; acest rezultat teoretic, apriori considerat verosimil, este inclus în rezultatele experimentale evidenţiate anterior şi precizat în cele ce urmează, fiind deci confirmat prin experiment;

— avînd în vedere că

$$\sigma_{ti}^{pg} = \sigma_{te}^{pg} + 0{,}5\ p = (k_{te}^{pg} + 0{,}5)\ p = k_{ti}^{pg}\ p, \tag{24}$$

$$\sigma_{ti}^{exp} = \sigma_{te}^{exp} + 0{,}5\ p = (k_{te}^{exp} + 0{,}5)\ p = k_{te}^{exp}\ p, \tag{25}$$

se constată imediat că eforturile unitare inelare σ_t^{ps} sînt — în mod practic în toate punctele de măsurare — cu pînă la 28 % mai mari decît eforturile unitare inelare σ_{ti}^{exp}, acest rezultat confirmînd concluzia anterioară cu privire la supradimensionarea capacului semisferic;

— aşadar, la nivelul oricăreia dintre suprafeţele caracteristice (interioară, exterioară, mediană) sau suprafeţele învecinate cu cele caracteristice ale capacului semisferic, supraevaluarea grosimii de perete necesare este apreciabilă, ea accentuîndu-se*) de la interiorul către exteriorul capacului semisferic, unde atinge valoarea sa maximă;

— pentru cazul cînd se consideră $s_j = s_0 = 155$ mm (fig. 6, a...d), în toate cele patru puncte de măsurare, eforturile unitare inelare σ_{te}^{exp} sînt

*) Deşi, în mod real, eforturile unitare inelare σ_t scad sensibil, după o lege hiperbolică, pe măsura îndepărtării de suprafaţa interioară şi a apropierii de suprafaţa exterioară ale capacului semisferic, la proiectarea recipientului nr. 2 s-a considerat (foarte acoperitor) numai ipoteza învelişului semisferic cu perete subţire, conform căreia $\sigma_t = \sigma_{ti} = \sigma_{te} = \text{const.}$

mai mari decît eforturile unitare inelare $\sigma_{te}^{pg} < \sigma_t^{ps}$, dar nu depășesc sensibil și în afara preciziei normale de experimentare eforturile unitare inelare σ_t^{ps};

— pentru cazul cînd se consideră $s_f = 120$ mm (fig. 6 *e*, ..., *h*), în toate cele patru puncte de măsurare, eforturile unitare inelare σ_{te}^{exp} sînt mai mici decît sau cel mult egale (în limitele preciziei normale de experimentare) cu eforturile unitare inelare σ_{te}^{pg};

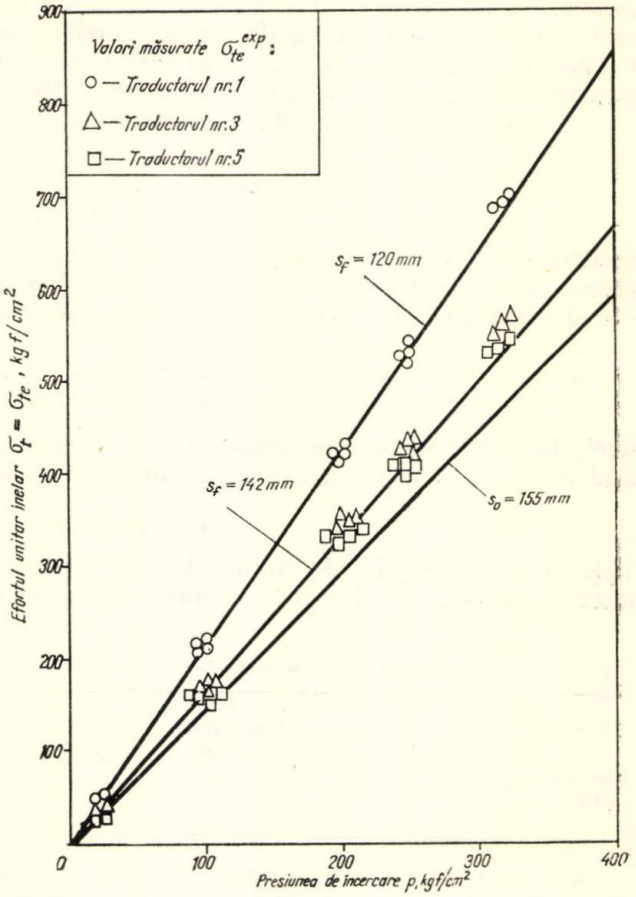


Fig. 7. — Dependența efortului unitar inelar σ_{te} de presiunea de încercare p. Grafic comparativ.

Observație. Dependențele teoretice (liniare) corespund suprafeței exterioare a învelișului semisferic cu perete gros ($\sigma_i = \sigma_{te}^{pg}$).

— în cazurile cînd, succesiv, se consideră 120 mm $< s_f <$ 155 mm (fig. 7), se constată că eforturile unitare inelare σ_{te}^{exp} îndeplinesc, în mod concordant și de asemenea succesiv, condiția $\sigma_{te}^{exp} < \sigma_{te}^{pg}$;

— întrucît toate cele patru puncte de măsurare au fost amplasate în lungul aceluiași meridian (fig. 5), în baza rezultatelor precizate anterior, se poate conchide că grosimea de perete s_f a capacului semisferic este *variabilă* în lungul meridianului, ea variind de la o valoare *maximă*, aproximativ egală cu

$$s_f = s_0 = 155 \text{ mm},$$

corespunzătoare zonei de racordare a părții bombate cu partea cilindrică de trecere, pînă la o valoare *minimă*, aproximativ egală cu

$$s_f = s_{f\min} = 120 \ldots 125 \text{ mm}, \qquad (26)$$

corespunzătoare zonei superioare a capacului semisferic, în care este sudat inelul de consolidare al gurii de vizitare (fig. 2 și 5);

— avînd în vedere că punctele de măsurare A și D (fig. 5) au fost amplasate în zona unor puternice efecte (locale) de contur, se poate concluziona de asemenea că sporirea sensibilă a eforturilor unitare inelare σ_{te}^{exp} (tab. 14) este datorită nu numai modificării grosimii de perete s_f, ci și concentrărilor locale de eforturi unitare, care sînt destul de însemnate; dacă se iau ca referință eforturile unitare inelare σ_{te}^{exp} măsurate în punctul C (fig. 5), atunci rezultă că eforturile unitare inelare σ_{te}^{exp} măsurate în punctele A și D (fig. 5) sînt cu circa 28...29% mai mari;

— întrucît factorul de suprasolicitare — notat cu m — este

$$m = \frac{\sigma_{te}^{exp}}{\sigma_{te}^{pg}} = \frac{k_{te}^{exp}}{k_{te}^{pg}}, \tag{27}$$

pentru coeficientul de slăbire (reducere) ψ_f, care în acest caz include atît efectul variației grosimii de perete s_f, cît și efectele concentratorilor locali de eforturi unitare, rezultă următoarea formulă de calcul:

$$\psi_{f\,real} = \frac{1}{m} = \frac{k_{te}^{pg}}{k_{te}^{exp}} = \frac{s_{f\,real}}{s_0}, \tag{28}$$

deci, în punctele de măsurare $A...D$ (fig. 5), grosimea de rezistență *real disponibilă* a peretelui capacului semisferic este

$$s_{f\,real} = \psi_{f\,real}\, s_0, \tag{29}$$

valorile coeficientului de slăbire $\psi_{f\,real}$ și ale grosimii de perete $s_{f\,real}$ sînt date în tabela 15, din care, pentru punctele de măsurare menționate,

Tabela 15

Valorile reale ale coeficientului de slăbire și ale grosimii de rezistență a peretelui capacului semisferic

Punctul de măsurare (fig. 5)	Coeficientul de slăbire real $\psi_{f\,real}$	Grosimea de rezistență real disponibilă a peretelui capacului semisferic $s_{f\,real} = \psi_{f\,real}\, s_0^*$, mm	Diferența (pierderea) de grosime Δs_f, mm	Observații privind amplasarea pe capacul semisferic a punctelor de măsurare (fig. 5)
A	0,680	105,40 (135,00 **)	49,60 (20,00 **)	Lîngă cusătura sudată inelară a inelului de consolidare al gurii de vizitare (zonă cu puternic efect concentrator de eforturi unitare)
B	0,839	130,05	24,95	Pe meridianul care trece prin punctele A și D
C	0,879	136,25	18,75	Pe meridianul care trece prin punctele A și D
D	0,693	107,42 (137,00 **)	47,58 (18,00 **)	În zona de racordare a părții bombate cu partea cilindrică de trecere (zonă cu puternic efect concentrator de eforturi unitare), pe meridianul care trece prin punctul A

* $s_0 = 155$ mm.

** Valori aproximative, corespunzătoare situației cînd efectele locale, concentratoare de eforturi unitare, ar fi neglijabil de mici.

rezultă că

$$\psi_{f\text{real}} = 0{,}680 \ldots 0{,}879, \tag{30}$$

$$s_{f\text{real}} = 105{,}40 \ldots 136{,}25 \text{ mm}, \tag{31}$$

deci

$$\Delta s_f = s_0 - s_{f\text{real}} = 49{,}60 \ldots 18{,}75 \text{mm}; \tag{32}$$

așadar, în cazul capacului semisferic, „pierderea" de grosime Δs_f, datorită procedeului de execuție (matrițării) folosit pe de o parte și efectelor locale concentratoare de eforturi unitare pe de altă parte, este de ordinul a circa 19...50 mm, ea fiind variabilă în lungul meridianului; *valorile minime* ale mărimilor $\psi_{f\text{real}}$ și $s_{f\text{real}}$ corespund părții superioare a capacului semisferic și sînt aproximativ următoarele:

$$\psi_{f\text{real min}} = 0{,}680; \tag{33}$$

$$s_{f\text{real min}} = 105 \text{ mm}. \tag{34}$$

În graficele comparative din figurile 8 și 9 sînt prezentate centralizat, principalele rezultate teoretice și experimentale care privesc direct

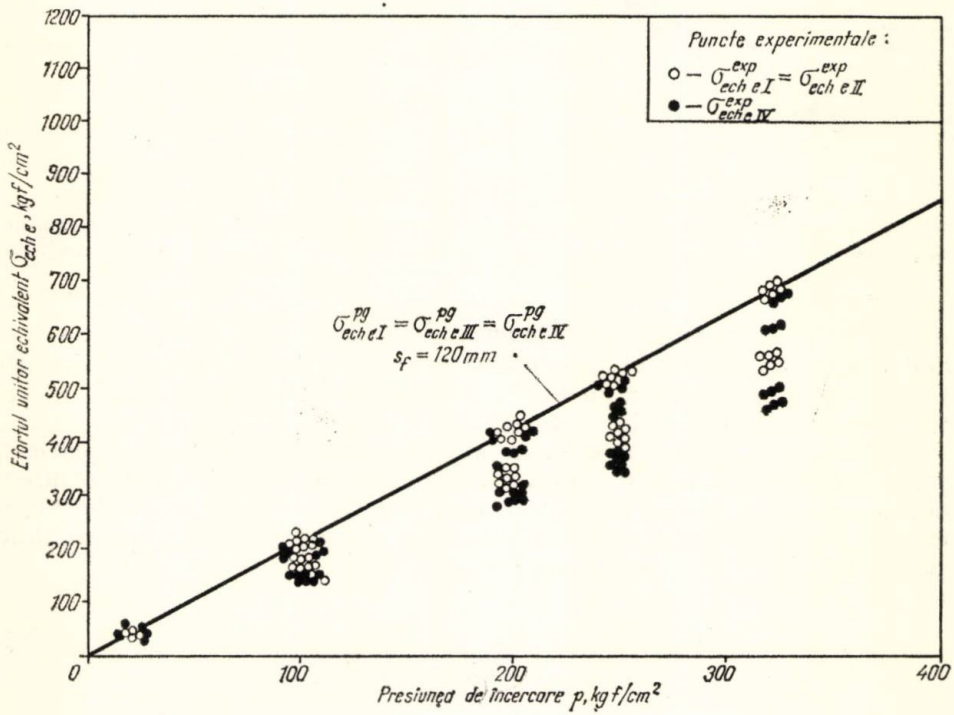


Fig. 8. — Dependența teoretică a eforturilor unitare echivalente $\sigma^{pg}_{ech\,e}$, calculate pentru $s_f = 120$ mm, de presiunea de încercare p și compararea acesteia cu rezultatele experimentale corespunzătoare. Grafic comparativ.

capacul semisferic al recipientului nr. 2. După cum se vede din figurile 8 şi 9, punctele experimentale încadrează foarte favorabil dependenţele teoretice corespunzătoare, abaterile înscriindu-se, în aproape toate cazurile studiate, în limitele normale ale preciziei de experimentare. Se va observa

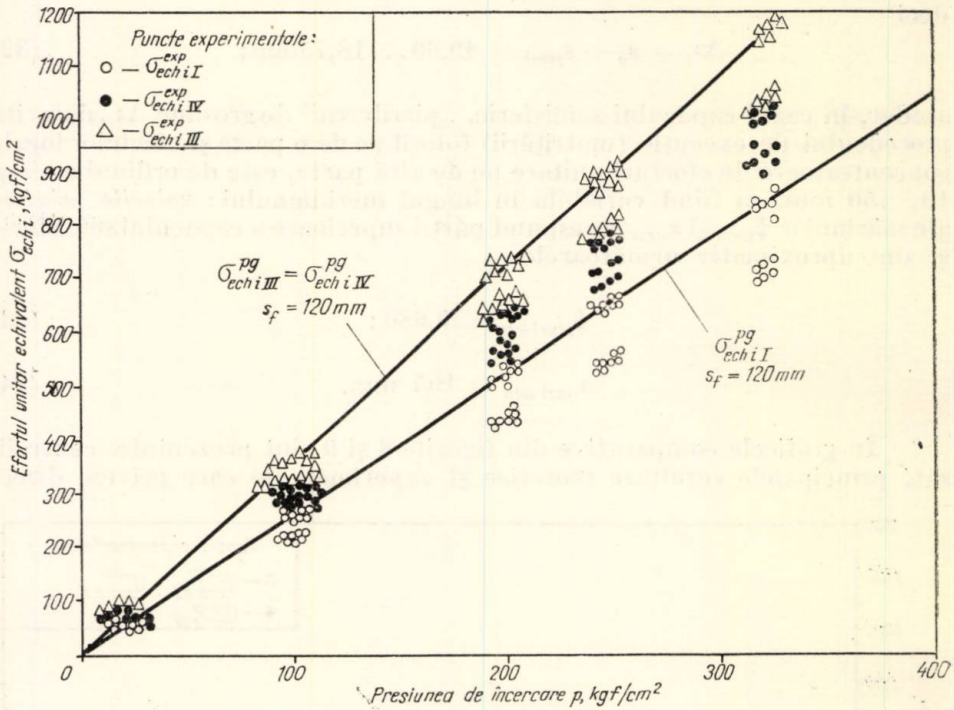


Fig. 9. — Dependenţa teoretică a eforturilor unitare $\sigma^{pg}_{ech\,i}$, calculate pentru $s_f = 120mm$. de presiunea de încercare p şi compararea acesteia cu rezultatele experimentale corespunzătoare Grafic comparativ.

de asemenea că punctele experimentale se înscriu — practic, toate — sub dependenţele teoretice corespunzătoare, ceea ce atestă încă odată că slăbirea reală a peretelui capacului semisferic nu este îngrijorătoare în nici una din zonele avute în vedere.

Fără a fi reluate concluziile anterior sintetizate, concluzii care, în principal, sînt din nou şi sugestiv evidenţiate în figurile 8 şi 9, se precizează numai că eforturile unitare echivalente, evaluate în conformitate cu cele trei teorii (criterii) de rezistenţă care au fost avute în vedere, îndeplinesc în general inegalitatea :

$$\underset{(Valori\ minime)}{\sigma^{exp}_{ech\,i\,I}} < \underset{(Valori\ intermediare)}{\sigma^{exp}_{ech\,i\,IV}} < \underset{(Valori\ maxime)}{\sigma^{exp}_{ech\,i\,III}}, \tag{35}$$

respectiv

$$\sigma^{pg}_{ech\,i\,III} = \sigma^{pg}_{ech\,i\,IV} > \sigma^{pg}_{ech\,i\,I}. \tag{36}$$

Domeniul punctelor experimentale este delimitat în figura 9 prin valorile extreme — maximă și, respectiv, minimă — ale eforturilor unitare echivalente $\sigma^{exp}_{ech\,i\,III}$ și $\sigma^{exp}_{ech\,i\,I}$. Așadar, *cele mai mari* sînt eforturile unitare echivalente $\sigma_{ech\,i}$, pentru care *valorile maxime* corespund teoriei III, iar *valorile minime* corespund teoriei I.

Compararea dependențelor teoretice dintre eforturile unitare meridiane σ_m și presiunea de încercare p cu cele experimentale corespunzătoare este făcută în figura 10, care confirmă în totalitate și în mod sugestiv concluziile formulate anterior. Nu se va insista asupra interpretării graficului din figura 10, deoarece în toate cazurile studiate este îndeplinită

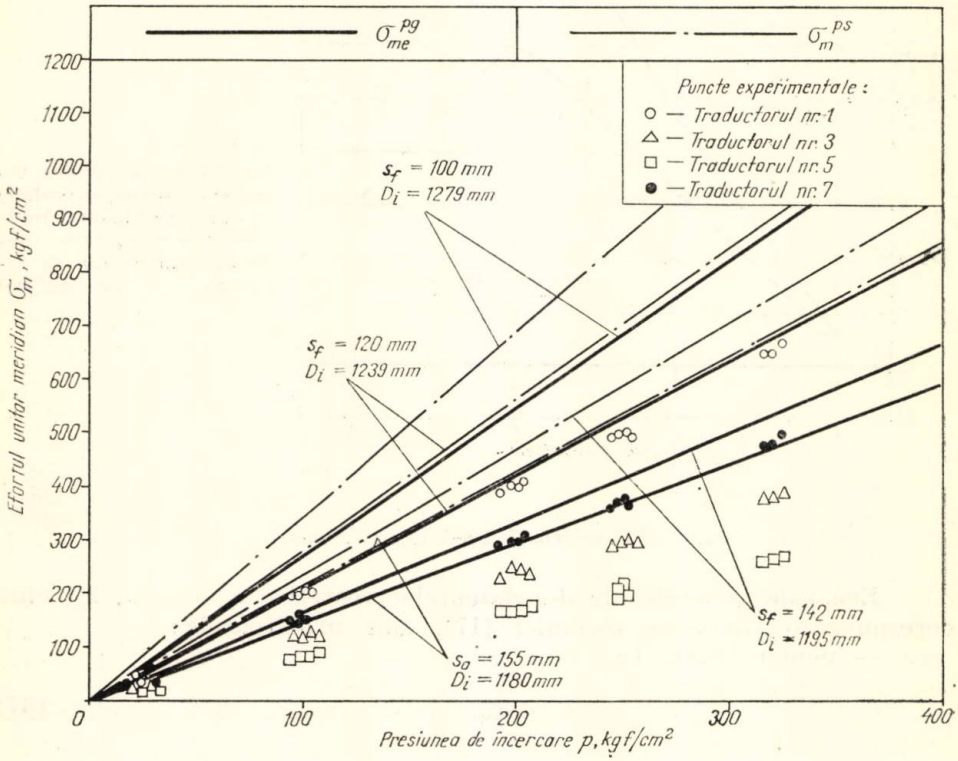


Fig. 10. — Dependența generalizată, teoretică și experimentală, dintre efortul unitar meridian σ_m și presiunea de încercare p. Grafic comparativ.

condiția $\sigma_m < \sigma_t$. Se va preciza numai că, în toate cele patru puncte de măsurare ($A \ldots D$, fig. 5), valorile calculate (teoretice) ale raportului σ_t/σ_m sînt sistematic depășite (fig. 11) de cele experimentale (măsurate) cu circa 7...100 % la suprafața exterioară și cu circa 6...60 % la suprafața interioară a capacului semisferic. Acest din urmă rezultat, care nu se încadrează în limitele intervalului (25...40 %) preciziei normale de experi-

mentare, poate fi explicat prin prezența concentratorilor locali de eforturi unitare, a variației grosimii peretelui în lungul meridianului și a existenței unor sensibile abateri de la forma geometrică perfect semisferică a capacului recipientului nr. 2.

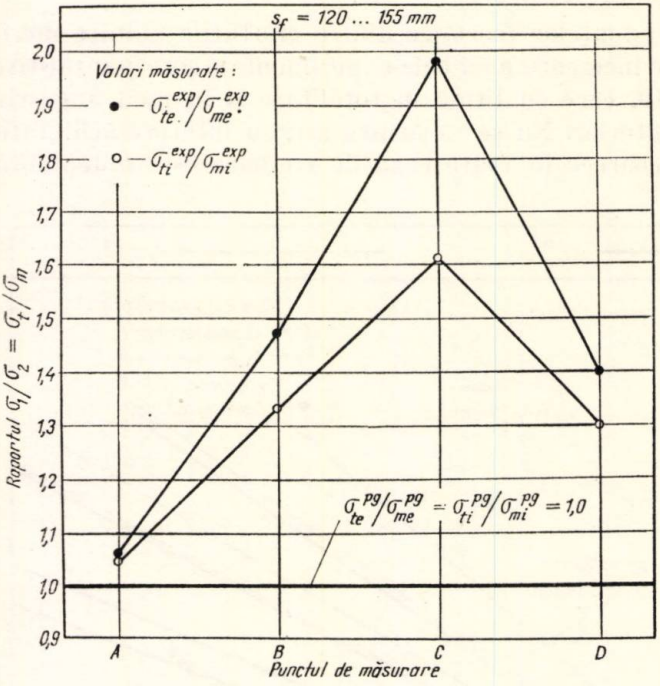


Fig. 11. — Compararea valorilor teoretice (calculate) cu cele reale (măsurate)reale raportului σ_t/σ_m pentru presiunea (interioară) de încercare $p = 320$ kgf/cm²

7.2. COEFICIENTUL GLOBAL DE SIGURANȚĂ c_r

Ecuațiile generale ale dependențelor teoretice $c_r = c_r(p)$, stabilite corespunzător în baza formulei (17), sînt următoarele:

— pentru teoria I:

$$c_r = c_{ech\ i\ I}^{pg}\, p^{-1}, \tag{37}$$

— pentru teoria III:

$$c_r = c_{ech\ i\ III}^{pg}\, p^{-1}, \tag{38}$$

— pentru teoria IV:

$$c_r = c_{ech\ i\ IV}^{pg}\, p^{-1}, \tag{39}$$

în care

$$c_{ech\ i\ I}^{pg} = \frac{\sigma_{r\,min}}{k_{ech\ i\ I}^{pg}}; \quad c_{ech\ i\ III}^{pg} = \frac{\sigma_{r\,min}}{k_{ech\ i\ III}^{pg}}; \quad c_{ech\ i\ IV}^{pg} = \frac{\sigma_{r\,min}}{k_{ech\ i\ IV}^{pg}}. \tag{40}$$

În figura 12, valorile teoretice c_r, calculate cu formula (37) pentru diferite grosimi s_f ale peretelui capacului semisferic, sînt confruntate cu valorile sale reale (experimentale), corespunzătoare pentru diferite trepte ale presiunii de încercare p. Din figura respectivă rezultă că, pentru

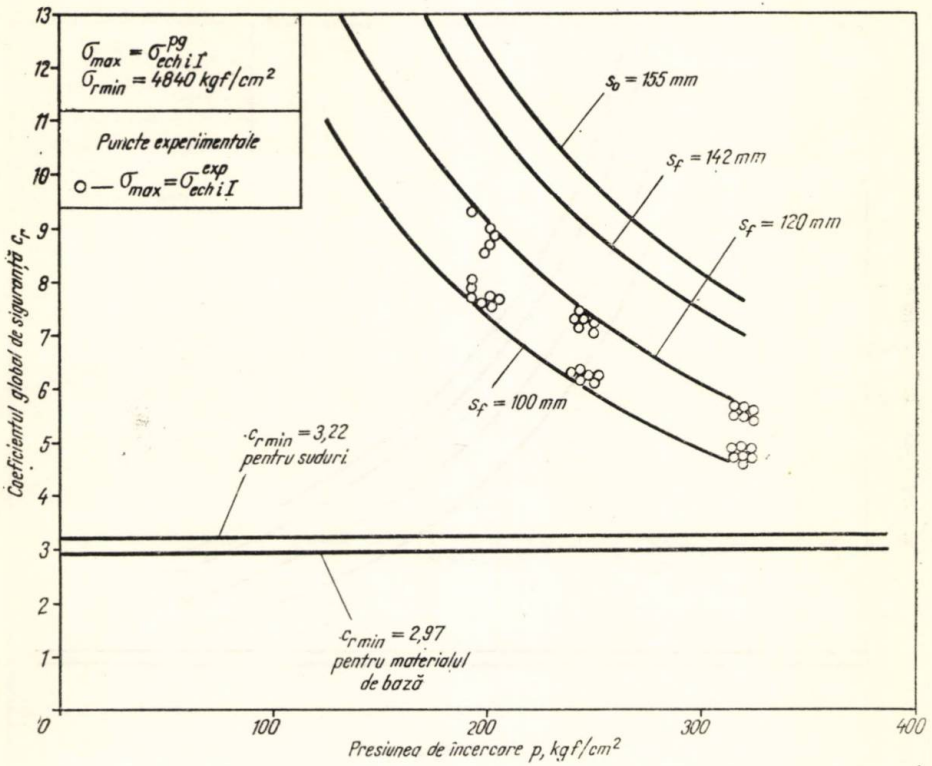


Fig. 12. — Dependența teoretică a coeficientului global de siguranță c_r, calculat pentru diferite grosimi de perete s_f, de presiunea de încercare p și compararea acesteia cu rezultatele experimentale corespunzătoare în cazul teoriei de rezistență I ($\sigma_{max} = \sigma^{pg}_{ech\ I}$, respectiv $\sigma_{max} = \sigma^{exp}_{ech\ I}$).

presiuni $p \leqslant 325$ kgf/cm², valoarea reală a coeficientului de siguranță c_r nu scade sub următoarea valoare aproximativă, foarte acoperitoare (tab. 6):

$$c_{r\,min\,real\,I} = 4{,}50 > c_{r\,min} = 3{,}22 > 2{,}97. \tag{41}$$

Din figura 12 rezultă totodată că valorile reale c_r se înscriu — în totalitatea lor — între dependențele teoretice $c_r = c_r(p)$ corespunzătoare grosimilor de perete $s_f = 100$ mm și $s_f = 120$ mm.

În figura 13, valorile teoretice c_r, calculate cu formula (38) pentru diferite grosimi s_f ale peretelui capacului semisferic, sînt confruntate cu valorile sale reale (experimentale), corespunzătoare pentru diferite trepte ale presiunuii de încercare p. După cum rezultă din această figură, valoarea

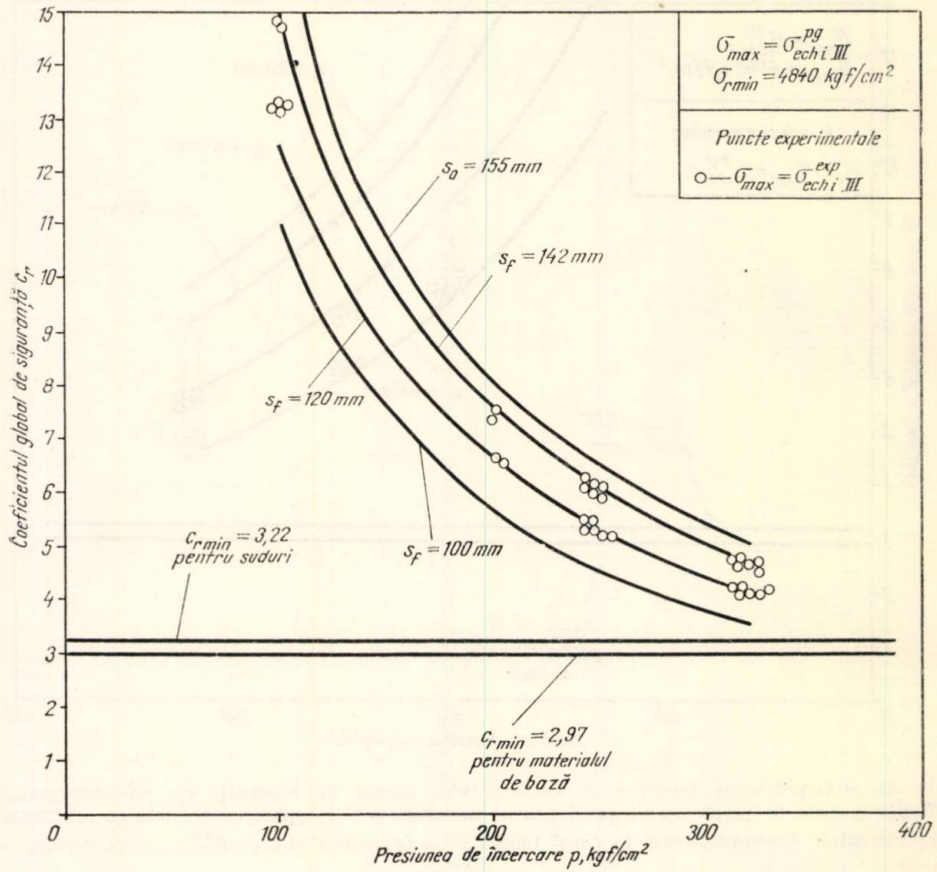


Fig. 13. — Dependența teoretică a coeficientului global de siguranță c_r, calculat pentru diferite grosimi de perete s_f, de presiunea de încercare p și compararea acesteia cu rezultatele experimentale corespunzătoare în cazul teoriei de rezistență III($\sigma_{max} = \sigma^{pg}_{ech\ i\ III}$, respectiv $\sigma_{max} = \sigma^{exp}_{ech\ i\ III}$).

reală a coeficientului de siguranță c_r nu scade sub următoarea valoare aproximativă, și în acest caz foarte acoperitoare (tab. 6):

$$c_{r\,min\ real\ III} = 4,00 > c_{r\,min} = 3,22 > 2,97. \qquad (42)$$

Rezultatele menționate anterior sînt prezentate centralizat în figura 14 pentru $s_f = 120$ mm, în scopul evidențierii limitelor domeniului de variație ale valorilor reale c_r în alternativa luării în considerație a teoriilor de rezistență I, III și IV.

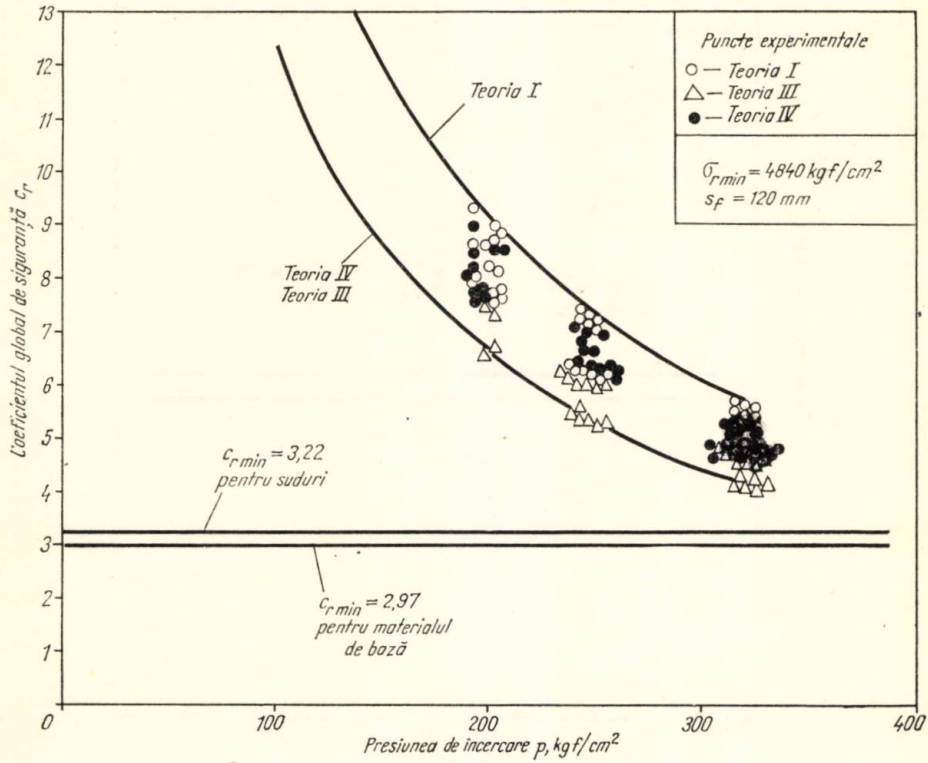


Fig. 14. — Dependența teoretică a coeficientului global de siguranță c_r, calculat pentru $s_f = 120$ mm, de presiunea de încercare p și compararea acesteia cu rezultatele experimentale corespunzătoare în cazul teoriilor de rezistență I, III și IV.

Valorile minime singulare (teoretice și reale) ale coeficientului global de siguranță c_r, corespunzătoare teoriilor de rezistență (I, III și IV) luate în considerație, sînt indicate — centralizat și comparativ — în figura 15, din care rezultă că acestea nu coboară sub valoarea restrictivă cea mai mare $c_{r\min} = 3{,}22$ (tab. 6), rezultînd

$$c_{r\min\,\text{real}} = c_{r\,\min\,\text{real III}} = 4{,}12 > c_{r\,\min} = 3{,}22 > 2{,}97. \tag{43}$$

Se precizează că, în conformitate cu proiectul de cod ISO, discutat și parțial avizat la Stockholm în aprilie 1970, coeficientul global de siguranță c_r, recomandat oficial în prezent, are valoarea*)

$$c_{r\,\text{ISO}} = 2{,}4 << c_{r\,\min\,\text{real}} = 4{,}12. \tag{44}$$

*) Aldea M., *Buletin de informare în tehnica supravegherii instalațiilor mecanice sub presiune și de ridicat*, București, IDT, **4**, 9, 605–610 (1970).

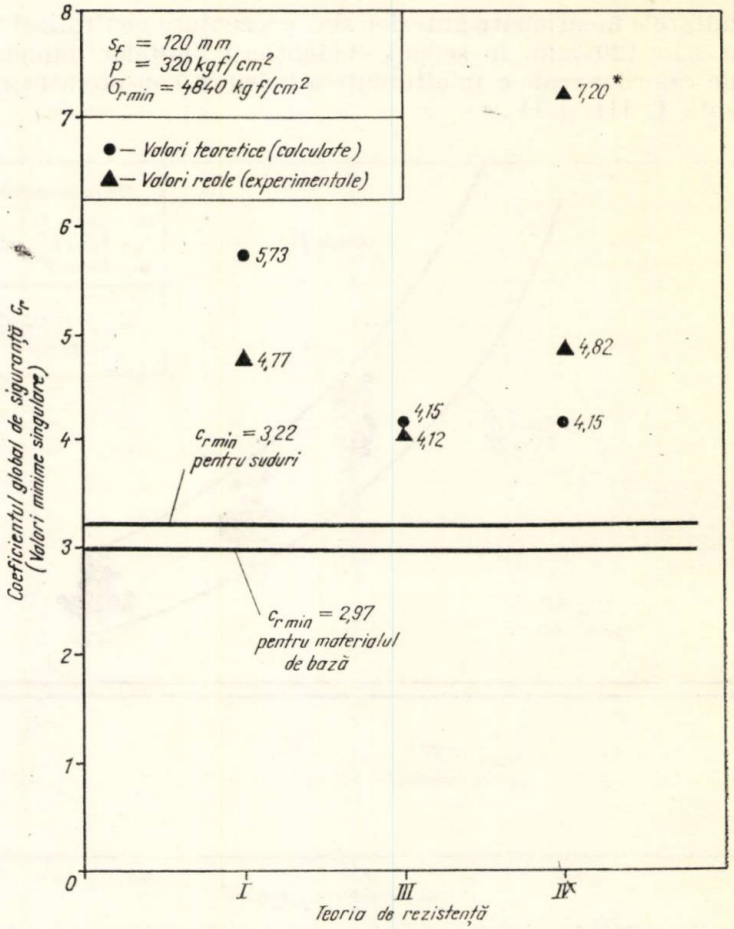


Fig. 15. — Valorile minime singulare (teoretice şi reale) ale coeficientului global de siguranţă c_r, corespunzătoare teoriilor de rezistenţă I, III şi IV. *Observaţie.* Valorile însemnate cu asterisc corespund suprafeţei exterioare a capacului semisferic. Toate celelalte valori corespund suprafeţei interioare a capacului semisferic.

7.3. COEFICIENTUL GLOBAL DE SIGURANŢĂ c_c

Prelucrarea rezultatelor în acest caz s-a făcut la fel ca în cazul coeficientului global de siguranţă c_r dependenţele teoretice $c_c = c_c(p)$, stabilite corespunzător în baza formulei (17), fiind următoarele:

— pentru teoria I:

$$c_c = c^{pg}_{\text{ech i I}}\, p^{-1}, \tag{45}$$

— pentru teoria III:

$$c_c = c^{pg}_{\text{ech i III}} p^{-1}, \tag{46}$$

— pentru teoria IV:

$$c_c = c^{pg}_{\text{ech i IV}} p^{-1}, \tag{47}$$

în care

$$c^{pg}_{ech\,i\,I} = \frac{\sigma_{0,2\,min}}{k^{pg}_{ech\,i\,I}}; \quad c^{pg}_{ech\,i\,III} = \frac{\sigma_{0,2\,min}}{k^{pg}_{ech\,i\,III}}; \quad c^{pg}_{ech\,i\,IV} = \frac{\sigma_{0,2\,min}}{k^{pg}_{ech\,i\,IV}}. \tag{48}$$

Interpretarea figurilor 16—18 conduce la concluzii privind coeficientul global de siguranță c_c care sînt calitativ identice cu cele evidențiate în cazul coeficientului global de siguranță c_r, din care motiv nu se va insista în mod deosebit asupra lor.

În figura 19 sînt indicate — centralizat și comparativ — valorile minime singulare (teoretice și reale) ale coeficientului global de siguranță c_c, corespunzătoare teoriilor de rezistență (I, III și IV) luate în considerație. Din figura respectivă rezultă că, sub valoarea restrictivă $c_c = 1{,}755$ (tab.6), nu coboară nici una din valorile singulare $c_{c\,min\,real}$, astfel că

$$c_{c\,min\,real} = c_{c\,min\,real\,III} = 2{,}44 > c_{cmin} = 1{,}755. \tag{49}$$

Se precizează că, în conformitate cu proiectul de cod ISO citat anterior, coeficientul global de siguranță c_c, recomandat oficial în prezent, are valoarea

$$c_{c\,ISO} = 1{,}40 << c_{c\,min\,real} = 2{,}44. \tag{50}$$

8. PRESIUNEA DE LUCRU MAXIM ADMISIBILĂ A CAPACULUI SEMISFERIC

Dacă se consideră că oțelul 22K, din care este executat capacul semisferic, este un material ideal plastic *, atunci *presiunea interioară minimă*, care determină apariția deformațiilor plastice la suprafața interioară a capacului respectiv și care se notează cu $p_{c\,min}$, se calculează cu formula **:

$$p_{c\,min} = k_c \sigma_{0,2\,min}, \tag{51}$$

iar *presiunea interioară minimă limită*, pe care o poate suporta capacul semisferic atunci cînd întreaga secțiune a peretelui său este deformată plastic și care se notează cu $p_{r\,min\,lim}$, se calculează cu formula **

$$p_{r\,min\,lim} = k_{lim}\,\sigma_{0,2\,min}, \tag{52}$$

în care

$$k_c = \frac{2}{3}\,\frac{\beta^3 - 1}{\beta^3}; \quad k_{lim} = 2 \ln \beta. \tag{53}$$

---

* Pavel A., *Stabilitatea recipientelor*, București, Institutul de petrol, gaze și geologie, 1969, p. 288.

** Bezuhov N. I., *Teoria elasticității și plasticității*, București, Editura tehnică, 1957; Pavel A., *Calculul și construcția utilajului de rafinărie*, București, Institutul de petrol, gaze și geologie, 1971 (în manuscris).

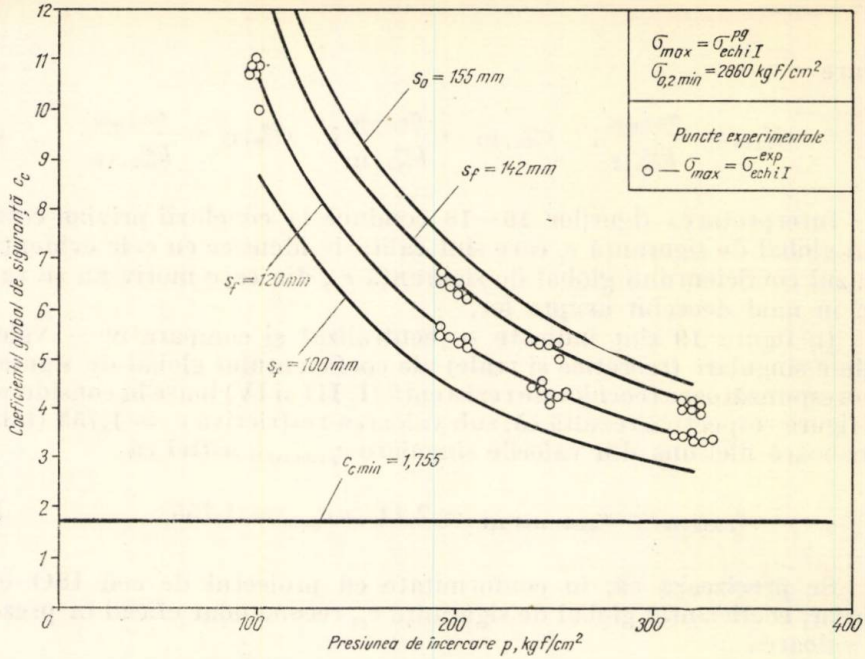


Fig. 16. — Dependența teoretică a coeficientului global de siguranță c_c, calculat pentru diferite grosimi de perete s_f, de presiunea de încercare p și compararea acesteia cu rezultatele experimentale corespunzătoare în cazul teoriei de rezistență I ($\sigma_{max} = \sigma^{pg}_{ech\ i\ I}$, respectiv $\sigma_{max} = \sigma^{exp}_{ech\ i\ I}$).

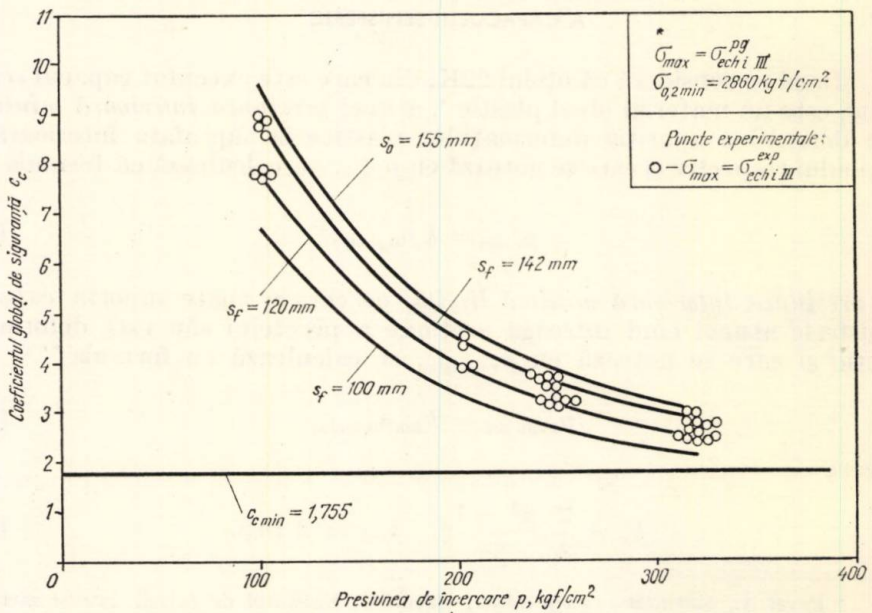


Fig. 17. — Dependența teoretică a coeficientului global de siguranță c_c, calculat pentru diferite grosimi de petete s_f, de presiunea de încercare p și compararea acesteia cu rezultatele experimentale corespunzătoare în cazul teoriei de rezistență III ($\sigma_{max} = \sigma^{pg}_{ech\ i\ III}$, respectiv $\sigma_{max} = \sigma^{exp}_{ech\ i\ III}$).

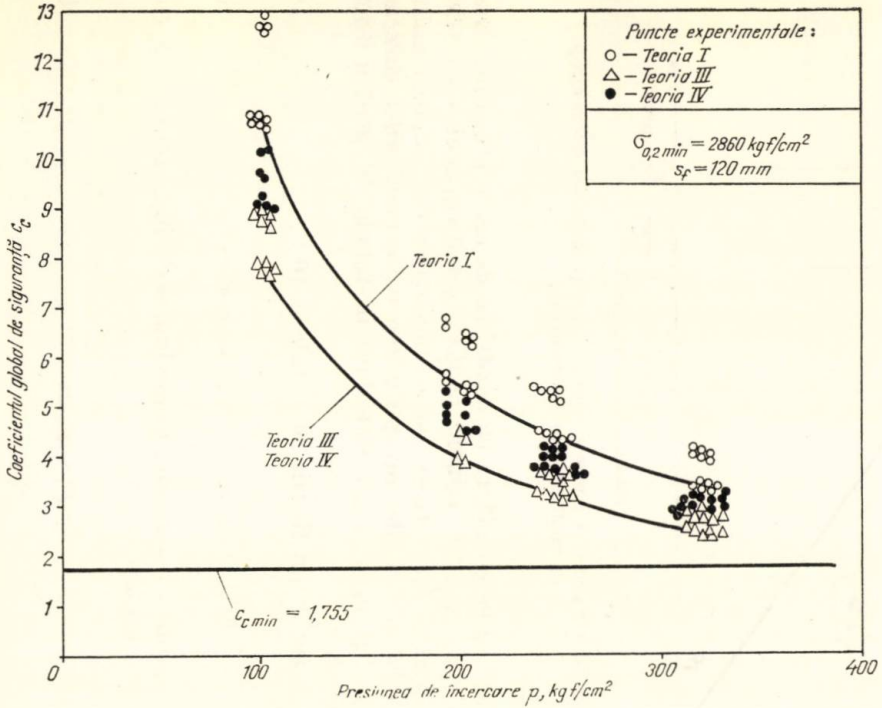


Fig. 18. — Dependența teoretică a coeficientului global de siguranță c_c, calculat pentru s_f = 120 mm, de presiunea de încercare p și compararea acesteia cu rezultatele experimentale corespunzătoare în cazul teoriilor de rezistență I, III și IV.

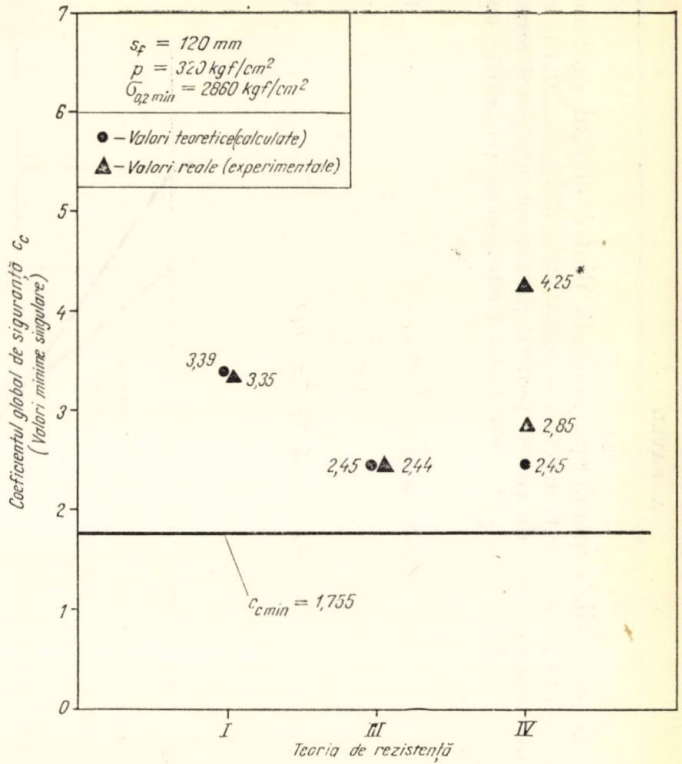


Fig. 19. — Valorile minime singulare (teoretice și reale) ale coeficientului global de siguranță c_c, corespunzătoare teoriilor de rezistență I, III și IV.

Observație. Valorile însemnate cu asterisc corespund suprafeței exterioare a capacului. Toate celelalte valori corespund suprafeței interioare a capacului semisferic.

În aceste condiții, dependența generală dintre efortul unitar σ și presiunea interioară p va fi de tipul celei schematizate în figura 20, din care rezultă următoarea formulă de calcul pentru *presiunea interioară minimă aparentă* $p_{r\,\min\,\text{aparent}}$ care, aparent, determină distrugerea (ruperea) capacului semisferic :

$$p_{r\,\min\,\text{aparent}} = k_r \sigma_{r\,\min}, \tag{54}$$

în care

$$k_r = (\operatorname{tg}\ \alpha)^{-1} = k_c. \tag{55}$$

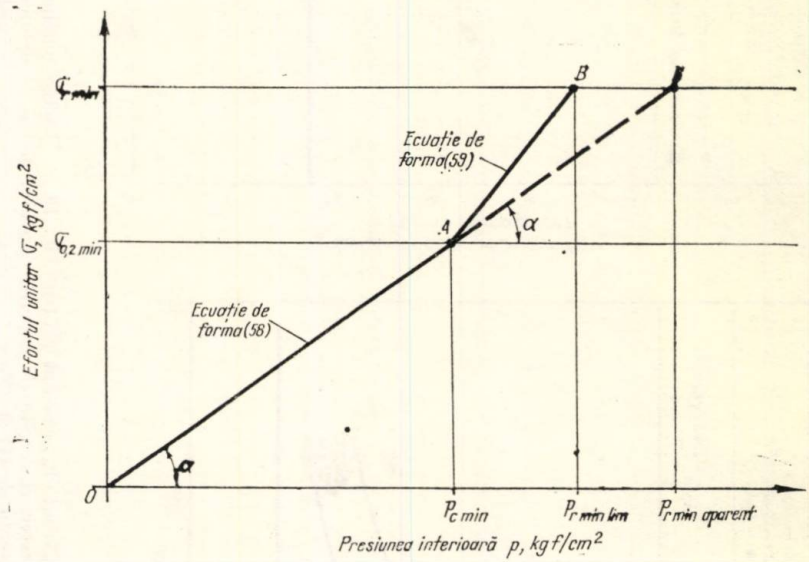


Fig. 20. — Dependența generală dintre efortul unitar σ și presiunea interioară p în cazul capacului semisferic.

În continuare se va considera că *depășirea* de către presiunea interioară p a valorii $p_{r\,\min\,\lim}$ duce iminent la *distrugerea* capacului semisferic.

Valorile calculate (teoretice) ale coeficienților de proporționalitate k_c, k_r și $k_{\lim}$, precum și valorile corespunzătoare ale *presiunilor caracteristice* $p_{c\,\min}$, $p_{r\,\min\,\lim}$ și $p_{r\,\min\,\text{aparent}}$, sînt date în tabela 16 pentru diferite alternative studiate.

După cum rezultă din figura 20 și tabela 16 :

$$p_{c\,\min} < p_{r\,\min\,\lim} < p_{r\,\min\,\text{aparent}}, \tag{56}$$

deci *condiția de funcționare normală*, în deplină securitate tehnică, a capacului semisferic este următoarea :

$$p < p_{c\,\min}, \tag{57}$$

Tabela 16

Valorile calculate * (teoretice) ale coeficienților k_c, k_r și k_{lim} și ale presiunilor caracteristice $p_{c\,min}$, $P_{r\,min\,lim}$ și $p_{r\,min\,aparent}$

Grosimea de perete s_f, mm		155 **	142	120	100
Coeficientul k_c		0,336	0,316	0,274	0,235
Coeficientul k_r		0,336	0,316	0,274	0,235
Coeficientul k_{lim}		0,465	0,428	0,355	0,290
Presiunea caracteristică, kgf/cm²	$p_{c\,min}$	960	904	784	672
	$p_{r\,min\,lim}$	1330	1225	1015	830
	$p_{r\,min\,aparent}$	1623	1528	1322	1137

* Pentru următoarele condiții (tab. 2): $\sigma_{0.2min} = 2860$ kgf/cm² și $\sigma_{r\,min} = 4840$ kgf/cm², din motive de securitate tehnică.
** $s_0 = 155$ mm.

respectiv

$$p \leqslant p_{ad} = \frac{p_{c\,min}}{c_{p\,min}}, \tag{58}$$

în care

p_{ad} reprezintă *presiunea de lucru maxim admisibilă* a capacului semisferic;

$c_{p\,min}$ — coeficientul global de siguranță față de presiunea caracteristică $p_{c\,min}$.

În scopul precizării presiunilor caracteristice ale capacului semisferic al recipientului nr. 2, în figura 21 sînt prezentate (pentru $s_f = s_0 = 155$ mm) următoarele dependențe generale dintre efortul unitar σ și presiunea interioară p, corespunzătoare suprafeței interioare a capacului semisferic:

— dependența *reală* care limitează (singular) la partea sa superioară domeniul*) punctelor experimentale (fig. 9) și pentru care $\sigma^{exp}_{max} = \sigma^{exp}_{ech\ i\ III\ max}$;

*) În domeniul respectiv sînt incluse toate punctele experimentale, deci și punctele singulare nesemnificative.

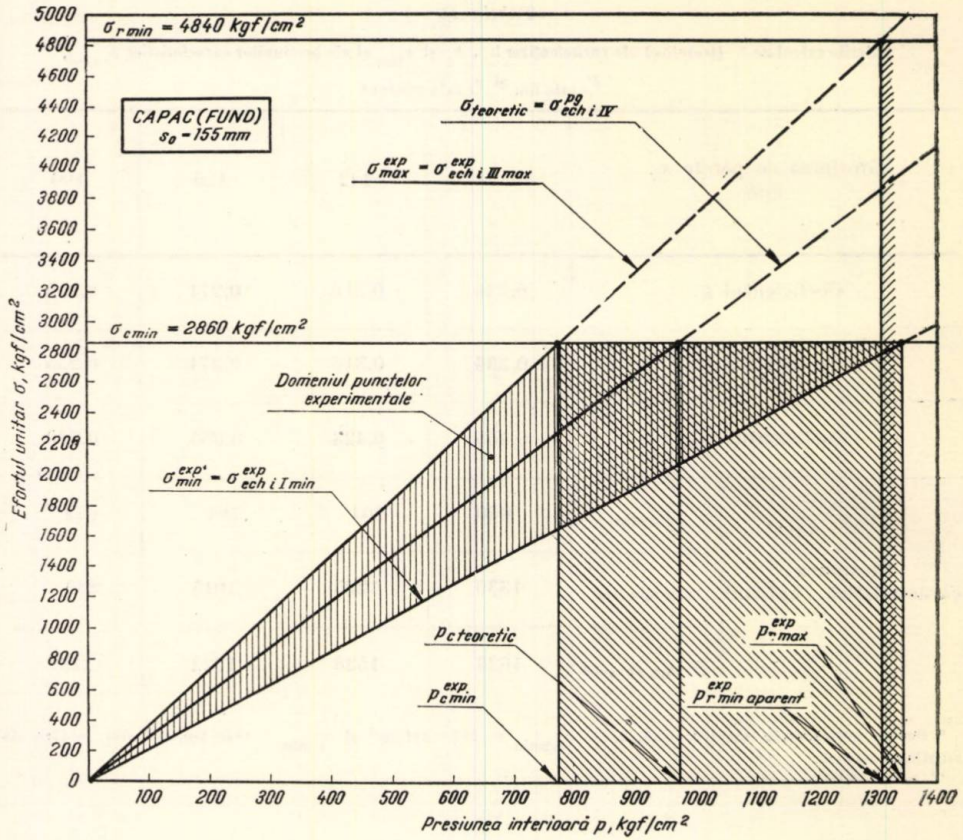


Fig. 21. — Dependenţe generale între efortul unitar σ şi presiunea interioară p, corespunzătoare suprafeţei interioare a capacului semisferic.

— dependenţa *reală* care limitează (singular) la partea sa inferioară domeniul punctelor experimentale (fig. 9) şi pentru care $\sigma^{exp}_{min} = \sigma^{exp}_{ech\ i\ I\,min}$;

— dependenţa *teoretică* corespunzătoare teoriei de rezistenţă IV, pentru care $\sigma_{teoretic} = \sigma^{pg}_{ech\ i\ IV}$.

Valorile p_c şi $p_{r\,aparent}$, rezultate din figura 21, sînt comparate în tabela 17 cu cele anterior calculate, din care se vede că, în mod practic, presiunea caracteristică $p_{c\,min}$ este identică *) cu presiunea caracteristică $p_{c\,teoretic}$, rezultată din figura 21. Aşadar, se poate considera că, valorile presiunilor caracteristice menţionate, obţinute din figura 21 în cazul cînd se consideră dependenţa teoretică corespunzătoare teoriei de rezistenţă IV, sînt — practic — egale cu cele calculate in ipoteza materialului ideal plastic.

Este important să se observe că dependenţa teoretică corespunzătoare teoriei de rezistenţă IV, reprezentată în figura 21, con-

*) 960 kgf/cm², faţă de 975 kgf/cm², ceea ce înseamnă că 960/975 = 0,985, respectiv 98,5 %.

Tabela 17

Valori ale presiunilor caracteristice pentru $s_f = s_0 = 155$ mm
Tabelă comparativă

Presiunea caracteristică	Valori calculate (tabela 16)	Valori rezultate din graficul dat în figura 21
$p_{c\,\min}^{exp}$, kgf/cm²	—	775
$p_{c\ teoretic}$, kgf/cm²	$p_{c\,\min} = 960$	975
$p_{c\,\max}^{exp}$, kgf/cm²	—	1345
$p_{r\,\min\,aparent}^{exp}$ kgf/cm²	$p_{r\,\min\,aparent} = 1623$	1310

stituie o *cvasibisectoare* a domeniului punctelor experimentale, rezultînd *):

$$p_{c\,\min}^{exp} < p_{c\,teoretic} \approx p_{c\,\min} < p_{c\,\max}^{exp} \approx p_{r\,\min\,aparent}^{exp}. \tag{59}$$

Dacă p reprezintă *presiunea interioară maximă de lucru* a capacului semisferic, corespunzătoare pentru anumite condiții tehnice (pentru care $\psi_f < 1{,}0$), iar p_0 este *presiunea interioară maximă* de lucru, de calcul sau *de referință* a aceluiași capac, corespunzătoare pentru $s_f = s_0 = 155$ mm (adică pentru $\psi_f = 1{,}0$), atunci — în baza formulei (28) — rezultă

$$p = \psi_f p_0. \tag{60}$$

Dependența presiunii p de coeficientul de slăbire ψ_f al capacului semisferic pentru diferite *presiuni caracteristice de referință* $p_0 = p_{c\,\min}^{exp}$, $p_0 = p_{c\,\max}^{exp} = p_{r\,\min\,aparent}^{exp}$ etc., este indicată în figura 22, din care rezultă că *presiunea interioară medie*,

$$p_{c\,med}^{exp} = \frac{p_{c\,\min}^{exp} + p_{c\,\max}^{exp}}{2} = \frac{p_{c\,\min}^{exp} + p_{r\,\min\,aparent}^{exp}}{2}, \tag{61}$$

care determină apariția deformațiilor plastice la suprafața interioară a capacului respectiv, este cu puțin (circa 8 %) mai mare decît presiunea caracteristică $p_{c\,teoretic} \approx p_{c\,\min}$ precizată anterior, diferența respectivă fiind neînsemnată din punctul de vedere al preciziei calculelor practice.

Admițînd deci $p_{c\,\min} \approx p_{c\,med}^{exp}$ și considerînd (în concordanță cu prevederile prescripțiilor tehnice I.S.C.I.R.) un coeficient de siguranță $c_{p\,med} =$

*) În cele ce urmează, din considerente evidente, ca valoare de calcul $p_{c\,\max}^{exp}$ se va admite valoarea $p_{c\,\max}^{exp} = p_{r\,\min\,aparent}^{exp}$

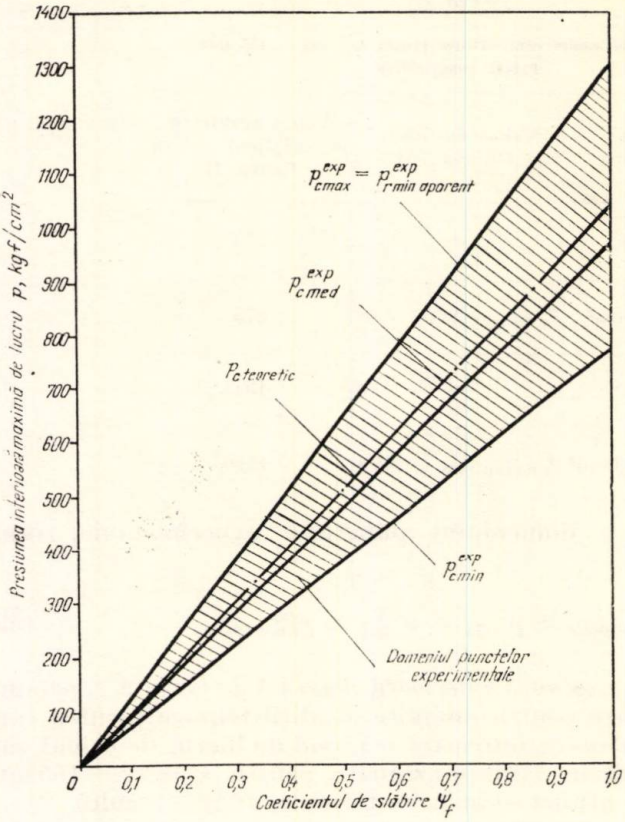


Fig. 22. — Dependența presiunii interioare maxime de lucru p de coeficientul de slăbire ψ_f al capacului semisferic.

$=1{,}25$*) față de presiunea caracteristică $p^{exp}_{c\,med}$, rezultă următoarea formulă finală de calcul pentru *presiunea de lucru maxim admisibilă* a capacului semisferic :

$$p_{ad} = p^{exp}_{ad} = 0{,}8\, p^{exp}_{c\,med}. \qquad (62)$$

Dependența presiunii p_{ad} de coeficientul de slăbire ψ_f al capacului semisferic este indicată în figura 23, iar valorile semnificative pentru capacul semisferic al recipientului nr. 2 ale unor mărimi caracteristice sînt date în tabela 18.

Așadar, capacul semisferic al recipientului nr. 2 va putea funcționa în continuare **) la presiunea $p_{max} = Pn = 320\ kgf/cm^2$, *în depline condiții de securitate tehnică*, dacă :

— valoarea coeficientului său de slăbire (reducere) ψ_f *nu va coborî sub valoarea admisibilă minimă* $\psi_{f\,ad\,min} = 0{,}39$, corespunzătoare unei presiuni $p_{ad} = p_{max} = Pn = 320\ kgf/cm^2$, pentru care $s_{ad\,min} = \psi_{f\,ad\,min}\, s_0 = 0{,}39 \cdot 155 = 60mm$;

*) Această valoare a coeficientului global de siguranță $c_{p\,med}$ asigură o rezervă de 20 % față de presiunea caracteristică $p_{c\,min}$ și deci față de limita tehnică de curgere $\sigma_{0.2\,min}$.

**) În mod concret, deocamdată nu se dispune de nici un fel de date care să permită o oarecare evaluare a duratei probabile de serviciu τ_s.

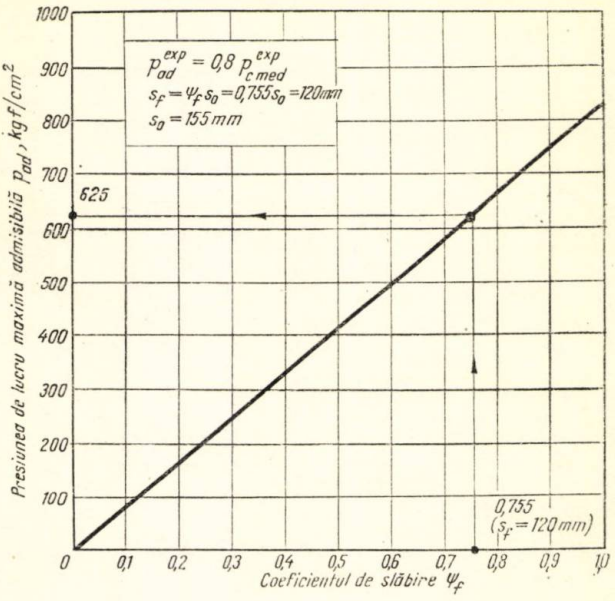


Fig. 23. — Dependența presiunii de lucru maxim admisibile p_{ad} de coeficientul de slăbire ψ_f al capacului semisferic.

Tabela 18

Valori semnificative pentru capacul semisferic al recipientului nr. 2

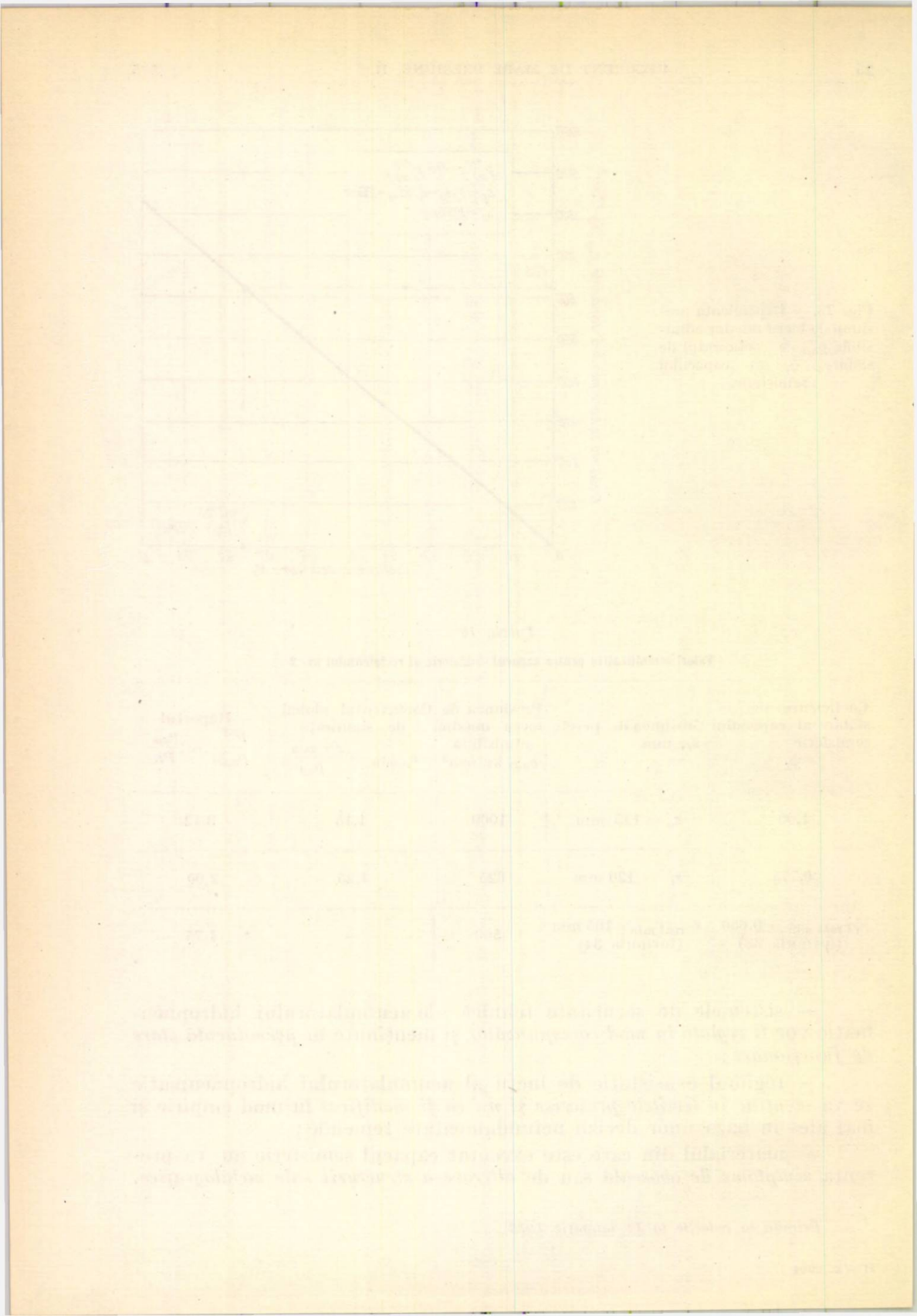
Coeficientul de slăbire al capacului semisferic ψ_f	Grosimea de perete s_f, mm	Presiunea de lucru maxim admisibilă p_{ad}, kgf/cm²	Coeficientul global de siguranță $c_{p\,min} = \frac{p_{c\,min}}{p_{ad}}$	Raportul $\frac{p^{ad}}{p_{max}} = \frac{p_{ad}}{Pn}$
1,00	s_0 = 155 mm	1000	1,15	3,12
0,775	s_f = 120 mm	625	1,25	2,00
$\psi_{f\,real\,min}$ = 0,680 (formula 33)	$s_{f\,real\,min}$ = 105 mm (formula 34)	560	—	1,75

— sistemele de securitate tehnică ale acumulatorului hidropneumatic vor fi *reglate în mod corespunzător* și menținute în *permanentă stare de funcționare*;

— regimul cvasistatic de lucru al acumulatorului hidropneumatic se va *menține în limitele prescrise și nu va fi modificat* în mod empiric și mai ales în baza unor decizii nefundamentate temeinic;

— materialul din care este executat capacul semisferic nu va prezenta *simptome de oboseală* sau de *alterare a structurii sale metalografice.*

Primită la redacție la 12 ianuarie 1973



NOTE

UN PROCEDEU NUMERIC PENTRU CALCULUL PLĂCILOR ORTOTROPE POLIGONALE

de G. M. BÂRSAN
Institutul politehnic Cluj

În articol se prezintă un procedeu numeric, „metoda fîşiilor finite", asociat principiului variaţional al lui Rayleigh-Ritz pentru calculul static al plăcilor poligonale ortotrope, de grosime constantă sau variabilă, divers rezemate pe contur. Procedeul de calcul se exemplifică pentru cazul plăcii izotrope şi ortotrope în formă de paralelogram, încărcată cu sarcini concentrate, caz pentru care s-a elaborat şi un program de calcul cu ajutorul căruia s-au obţinut rezultatele numerice prezentate.
Lucrarea a fost elaborată în timpul unui stagiu de specializare efectuat la Imperial College din Londra în anul universitar 1970 — 1971 şi doresc şi pe această cale să exprim mulţumirile mele cele mai călduroase Centrului de calcul al Universităţii din Londra şi Unităţii de calcul de la Imperial College pentru serviciile asigurate în tot timpul activităţii de cercetare desfăşurată la Londra.
Procedeul de calcul prezentat în acest articol reprezintă o adaptare şi extindere a metodei fîşiilor finite utilizată de diferiţi autori [1] — [4] pentru calculul static al plăcilor dreptunghiulare.

PREZENTAREA GENERALĂ A PROCEDEULUI DE CALCUL

Placa se consideră ca un ansamblu de fîşii înguste, paralele cu axa x_2 care modelează numai aproximativ forma reală a plăcii, aproximaţia fiind îmbunătăţită prin sporirea numărului de fîşii (fig. 1). Lungimile (a^e), lăţimile (b^e) ca şi grosimile (h^e) sînt constante pentru fîşia tip e dar pot varia de la o fîşie la alta astfel încît orice variaţie a grosimii plăcii poate fi aproximată printr-o variaţie în trepte.

Energia de deformaţie a unei fîşii exprimată în formă matriceală [5] este

$$U^e = \frac{1}{2} \iint\limits_{(S^e)} \underset{\sim}{M}^T \cdot \underset{\sim}{\chi}^e \, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2, \tag{1}$$

unde matricea momentelor $\underset{\sim}{M}$ este matricea coloană

$$\underset{\sim}{M} = \{M_1, \; M_2, \; M_{12}\}, \tag{2}$$

iar matricea curburilor $\underset{\sim}{\chi}^e$ este

$$\underset{\sim}{\chi}^e = \{-w^e_{,11},\ -w^e_{,22},\ 2w^e_{,12}\}. \tag{3}$$

În cazul plăcii ortotrope cu direcţiile principale de ortotropie coincizînd cu axele x_1, x_2 ecuaţiile constitutive pot fi exprimate în forma

$$\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{\chi}^e, \tag{4}$$

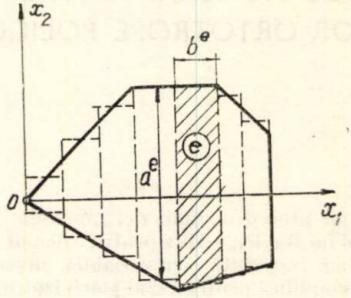


Fig. 1

unde matricea simetrică a coeficienţilor de elasticitate $\underset{\sim}{D}$ este [5]

$$\underset{\sim}{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & \nu_1 D_{22} & 0 \\ \nu_1 D_{22} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{12} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

în care

$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}; \qquad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}, \tag{6}$$

$$D_{12} = \frac{Gh^3}{12}.$$

În cazul materialului izotrop

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu,$$

$$D_{11} = D_{22} = D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \tag{7}$$

$$D_{12} = \frac{1-\nu}{2} D.$$

Ţinîndu-se seama de ecuaţiile (4), expresia energiei de deformaţie pentru fîşia de placă (1) devine

$$U^e = \frac{1}{2} \iint_{(S^e)} (\underset{\sim}{\chi}^e)^T \cdot \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{\chi}^e \, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 . \tag{8}$$

Urmărind ideea metodei variaţionale Rayleigh-Ritz funcţia deplasărilor pentru fîşia e de placă se alege de forma

$$w^e = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} d^e_{ji} \cdot \Phi_i(x_1) \cdot F_j(x_2). \tag{9}$$

Funcţiile $\Phi_i(x_1)$ sînt funcţii polinomiale determinate astfel încît să asigure cel puţin compatibilitatea deplasărilor transversale şi a rotirilor de-a lungul liniilor de frontieră ale fîşiilor.

Funcţiile $F_j(x_2)$ se aleg satisfăcînd cel puţin condiţiilor cinematice la capetele fîşiilor (şi deci pe conturul plăcii), iar coeficienţii d_{ij} au semnificaţia unor deplasări generalizate asociate fiecărei linii de frontieră.

În formă matriceală expresia (9) mai poate fi scrisă

$$w^e = \underset{\sim}{C} \cdot \underset{\sim}{d}^e = [\underset{\sim}{\Phi} F_1, \underset{\sim}{\Phi} F_2, \ldots, \underset{\sim}{\Phi} F_m] \begin{bmatrix} \underset{\sim}{d}^e_1 \\ \underset{\sim}{d}^e_2 \\ \vdots \\ \underset{\sim}{d}^e_m \end{bmatrix}, \tag{10}$$

în care submatricile $\underset{\sim}{\Phi}$ şi $\underset{\sim}{d}^e_j$ sînt

$$\underset{\sim}{\Phi} = [\Phi_1(x_1), \Phi_2(x_1), \ldots, \Phi_n(x_1)] \tag{11}$$

şi

$$\underset{\sim}{d}^e_j = \{d^e_{j1}, d^e_{j2}, \ldots, d^e_{jn/2}, d^e_{jn/2+1}, \ldots, d^e_{jn}\}. \tag{12}$$

În matricea coloană $\underset{\sim}{d}^e_j$ primele $n/2$ elemente reprezintă deplasările generalizate asociate liniei de frontieră „la stînga" fîşiei e, iar următoarele sînt deplasările generalizate asociate liniei de frontieră „la dreapta" fîşiei e.

Energia de deformaţie pentru fîşia e de placă se poate scrie introducînd expresia (10) în (8) sub forma

$$U^e = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \iint_{(S^e)} (\underset{\sim}{d}^e_j)^T \cdot (\underset{\sim}{B}^e_j)^T \cdot \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{B}^e_k \cdot \underset{\sim}{d}^e_k \, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 , \tag{13}$$

matricea $\underset{\sim}{B}_j^e$ fiind dată de expresia

$$\underset{\sim}{B}_j^e = \begin{bmatrix} -(\underset{\sim}{\Phi} F_j)_{,11} \\ -(\underset{\sim}{\Phi} F_j)_{,22} \\ 2\,(\underset{\sim}{\Phi} F_j)_{,12} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Notînd

$$\underset{\sim}{K}_{jk}^e = \iint\limits_{(S^e)} (\underset{\sim}{B}_j^e)^T \cdot \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{B}_k^e \, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2, \tag{15}$$

energia de deformaţie pentru fîşia de placă se mai poate scrie

$$U^e = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} (\underset{\sim}{d}_j^e)^T \cdot \underset{\sim}{K}_{jk}^e \cdot \underset{\sim}{d}_k^e \tag{16}$$

sau mai compact

$$U^e = \frac{1}{2} (\underset{\sim}{d}^e)^T \cdot \underset{\sim}{K}^e \cdot \underset{\sim}{d}^e, \tag{17}$$

unde matricea $\underset{\sim}{K}^e$ este matricea de rigiditate pentru fîşia e de placă şi poate fi asamblată cu ajutorul submatricilor $\underset{\sim}{K}_{jk}^e$ după schema :

$$\underset{\sim}{K}^e = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{K}_{11}^e & \underset{\sim}{K}_{12}^e & \dots & \underset{\sim}{K}_{1m}^e \\ \vdots & \vdots & & \\ \underset{\sim}{K}_{j1}^e & \underset{\sim}{K}_{j2}^e & \dots & \underset{\sim}{K}_{jm}^e \\ \vdots & \vdots & & \\ \underset{\sim}{K}_{m1}^e & \underset{\sim}{K}_{m2}^e & \dots & \underset{\sim}{K}_{mm}^e \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Matricea rigidităţilor pentru fîşia de placă este o matrice simetrică de rang $n \times m$, unde n reprezintă numărul funcţiilor Φ_i, iar m numărul funcţiilor F_j încorporate în funcţia (9) a deplasărilor w^e.

Energia potenţială totală V^e a fîşiei de placă se obţine adăugînd, cu semn schimbat, la energia de deformaţie U^e dată de expresia (17) lucrul mecanic efectuat de forţele distribuite $q(L_q^e)$ şi concentrate P_i, (L_p^e) aplicate fîşiei considerate, prin deplasările w^e

$$V^e = U^e - (L_p^e + L_q^e). \tag{19}$$

Ţinînd seama de expresia (10) a funcţiei alese a deplasărilor lucrul mecanic L_q^e al forţelor distribuite q se poate scrie

$$L_q^e = \iint\limits_{(S^e)} q w^e \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \iint\limits_{(S^e)} q \underset{\sim}{C}^T \cdot (\underset{\sim}{d}^e)^T \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \underset{\sim}{A}_q^e \cdot (\underset{\sim}{d}^e)^T \tag{20}$$

unde $\underset{\sim}{A}_q^e$ este o matrice coloană dată de expresia

$$\underset{\sim}{A}_q^e = \iint\limits_{(S^e)} q(x_1, x_2)\underset{\sim}{C}^T \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2, \tag{21}$$

iar lucrul mecanic L_p^e al forţelor concentrate P_i se scrie

$$L_p^e = \sum_{i=1}^{s} P_i w_i^e = \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P_i \cdot \Phi_k(x_{1i}) \cdot F_j(x_{2i}) d_{jk} = \tag{22}$$

$$= \sum_{i=1}^{s} P_i \cdot \underset{\sim}{C}^T(i) \cdot (\underset{\sim}{d}^e)^T = \underset{\sim}{A}_p^e \cdot (\underset{\sim}{d}^e)^T,$$

unde $\underset{\sim}{A}_p^e$ este o matrice coloană egală cu

$$\underset{\sim}{A}_p^e = \sum_{i=1}^{s} P_i \cdot \underset{\sim}{C}^T(i). \tag{23}$$

Cu $\underset{\sim}{C}^T(i)$ s-a notat transpusa matricei $\underset{\sim}{C}$, corespunzătoare punctului de aplicaţie al forţei P_i de coordonate x_{1i} şi x_{2i}.

Energia potenţială totală pentru întreaga placă V se obţine sumînd energiile potenţiale ale tuturor fîşiilor de placă

$$V = \sum_{e=1}^{r} V^e = \frac{1}{2}\underset{\sim}{d}^T \cdot \underset{\sim}{K} \cdot \underset{\sim}{d} - (\underset{\sim}{A}_q + \underset{\sim}{A}_p)\underset{\sim}{d}^T, \tag{24}$$

unde $\underset{\sim}{d}$ este vectorul tuturor deplasărilor generalizate ale plăcii, $\underset{\sim}{K}$ este matricea generală a rigidităţilor pentru întreaga placă. Pentru asamblarea matricei generale a rigidităţilor, matricea rigidităţilor pentru fîşia e de placă se rearanjează ţinînd seama de deplasările generalizate comune fîşiilor adiacente unei linii de frontieră, sub forma

$$\underset{\sim}{K}^e = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{K}_{SS}^e & \underset{\sim}{K}_{SD}^e \\ \underset{\sim}{K}_{DS}^e & \underset{\sim}{K}_{DD}^e \end{bmatrix}, \tag{25}$$

după care asamblarea matricei generale se face după schema

$$\underset{\sim}{K} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{K}_{ss}^1 & \underset{\sim}{K}_{SD}^1 & & & & \\ \underset{\sim}{K}_{DS}^1 & \underset{\sim}{K}_{DD}^1 + \underset{\sim}{K}_{SS}^2 & \underset{\sim}{K}_{SD}^2 & & & \\ & \underset{\sim}{K}_{DS}^2 & \underset{\sim}{K}_{DD}^2 + \underset{\sim}{K}_{SS}^3 & \underset{\sim}{K}_{SD}^2 & & \\ & & \underset{\sim}{K}_{DS}^3 & \underset{\sim}{K}_{DD}^3 + \underset{\sim}{K}_{SS}^4 & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & \underset{\sim}{K}_{DS}^{r-1} & \underset{\sim}{K}_{DD}^{r-1} + \underset{\sim}{K}_{ss}^r & \underset{\sim}{K}_{SD}^r \\ & & & & \underset{\sim}{K}_{DS}^r & \underset{\sim}{K}_{DD}^r \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Matricea generală a rigidităţilor este o matrice simetrică bandă, lăţimea benzii fiind egală cu $m \times n$, rangul matricei fiind egal cu $\frac{n \times m(r+1)}{2}$, r fiind egal cu numărul de fişii considerate.

$\underset{\sim}{A}_q$ şi $\underset{\sim}{A}_p$ sînt matrice coloană ce se obţin prin sumarea matricelor $\underset{\sim}{A}_q^e$ şi $\underset{\sim}{A}_p^e$ corespunzător deplasărilor generalizate comune fişiilor adiacente liniilor de frontieră.

Exprimînd condiţia de staţionaritate a energiei potenţiale totale în raport cu deplasările generalizate se obţine un sistem de ecuaţii liniare în deplasările generalizate care în formă matriceală se scrie

$$\underset{\sim}{K} \cdot \underset{\sim}{d} - (\underset{\sim}{A}_q + \underset{\sim}{A}_p) = \underset{\sim}{0}, \tag{27}$$

de unde rezultă imediat vectorul deplasărilor generalizate

$$\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{K}^{-1} \cdot (\underset{\sim}{A}_q + \underset{\sim}{A}_p). \tag{28}$$

Deplasările generalizate cunoscute se pot afla fără dificultate cu ajutorul expresiei (10), deplasările w^e pentru orice punct al plăcii, sau cu ajutorul expresiei (4), momentele încovoietoare şi de torsiune în punctele plăcii.

APLICAREA PROCEDEULUI ÎN CAZUL PLĂCII ÎN FORMĂ DE PARALELOGRAM

Procedeul prezentat mai sus se aplică pentru cazul plăcii în formă de paralelogram.

Placa se raportează la un sistem oblic de coordonate u_1, u_2 (fig. 2), ecuaţiile de transformare fiind :

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1/\cos\beta, \\ u_2 &= x_2 - x_1 \operatorname{tg}\beta. \end{aligned} \tag{29}$$

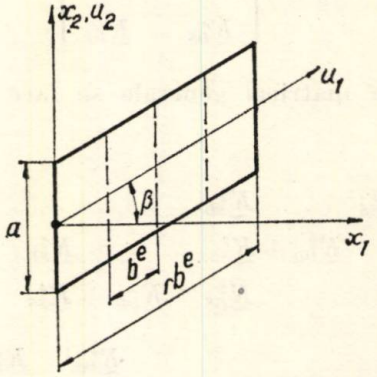


Fig. 2

Fîşiile, în formă de paralelogram, modelează în acest caz exact conturul plăcii. Lăţimile b^e ale fîşiilor se aleg egale între ele $b^e = b$.

În expresia (9) a deplasării w^e funcţiile $\Phi_i(u_1)$ se aleg sub forma a patru ($n = 4$) polinoame de gradul trei astfel încît se asigură numai compatibilitatea deplasărilor şi rotirilor de-a lungul liniilor de frontieră dintre fîşii. Convergenţa procesului poate fi îmbunătăţită alegînd polinoame de grad superior care ar putea asigura şi compatibilitatea curburilor sau chiar a derivatelor de ordinul trei. Cum însă satisfacerea condiţiilor cinematice pe conturul fîşiei reprezintă condiţii suficiente în metoda Rayleigh-Ritz, se adoptă polinoame de gradul trei în scopul realizării unui consum minim de memorie în execuţiile la computer.

Cele patru funcţii $\Phi_i(u_1)$ sînt de forma:

$$\Phi_1(u_1) = \frac{2}{b^3} u_1^3 - \frac{3}{b^2} u_1^2 + 1,$$

$$\Phi_2(u_1) = \frac{1}{b^2} u_1^3 - \frac{2}{b} u_1^2 + u_1,$$

$$\Phi_3(u_1) = -\frac{2}{b^3} u_1^3 + \frac{3}{b^2} u_1^2, \tag{30}$$

$$\Phi_4(u_1) = \frac{1}{b^2} u_1^3 - \frac{1}{b} u_1^2.$$

Funcţiile $F_j(u_2)$ se aleg sub forma funcţiilor Rayleigh, satisfăcînd condiţiilor cinematice la capetele fîşiilor. Aspectul general al acestor funcţii, după cum este cunoscut, este

$$F_j(u_2) = C_1 \sin \mu_j \xi + C_2 \cos \mu_j \xi + C_3 \operatorname{sh} \mu_j \xi + C_4 \operatorname{ch} \mu_j \xi, \tag{31}$$

unde s-a notat $\xi = \frac{u_2}{a}$, iar μ_j este valoarea proprie a funcţiei F_j. Constantele $C_1, \ldots, C_4$ se determină din condiţia ca funcţia F_j să satisfacă condiţiile de rezemare ale fîşiei la capete în direcţia u_2.

Deplasările generalizate d^e_{ji} au semnificaţia unor deplasări transversale şi rotiri asociate fiecărei linii de frontieră a fîşiei e şi fiecărei funcţii Rayleigh F_i.

Matricea curburilor pentru fîşia de placă $\underset{\sim}{\chi}^e$ în coordonate oblice u_1 şi u_2 se obţine prin intermediul matricei de transformare $\underset{\sim}{T}$ sub forma

$$\underset{\sim}{\chi}^e = \underset{\sim}{T} \chi^e_u, \tag{32}$$

unde

$$\underset{\sim}{T} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\cos^2\beta} & \operatorname{tg}^2\beta & \dfrac{\sin\beta}{\cos^2\beta} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2\operatorname{tg}\beta & \dfrac{1}{\cos\beta} \end{bmatrix}, \tag{33}$$

iar cu $\underset{\sim}{\chi}_u^e$ s-a notat

$$\underset{\sim}{\chi}_u^e = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w^e}{\partial u_1^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w^e}{\partial u_2^2} \\ 2\dfrac{\partial^2 w^e}{\partial u_1 \partial u_2} \end{bmatrix}. \tag{34}$$

Pentru cazul fîşiei în formă de paralelogram matricele $\underset{\sim}{B}_j^e$ şi $\underset{\sim}{K}_{jk}^e$ date de expresiile (14), respectiv (15), au fost dezvoltate explicit în lucrarea [6], care conţine de asemenea şi programele realizate în limbaj FORTRAN IV pentru elaborarea matricelor de rigiditate $\underset{\sim}{K}^e$ pentru fîşia de placă şi $\underset{\sim}{K}$ pentru întreaga placă.

În vederea realizării exemplelor de calcul s-a considerat cazul încărcării cu un sistem oarecare de sarcini concentrate normale la planul plăcii, elaborîndu-se programele de calcul pentru formarea matricei $\underset{\sim}{A}_p^e$ conform relaţiei de definiţie (23) şi asamblarea matricei $\underset{\sim}{A}_p$ pentru întreaga placă.

La evaluarea lucrului mecanic efectuat de forţele concentrate s-au utilizat tabelele ce dau valorile funcţiilor Rayleigh şi ale derivatelor lor din lucrarea [7], valori care apar ca date de intrare în program.

Rezolvarea ecuaţiei matriceale (27) s-a făcut utilizînd un subprogram standard pentru inversarea şi înmulţirea matricelor (Harwell Library Subroutines).

Vectorul deplasărilor generalizate $\underset{\sim}{d}$ odată cunoscut, două subprograme permit aflarea deplasărilor w în orice punct al plăcii ca şi a momentelor încovoietoare M_{x_1}, M_{x_2} şi de torsiune $M_{x_1x_2}$.

Programul de calcul a fost realizat astfel încît pot fi luate în considerare condiţii variate de rezemare pe contur, cazul izotrop sau ortotrop, grosime constantă sau variabilă a plăcii, diferite rapoarte ale laturilor,

diferite unghiuri de oblicitate ale plăcii, pentru încărcarea arbitrară cu forţe concentrate.

Testarea programului s-a făcut pentru placa izotropă şi ortotropă încărcată cu o singură sarcină concentrată P la mijlocul plăcii.

REZULTATE NUMERICE

1° Placa izotropă încastrată pe tot conturul. Raportul laturilor $\gamma_1=1$ (fig. 3) (7 fîşii, 3 funcţii Rayleigh).

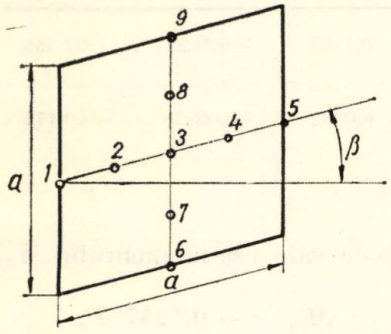


Fig. 3

Tabela 1.

Valorile deplasărilor w

Pct. \ β	0°	15°	30°	45°
2	0,002456	0,002156	0,001423	0,000645
3	0,005365	0,004863	0,003525	0,001821
4	0,002456	0,002156	0,001423	0,000645
7	0,002391	0,002007	0,001330	0,000619
8	0,002391	0,002007	0,001330	0,000619
Multiplicator	Pa^2/D			

În lucrarea [5] se dă utilizînd un procedeu analitic de calcul pentru placa patrată în centrul plăcii

$$w_3 = 0{,}00560\ Pa^2/D,$$

iar în lucrarea [2], utilizînd metoda fîşiilor finite într-o variantă diferită considerînd şapte funcţii Rayleigh în expresia deplasării w^e, se obţine

$$w_3 = 0{,}005594\ Pa^2/D.$$

Tabela 2

Momentele încovoietoare în punctul 1

β	0°	15°	30°	45°
M_{x_1}	−0,1205	−0,1023	−0,0586	−0,0166
M_{x_2}	−0,0362	−0,03078	−0,0175	−0,0050
Multiplicator	P			

În lucrarea [5] se dă valoarea momentului M_{x_1} pentru placa pătrată

$$M_{x_1} = -0{,}1257\ P,$$

iar în [2]

$$M_{x_1} = -0{,}12758\ P.$$

2° Placa ortotropă încastrată pe două laturi opuse, simplu rezemată pe celelalte două. Raportul laturilor $\eta = 1$ (7 fîşii, 3 funcţii Rayleigh).

$$D_{22} = 5{,}6025\ D_{11},$$

$$\nu_1 D_{22} = 0{,}375\ D_{11},$$

$$D_{12} = 0{,}9375\ D_{11}.$$

Tabela 3

Valorile deplasărilor w

β / Pct.	0°	15°	30°	45°
2	0,000741	0,000700	0,000575	0,000371
3	0,001932	0,001883	0,001471	0,000953
4	0,000741	0,000700	0,000575	0,000371
7	0,000864	0,000801	0,000626	0,000378
8	0,000864	0,000801	0,000626	0,000378
Multiplicator	Pa^2/D			

Tabela 4

Valorile momentelor încovoietoare și de torsiune în punctul 3

Pct. \ β		0°	15°	30°	45°
3	M_{x_1}	0,08685	0,08485	0,0787	0,0676
	M_{x_2}	0,2610	0,2496	0,2151	0,1560
	$M_{x_1x_2}$	0,000	0,00758	0,0141	0,01799
Multiplicator		P			

3° Placa ortotropă încastrată pe contur $\eta = 1$ (7 fîșii, 3 funcții Rayleigh)

Tabela 5

Valorile deplasărilor w

Pct. \ β	0°	15°	30°	45°
2	0,000632	0,000590	0,000466	0,000279
3	0,001878	0,001757	0,001409	0,000894
4	0,000632	0,000590	0,000466	0,000279
7	0,000837	0,000773	0,000595	0,000347
8	0,000837	0,000773	0,000595	0,000347
Multiplicator	Pa^2/D_{11}			

Tabela 6

Valorile momentelor încovoietoare și de torsiune în punctul 3

Pct. \ β		0°	15°	30°	45°
3	M_{x_1}	0,08839	0,08634	0,07995	0,06819
	M_{x_2}	0,25616	0,24468	0,20991	0,15094
	$M_{x_1x_2}$	0,00000	0,00675	0,01237	0,01533
Multiplicator		P			

CONCLUZII

Determinarea matricelor rigidităţilor pentru fîşia de placă în formă de paralelogram permite extinderea procedeului fîşiilor finite la calculul plăcilor oblice. Este de presupus că, aşa după cum în lucrarea [6] pentru calculul vibraţiilor şi la stabilitate procedeul a fost extins şi pentru alte forme poligonale (triunghi, trapez etc.) şi în calculul static acest lucru poate permite obţinerea unor rezultate cu o precizie satisfăcătoare şi în aceste cazuri. Procedeul de calcul prezentat are avantajul tratării unitare a problemei pentru diferite condiţii de rezemare, forme geometrice etc., acelaşi program putînd fi utilizat cu mici modificări pentru o largă varietate de cazuri.

Este de aşteptat ca în cazul plăcilor oblice pentru îmbunătăţirea preciziei în cazul unghiurilor de oblicitate mari, numărul de funcţii Rayleigh încorporate în expresia deplasărilor să fie mai mare. De asemenea, o îmbunătăţire a convergenţei procesului se poate obţine adoptînd funcţii polinomiale care să asigure continuitatea momentelor şi a forţelor tăietoare de-a lungul liniilor de frontieră dintre fîşii, acest lucru însă în detrimentul consumului de memorie în calculator (ceea ce ar necesita utilizarea unor calculatoare de mare capacitate).

Primită la redacţie la 24 ianuarie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. K. Hellan, *Application of a numerical procedure to the analysis of thin rectangular plates of variable thickness*, Acta Polytech. Scand. Civil Eng. and Building Constr. series, Ci *16* (1963).
2. Y. K. Cheung, *Finite strip method analysis of elastic slabs*, J. Engng. Mech. Div., ASCE, *94*, 1365–1378 (1968).
3. Y. K. Cheung, *The finite strip method in the analysis of elastic plates with two opposite simply supported ends*, Procs. Inst. Civil Engrs, *40*, 1–7 (1968).
4. Y. C. Loo, A. R. Cusens, *A refined finite strip method for the analysis of orthotropic plates*, Proc. Inst. Civil Engrs, 48, 85–95 (1971).
5. S. P. Timoshenko, Woinowski-Krieger S., *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, 1959.
6. G. M. Bârsan, *Vibraţiile şi stabilitatea plăcilor poligonale*, Teză de doctorat 1971, Institutul politehnic Cluj.
7. D. Young, R. Felgar, *Tables of Characteristic Functions Representing Normal Modes of Vibration of a beam*, The University of Texas Publications, July 1949.

UTILIZAREA ELEMENTULUI FINIT TOROIDAL PENTRU STRUCTURILE MASIVE CU GEOMETRIE AXIAL-SIMETRICĂ ŞI ÎNCĂRCARE NEAXIAL-SIMETRICĂ

de RADU MARINOV
Institutul politehnic Timişoara

În lucrare se expune metoda de calcul numeric a eforturilor unitare într-un masiv cu geometrie axial-simetrică, corp de rotaţie, avînd o încărcare neaxial-simetrică dar cu simetrie faţă de mai multe planuri diametrale, utilizînd un element finit un tor cu secţiune transversală triunghiulară în mod similar ca în problema axial-simetrică. Pentru rezolvarea problemei se descompune încărcarea în serie Fourier şi se admite că deplasările şi eforturile unitare au o formă matematică similară. Pe baza acestor ipoteze se deduc expresiile matricelor de rigiditate şi de tensiune, cu ajutorul cărora determinarea eforturilor unitare se face analog ca pentru cazul problemei axial-simetrice.

Structurile masive cu geometrie axial-simetrică (corpuri de rotaţie) se pretează cel mai bine la un calcul al eforturilor unitare prin metoda elementelor finite, folosind ca element finit un tor cu secţiunea transversală triunghiulară, dacă şi încărcarea este axial-simetrică, starea de tensiune fiind determinată de eforturile unitare σ_r, σ_z, σ_θ şi σ_{rz}. În cazul încărcării oarecare apar şi eforturile unitare $\tau_{r\theta}$ şi $\tau_{z\theta}$; în acest caz utilizarea elementului finit toroidal nu mai este posibilă pentru cazul general. Un caz de încărcare deosebit îl constituie încărcarea neaxial-simetrică dar avînd mai multe planuri diametrale de simetrie (fig. 1).

Acest caz corespunde încărcării din cablurile verticale de precomprimare în pereţii cuvelor (cilindrice) de presiune pentru reactoarele centralelor nucleare-electrice sau rezemării unor asemenea construcţii pe un şir de stîlpi dispuşi circular.

În cazul încărcării de mai sus intervine coordonata θ, respectiv deplasarea v a nodului i după tangentă (în secţiunea transversală), în plus faţă de deplasările u şi w corespunzătoare problemei axial-simetrice.

Problema determinării stării de tensiune se poate rezolva prin metoda elementelor finite, menţinînd acelaşi tip de element finit toroidal din problema axial-simetrică, a cărui formulare este mult mai simplă decît a elementului finit paralelipipedic sau alt tip (HERMES, LUMINA etc.) [1], [2].

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 32, NR. 4, 1973, P. 889–897

Pentru utilizarea elementului finit toroidal se fac următoarele considerații :

a) Se face un calcul inițial pentru o încărcare axial-simetrică stat echivalentă cu încărcarea dată.

b) Încărcarea rezultantă din diferența celor două (reală și ec. lentă) se descompune în serie Fourier în termeni de cos $n\theta$, și sin $n\theta$.

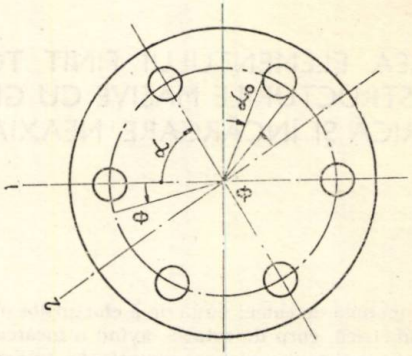


Fig. 1

În figura 2 este redată încărcarea rezultantă.

Încărcarea echivalentă axial-simetrică este

$$p = p_0 \frac{\alpha_0}{\alpha} = \frac{P}{\alpha r_0}. \tag{1}$$

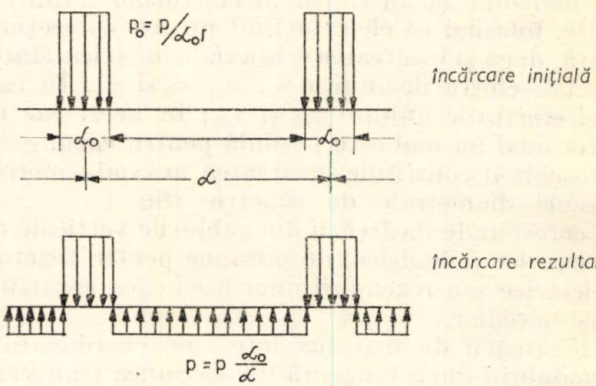


Fig. 2

Din această încărcare rezultă pentru fiecare nod valorile u_0 și precum și eforturile unitare σ_z^0, σ_r^0, σ_θ^0, τ_{rz}^0.

Încărcarea rezultantă se va descompune în serie Fourier :

$$p(\theta) = \frac{2p_0\alpha}{\pi\alpha_0} \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi\alpha_0}{\alpha} \cos \frac{n\pi\theta}{\alpha}. \tag{2}$$

Pentru încărcarea dată de (2) se face ipoteza că deplasările u, w și v variază după direcția θ prin funcție de cos $m\theta$ și sin $m\theta$, adică

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \Sigma\, u_m \cos m\theta; & \bar{\sigma}_z &= \Sigma \sigma_{zm} \cos m\theta, \\ \bar{v} &= \Sigma\, v_m \cos m\theta; & \bar{\sigma}_r &= \Sigma\, \sigma_{rm} \cos m\,\theta, \\ \bar{w} &= \Sigma\, w_m \cos m\theta, & \bar{\sigma}_\theta &= \Sigma\, \sigma_{\theta m} \cos m\,\theta. \end{aligned} \tag{3}$$

Valorile generale ale deplasărilor și eforturilor unitare vor fi :

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \bar{u}; & \sigma_z &= \sigma_z^0 + \bar{\sigma}_z, & \tau_{r\theta} &= \bar{\tau}_{r\theta}, \\ w &= w_0 + \bar{w}; & \sigma_r &= \sigma_r^0 + \bar{\sigma}_r, & \tau_{z\theta} &= \bar{\tau}_{z\theta}. \\ v &= \bar{v}; & \sigma_\theta &= \sigma_\theta^0 + \bar{\sigma}_\theta, & & \\ & & \tau_{rz} &= \tau_{rz}^0 + \bar{\tau}_{rz}, & & \end{aligned} \tag{4}$$

În baza ipotezei de mai sus, funcția deplasărilor N are expresia [4] :

$$N = [N_i, N_j, N_m] \begin{bmatrix} \cos m\theta, & 0, & 0, \\ 0, & \cos m\theta, & 0, \\ 0, & 0, & \cos m\theta, \end{bmatrix} = [N_i, N_j, N_m]\, T(\theta), \tag{5}$$

unde $m = \dfrac{n\pi}{\alpha}$.

Funcțiile deplasărilor N_i au expresia din problema axial-simetrică :

$$N_i = (a_i + b_i r + c_i z)\frac{1}{2\Delta} \cdot I, \tag{6}$$

unde I este matricea unitară de ordin 3×3,

$$\begin{aligned} a_i &= r_z \,.\, z_m - r_m z_i, \\ b_i &= z_j - z_m, \\ c_i &= r_m - r_j, \end{aligned} \tag{7}$$

Δ — aria secțiunii transversale a elementului finit.

Vectorul deplasărilor unui punct interior elementului este

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \\ v \end{Bmatrix} = N \,.\, T \,.\, \{\delta\}^e, \tag{8}$$

unde $\{\delta\}^e$ este vectorul deplasărilor nodurilor elementului e.

Vectorii deformației specifice și al eforturilor unitare sînt:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \varepsilon_r \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{z\theta} \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_I \\ \varepsilon_{II} \end{Bmatrix}; \quad \{\varepsilon_I\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial r} \end{Bmatrix};$$

$$\{\varepsilon_{II}\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{u}{r} + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial w}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial \theta} \end{Bmatrix}, \tag{9.a}$$

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \end{Bmatrix}; \quad \{\sigma_I\} = \begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_r \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix}; \quad \{\sigma_{II}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \tau_{z\theta} \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix}. \tag{9.b}$$

După cum se observă, vectorii $\{\varepsilon_I\}$ și $\{\sigma_I\}$ nu depind explicit de variabila θ.

Relația de elasticitate este

$$\{\sigma\} = D \,.\, \{\varepsilon\}, \tag{10}$$

unde

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)\,(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1, & \dfrac{\nu}{1-\nu}, & \dfrac{\nu}{1-\nu}, & 0, & 0, & 0, \\ , & 1, & \dfrac{\nu}{1-\nu}, & 0, & 0, & 0, \\ , & , & 1, & 0, & 0, & 0, \\ \text{simetric} & , & , & \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)}, & 0, & 0, \\ & & , & , & \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)}, & 0 \\ & & & , & , & \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Conform formulării lui Zienkiewicz [4], matricea B indică relația de legătură între deformațiile specifice din interiorul elementului finit și deplasările nodurilor.

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_I \\ \varepsilon_{II} \end{Bmatrix} = B \cdot \{\delta\}^e = \begin{bmatrix} B_I \\ B_{II} \end{bmatrix} \cdot \{\delta\}^e, \tag{12}$$

unde $B = [B_i,\ B_j,\ B_k]$.

Introducînd pe (8) în (9a) și ținînd cont de (5) și (6) vom avea:

$$(B_i)_I = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} 0, & c_i, & 0 \\ b_i, & 0, & 0 \\ c_i, & b_i, & 0 \end{bmatrix} \cos\, m\theta \cdot I, \tag{13a}$$

$$(B_i)_{II} = (B'_i)_{II} + (B''_i)_{II},$$

$$(B'_i)_{II} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} \frac{a_i}{r} + b_i + \frac{c_i\, z}{r}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & b_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos m\theta, & 0, & 0 \\ 0, & \cos m\theta, & 0 \\ 0, & 0, & \sin m\theta \end{bmatrix}, \tag{13b}$$

$$(B''_i)_{II} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} 0, & 0, & \frac{a_i}{r} + b_i + \frac{c_i z}{r} \\ 0, & \frac{a_i}{r} + b_i + \frac{c_i z}{r}, & 0 \\ \frac{a_i}{r} + b_i + \frac{c_i z}{r}, & 0, & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -m \sin m\theta, & 0, & 0 \\ 0, & -m \sin m\theta, & 0 \\ 0, & 0, & m \cos m\theta \end{bmatrix}. \tag{13c}$$

Matricea de rigiditate K_{ij} definită prin relația generală

$$K = \int_v B^T \,.\, D \,.\, B \,.\, \mathrm{d(vol)}, \tag{14}$$

se va exprima astfel:

$$K_{ij} = \int_v B_i^T \,.\, D \,.\, B_j \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\theta =$$

$$= \int_v [(B_i^T)_I \,,\, (B_i^T)_{II}] \,.\, D \begin{bmatrix} (B_j)_I \\ (B_j)_{II} \end{bmatrix} r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\theta. \tag{15}$$

Dezvoltînd expresia din semnul integralei se obține

$$K_{ij} = H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5,$$

unde

$$H_1 = \frac{2\pi}{\alpha} \int_0^\alpha (B_i)_I^T \, D \, (B_i)_I \, \mathrm{d}\theta \int_A r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z,$$

$$H_2 = \frac{2\pi}{\alpha} \int_0^\alpha (B_i')_{II}^T \, D \, (B_j')_{II} \, \mathrm{d}\theta \int_A r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z,$$

$$H_3 = \frac{2\pi}{\alpha} \int_0^\alpha (B_i')_{II}^T \, D (B_j'')_{II} \, \mathrm{d}\theta \int_A r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z,$$

$$H_4 = \frac{2\pi}{\alpha} \int_0^\alpha (B_i'')_{II} \, D (B_j')_{II} \, \mathrm{d}\theta \int_A r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z,$$

$$H_5 = \frac{2\pi}{\alpha} \int_0^\alpha (B_i)_{II}^T \, D \, (B_j'')_{II} \, \mathrm{d}\theta \int_A r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z.$$

Deoarece matricele T și $\dfrac{\partial T}{\partial \theta}$ sînt simetrice, se obține

$$H_1 = \frac{\pi \bar{r}}{4\Delta} \begin{bmatrix} 1 + \dfrac{\sin 2m\alpha}{2m\alpha}, & 0, & 0, \\ 0, & 1 + \dfrac{\sin 2m\alpha}{2m\alpha}, & 0, \\ 0, & 0, & 1 - \dfrac{\sin 2m\alpha}{2m\alpha} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0, & b_i, & c_i \\ c_i, & 0, & b_i \\ 0, & 0, & 0 \end{bmatrix} \cdot D \cdot \begin{bmatrix} 0, & c_j, & 0, \\ b_j, & 0, & 0, \\ c_j, & b_j, & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_2=\frac{\pi\bar{r}}{4\Delta}\begin{bmatrix} 1+\sin\frac{2m\alpha}{2m\alpha}, & 0, & 0 \\ 0, & 1+\frac{\sin 2m\alpha}{2m\alpha}, & 0 \\ 0, & 0, & 1-\frac{\sin 2m\alpha}{2m\alpha} \end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} \frac{a_i}{\bar{r}}+b_i+\frac{c_i\bar{z}}{\bar{r}}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & c_i, & b_i \end{bmatrix}\cdot D\cdot\begin{bmatrix} \frac{a_j}{\bar{r}}+b_j+\frac{c_j\bar{z}}{\bar{r}}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & b_j \end{bmatrix},$$

$$H_3=-\frac{\pi\bar{r}}{4\Delta}\sin^2 m\alpha\begin{bmatrix} \frac{a_i}{\bar{r}}+b_i+\frac{c_i\bar{z}}{\bar{r}}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & c_i, & b_i \end{bmatrix}\left(\frac{a_i}{\bar{r}}+b_j+\frac{c_j\bar{z}}{\bar{r}}\right)\cdot D\cdot\begin{bmatrix} 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_4=-\frac{\pi\bar{r}}{4\Delta}\sin^2 m\alpha\left(\frac{a_i}{\bar{r}}+b_i+\frac{c_i\bar{z}}{\bar{r}}\right)\begin{bmatrix} 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \end{bmatrix}D\begin{bmatrix} \frac{a_j}{\bar{r}}+b_j+\frac{c_j\bar{z}}{\bar{r}}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & c_j \\ 0, & 0, & b_j \end{bmatrix},$$

$$H_5=\frac{\pi\bar{r}}{4\Delta}\cdot m^2\begin{bmatrix} \frac{\sin 2m\alpha}{2m\alpha}-1, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{\sin 2m\alpha}{2m\alpha}-1, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{\sin 2m\alpha}{2m\alpha}+1 \end{bmatrix}\times$$

$$\times\left(\frac{a_i}{\bar{r}}+b_i+\frac{c_i\bar{z}}{\bar{r}}\right)\cdot\left(\frac{a_j}{\bar{r}}+b_j+\frac{c_j\bar{z}}{\bar{r}}\right)D_{11},$$

unde $\bar{r}$ și $\bar{z}$ sînt coordonatele centrului ariei secțiunii transversale a elementului finit

$$D_{11}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu, & \nu, & \nu\\ \nu, & 1-\nu, & \nu\\ \nu, & \nu, & 1-\nu\end{bmatrix}. \tag{18}$$

Pentru o valoare a lui m (un termen al seriei Fourier) se determină cu relațiile (17) matricele H și cu (16) submatricele de rigiditate K^e_{ij}.

Matricea de rigiditate a structurii $\mathfrak{K}^m$ se obține prin asamblarea submatricelor K_{ij}.

$$\mathfrak{K}^m=\begin{bmatrix}K_{11}, & K_{12}, \ldots K_{ij}, \ldots\ldots K_{1l}\\ \ldots\ldots K_{ij}, \ldots\ldots\\ K_{21}, \ldots\ldots\ldots\ldots K_{2l}\end{bmatrix}, \tag{19}$$

$$K_{ij}=\sum_{e=1}^{q}K^e_{ij}. \tag{19a}$$

În aceste relații, l este numărul nodurilor structurii iar q este numărul elementelor finite.

Încărcarea la nodul i pentru termenul n al seriei va fi

$$\begin{aligned}R^i_n&=2\pi r_0\cdot\bar{R}_n,\\ Z^i_n&=2\pi r_0\cdot\bar{Z}_n,\\ S^i_n&=2\pi r_0\cdot\bar{S}_n\end{aligned}\qquad \{Q\}^i_n=\begin{Bmatrix}R^i_n\\ Z^i_n\\ S^i_n\end{Bmatrix}, \tag{20}$$

unde r_0 este raza cercului de încărcare a sarcinii exterioare $\bar{R}_n$, $\bar{Z}_n$, $\bar{S}_n$ sînt componentele radială, axială și tangențială din dezvoltarea (2).

Deplasările nodurilor se obțin din sistemul de ecuații

$$\mathfrak{K}^n\cdot\{\delta\}^n=\{Q\}^n, \tag{21}$$

unde

$$\{Q\}^n=\begin{Bmatrix}Q^1_n\\ Q^2_n\\ \vdots\\ Q^l_n\end{Bmatrix}. \tag{22}$$

Eforturile unitare (amplitudini) se vor determina cu relația

$$\{\sigma\}^n=D\cdot\begin{bmatrix}B_{\mathrm{I}}\\ B_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}\cdot\{\delta\}^n, \tag{23}$$

unde

$$B_I = [(B_i)_I,\ (B_j)_I,\ (B_k)_I],$$
$$B_{II} = [(B_i)_{II},\ (B_j)_{II},\ (B_k)_{II}]. \tag{24}$$

Referindu-ne la relațiile (3), eforturile unitare totale vor fi

$$\{\sigma\} = \{\sigma\}^0 + \sum \{\sigma\}^m \cos m\theta. \tag{25}$$

În felul acesta se obțin eforturile unitare într-un punct de coordonate r, z, θ, luînd un număr suficient de termeni în dezvoltarea Fourier, circa 10—12 termeni.

Pentru efectuarea calculelor numerice, pentru un recipient de presiune din beton precomprimat este necesar un calculator numeric de capacitate minimă 128 K.

Primită la redacție la 4 septembrie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. Argyris I. M., *The LUMINA Element for the Matrix Displacement Method*, Journal of the Royal Aeronautical Society, Technical, Note, June (1968).
2. Argyris I. M., Scharpf, D. N., *The HERMES 8 Element for the Matrix Displacement Method*, Journal of the Royal Aeronautical Society, July (1968).
3. Rashid Y., *Analysis of Axisymmetric Composite Structures by the Finite Element Method*, Nuclear Engineering and Design, *3* (1966).
4. Zienkiewicz O. C., Cheung Y. K., *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, Mc.Craw-Hill, London, 1968.
5. Zudans Z., *Analysis of Asymetric Stiffened Shell Type Structures by the Finite Element Method*, Nuclear Engineering and Dessign, *9* (1969).

RECENZII

G. OEHLER, A. WEBER, Steife Blech- und Kunststoffkonstruktionen (Construcţii rigide din tablă şi materiale sintetice), Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1972, VII + 172 p., 202 fig., 48 DM.

Acest volum, care face parte dintr-o serie dedicată diverselor probleme de proiectare, are ca obiect prezentarea posibilităţilor de realizare a unor piese uşoare din tablă sau materiale sintetice.

Reducerea greutăţii vehiculelor sau aparatelor mobile şi transportabile prezintă un cert interes atît din punct de vedere tehnic, cît şi economic. Realizarea acestui deziderat este posibilă fie prin utilizarea, ca material de construcţie, a tablei subţiri (pînă la 3 mm grosime) sau a materialelor sintetice. Problema care se pune este aceea de a se atinge acest scop fără a se pierde din rezistenţa pieselor astfel construite. Apare deci necesară folosirea renurilor, nervurilor sau a altor elemente de rigidizare.

Cartea este împărţită în două mari capitole, redactate respectiv de cei doi autori în ordinea menţionată la început. Primul capitol se ocupă de problema pieselor construite din tablă subţire, rigidizate cu renuri. După o serie de consideraţii cu caracter general asupra rezistenţei tablelor cu renuri şi în special a profilelor în formă de U realizate din tablă subţire, sînt analizate din acest punct de vedere diferitele realizări constructive posibile.

În capitolul al doilea, care se ocupă de piesele realizate din materiale sintetice, sînt prezentate mai întîi proprietăţile mecanice ale duromerilor şi materialelor termoplastice. Urmează apoi o scurtă privire asupra posibilităţilor de prelucrare a acestor materiale şi o prezentare mai amplă a măsurilor de realizare a rigidizării pieselor astfel construite.

Cartea, scrisă la nivelul proiectanţilor, în conformitate dealtfel cu scopul urmărit se citeşte cu uşurinţă şi poate fi de real folos în activitatea de proiectare. Materialul expus oferă şi unele sugestii pentru cei ce se ocupă cu cercetarea în acest domeniu.

Remarcăm şi excelenta realizare grafică atît ca punere în pagină, cît şi în ceea ce priveşte calitatea desenelor şi fotografiilor.

T. Oroveanu

PROCEEDINGS OF THE FOURTH CONFERENCE ON FLUID MACHINERY (Akademiai Kiadó — Budapest 1972)

Între 11—16 septembrie 1972 s-a ţinut la Budapesta cea de a IV-a Conferinţă de turbomaşini hidropneumatice. Materialele Conferinţei au fost publicate într-un volum de 1571 pagini, conţinînd 104 lucrări, semnate de 119 autori din peste 20 de ţări ale lumii.

În cele ce urmează vom face o succintă trecere în revistă a problemelor care au făcut obiectul lucrărilor prezentate în publicaţia conferinţei, încercînd o încadrare a lor în diverse domenii.

1. *Rețele de profile.* Lucrările de acest gen tratează modelarea matematică a curenților din rețele bidimensionale, cîmpul hidrodinamic și pierderile de presiune, relația dintre proprietățile aerodinamice ale unui profil singular și în rețea, rețele rotitoare, rețele multietajate etc.

2. *Stratul-limită și turbulența* sînt reprezentate prin studii care privesc prezicerea profilului vitezei în regiunea de perete a stratului-limită turbulent, prezicerea stratului-limită turbulent pe paletele rotorilor radiali, decăderea vîrtejurilor, măsurători de turbulență în camera spirală a turbinei, măsurători de magnetohidrodinamica fluctuațiilor de viteză și determinarea spectrului energiei etc.

3. *Cavitația* constituie obiectul celor mai multe lucrări. Din fizica fenomenului de cavitație, problemele tratate privesc generarea bulelor cavitaționale, perioada succesiunii nucleelor de cavitație, impactul picăturilor de apă sferice pe o suprafață fixă, eroziunea cavitațională. De asemenea, există și cîteva studii asupra aparatelor și tunelelor de apă pentru testarea cavitației. Cercetări însemnate sînt dedicate cavitației în mașini și dispozitive hidraulice: incipiența fenomenului de cavitație în turbomașini hidraulice, cavitația în pompe și turbine, cavitația în lagăre, cavitația în coturi etc.

4. *Metode și aparate de măsură.* Este important să menționăm aci în primul rînd vizualizarea curentului printr-un rotor cu ajutorul rotoscopului și, de asemenea, studiul unui debitmetru tip turbină cu palete elicoidale precum și studiul unor sonde în formă de pană.

5. *Turbine hidraulice.* Dintre problemele mai importante amintim: micșorări axialsimetrice elicoidale cu aplicație la turbinele Francis, capacitatea unei stații de încercare pentru turbine Kaplan și bulb, încadrarea modelului de turbină într-o instalație experimentală, încercări de modele Kaplan, sarcina de aspirație minimă a pompelor-turbină europene, reducerea vitezei de ambalare a turbinelor Pelton, pierderi în camera spirală a unei turbine etc.

6. *Pompe.* Un număr mare de lucrări sînt destinate considerațiilor teoretice asupra pompelor în ansamblul lor sau organelor de lucru ale acestora: dimensionarea pompelor centrifuge etajate, pompe regenerative, pompe rotodinamice, caracteristicile pompelor axiale cu palete reglabile, curenți secundari în pompe, curentul din spațiu rotoro-carcasă. De asemenea, multe lucrări au conținut experimental: aspirația pompelor cu piston, pompe cu prerotație, efectul paletelor de descărcare, influența conținutului de gaz asupra aspirației pompelor centrifuge, relația dintre pompa diagonală și circuitul dinaintea sa, pompe axiale reversibile, pomparea lichidelor vîscoase cu pompe centrifuge, pompe care transportă amestecuri de apă cu diferite materiale în suspensie, forțe și momente care acționează asupra organelor pompei.

7. *Hidrodinamica turbotransmisiilor.* Lucrările prezentate în acest domeniu privesc un studiu critic asupra cuplajelor hidraulice de protecție și investigații teoretice pentru calculul caracteristicilor de lucru ale transformatorului hidrodinamic de moment.

8. *Ventilatoare, compresoare.* Acest compartiment este reprezentat prin lucrări privind rețelele de palete rotorice și statorice, metode de proiectare pentru ventilatoare centrifuge, caracteristicile ventilatoarelor, fenomene de tranziție la pornirea ventilatoarelor, analiza curentului și a zgomotelor compresoarelor centrifuge etc.

9. *Alte mașini și dispozitive.* Dintre acestea amintim: pompe pentru frîne, pompe cu jet la viteze supersonice, regulatoare, clapete și vane fluture. De asemenea, este important să citățm lucrările privind ventilarea tunelelor rutiere și lovitura de berbec.

★

Proceedings of the fourth conference on fluid machinery, prin cîmpul extrem de larg al problemelor care fac obiectul lucrărilor, prin numărul mare de autori aparținînd la diverse școli de renume mondial, prezintă interes pentru institutele de învățămînt superior, cercetare și proiectare, precum și pentru uzinele constructoare de mașini hidro-pneumatice.

D. Ionescu

BIBLIOTECA MUZEULUI BRUKENTHAL 1948